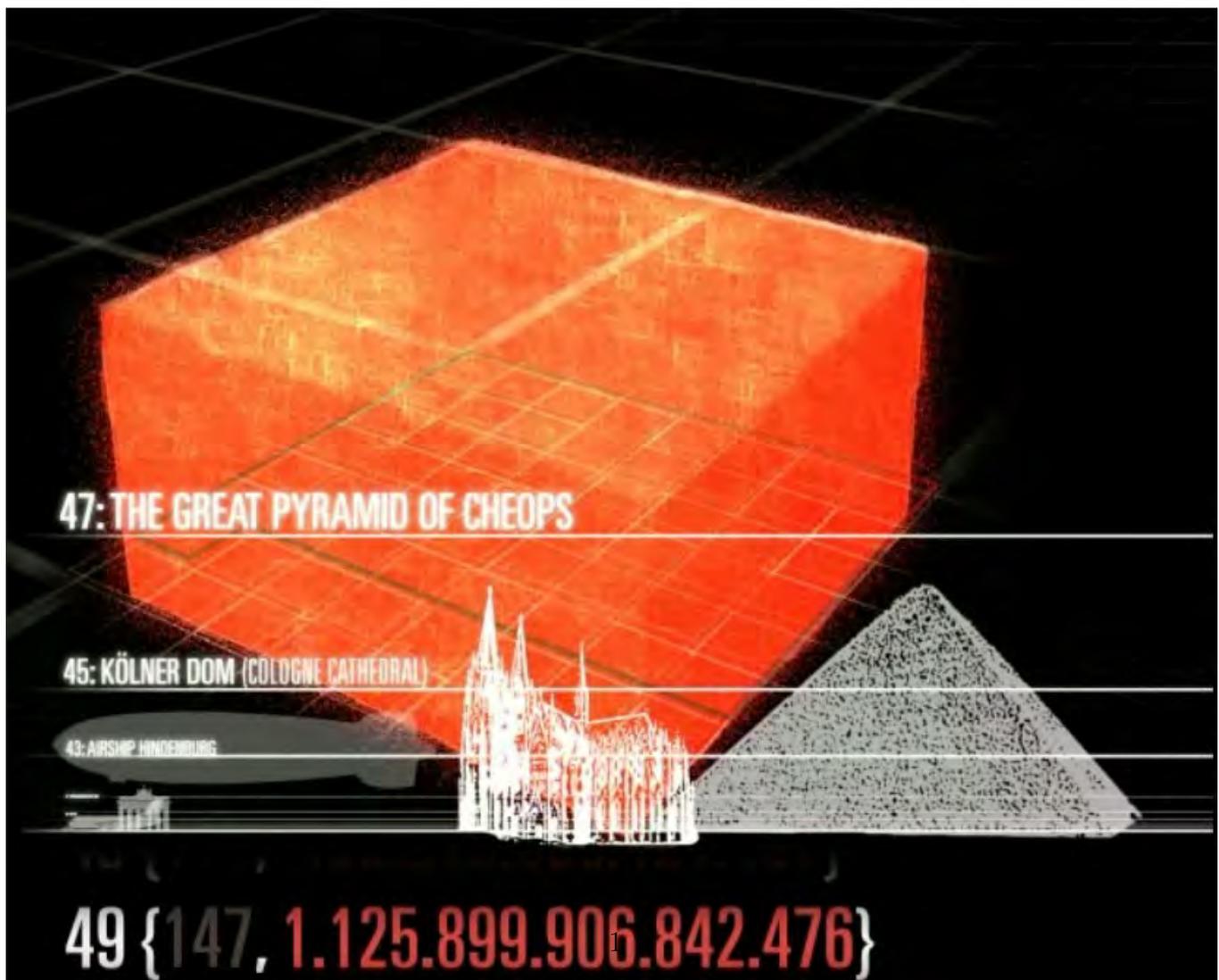


# SCIENC*e*MOTION

## Visualisierungen - ein Schlüssel zu moderner Physik im Schulunterricht

Stefan Heusler



## Impressum

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Heusler, Stefan: Visualisierungen - ein Schlüssel zu moderner Physik im Schulunterricht.  
Habilitationsschrift. Münster 2013. PDF-Datei.  
ISBN 978-3-943988-02-4

Veröffentlicht im Verlag SCIENCeMOTION Publications als PDF-Datei zum Download auf  
der Verlagshomepage <http://www.sciencemotion.de/>

Die Bildrechte liegen bei SCIENCeMOTION; mit Ausnahme von Abb. 1.1, Abb. 3.11 und Abb.  
7.12 (linkes Bild).

Dieses Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt.  
Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung von  
SCIENCeMOTION unzulässig.  
Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen in andere Sprachen und Verarbei-  
tung in elektronischen Systemen.

Copyright ©2013 by SCIENCeMOTION  
ISBN 978-3-943988-02-4

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Neue Medien in der Physikdidaktik</b>	<b>3</b>
1.1	Ziel und Überblick der vorliegenden Arbeit . . . . .	3
1.2	Kontextorientierung im Physikunterricht . . . . .	4
1.3	Gestaltungsprinzipien einer DVD-ROM als Lernumgebung . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Physikdidaktik als Übersetzungsaufgabe</b>	<b>16</b>
2.1	Repräsentationsebenen in der Physik . . . . .	16
2.2	Repräsentationsebenen in der Musik . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Visualisierung moderner Quantenphysik</b>	<b>27</b>
3.1	Ein Qubit . . . . .	28
3.2	Repräsentationsebenen der Quantenphysik: Das Vier-Quadranten Schema	31
3.3	Zwei Qubits: Verschränkung . . . . .	36
3.4	Visualisierung verschränkter Zustände . . . . .	47
3.5	Alternativen zur Quantenphysik . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Visualisierung der Grundzüge von Atomphysik</b>	<b>60</b>
4.1	Atomphysik als Eigenwertproblem . . . . .	60
4.2	Visualisierung von Matrizen und Operatoren . . . . .	66
4.3	Visualisierung der Drehimpulsalgebra . . . . .	70
4.4	Visualisierung des Wasserstoffspektrums . . . . .	76
4.5	Aufbau des Periodensystems . . . . .	81
4.6	Ausblick: Verschränkung und chemische Bindungen . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Evaluation und Diskussion</b>	<b>85</b>
5.1	Resultate der ersten Pilotstudie (April 2008) . . . . .	85
5.2	Resultate der zweiten Pilotstudie (März-Mai 2009) . . . . .	88
5.3	Resultate der dritten Pilotstudie (August 2010) . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Physikdidaktik und moderne Medien</b>	<b>91</b>
6.1	Neue Medien im Spannungsfeld von Unterricht und Unterhaltung . . . . .	91
6.2	Mathematische Visualisierungen im Kontext . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Mathematischer Anhang</b>	<b>96</b>
7.1	Quantentheorie von Licht . . . . .	96
7.2	Die Drehalgebra und die Drehimpulsalgebra . . . . .	114
7.3	Verschränkung & Symmetrie: Vom He-Atom zum Periodensystem . . . . .	118

7.4	Stereographische Projektionen von $S^2$ und $S^3$ . . . . .	120
7.5	Die Gruppe $SU(N)$ . . . . .	124
7.6	Eichprinzip und minimale Kopplung . . . . .	129
7.7	Mathematik und Musik . . . . .	134
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>136</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>146</b>

# 1 Neue Medien in der Physikdidaktik

## 1.1 Ziel und Überblick der vorliegenden Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein lerntheoretisch motiviertes Konzept für eine multimediale, interaktive Lernumgebung für Themen aus der modernen Physik vorzustellen, und deren konkrete Umsetzung als DVD-ROM. Die Arbeit steht an der Schnittstelle zwischen Lehr-Lernforschung einerseits und der konkreten Implementation der Ergebnisse in Form von Unterrichtskonzepten andererseits. Bereits im Jahre 1974 wurde im DFG-Antrag zum Schwerpunktprogramm 'Lehr- Lernforschung' die Zielsetzung dieser Forschungsrichtung formuliert: 'Zwischen einer praxeologisch orientierten, nicht theoriegeleiteten Anwendungsforschung und einer für die Praxis irrelevanten Grundlagenforschung soll ein Forschungstyp entwickelt werden, der die Theoriegebundenheit und die Berücksichtigung der Restriktion in der Praxis integriert' [72]. Aus diesem Ansatz folgt insbesondere die Notwendigkeit einer starken Vernetzung von Lehr- Lernforschung mit Lerninhaltsforschung, da die Unterrichtspraxis nicht aus Lerntheorie, sondern aus Inhalten besteht. Wie diese Inhalte optimal umgesetzt werden, ist ein relevantes Forschungsthema [110].

Wir werden uns im Folgenden mit Forschungsergebnissen der Lehr- Lernforschung befassen, die den Einsatz von Multimedia in der Physikdidaktik rechtfertigen und konkrete Hinweise geben, welche Elemente bei der Erarbeitung einer Lernumgebung förderlich sind. Im zweiten Kapitel behandeln wir Repräsentationsebenen in der Physik und vergleichen diese mit Repräsentationsebenen in der Musik. Neben dem rationalen Verstehen wird durch diese Analogie die Rolle von Emotion und Intuition für die Physikdidaktik gewürdigt. Im dritten Kapitel wird eine im Rahmen dieser Arbeit bereits realisierte Lernumgebung zum Thema Quantenoptik vorgestellt, die DVD-ROM '*Quantendimensionen - Doppelspalt, Verschränkung, Quantencomputer*' [46]. Wesentlich bei unserem Ansatz ist die Einführung von vier Repräsentationsebenen bei der Vermittlung von Quantenphysik (Abb. 3.4) und eine einheitliche Darstellung aller behandelten Themen mit diesen Bildmotiven. Dadurch ergeben sich mathematisch fundierte Visualisierungen von Theorie und Experiment, die *quantitative* Aussagen über die physikalischen Sachverhalte direkt aus den Visualisierungen ermöglichen. Unser Ansatz ist es hierbei, den physikalischen Inhalt in eine Bildersprache zu übersetzen, die leicht verständlich ist, ohne zu simplifizieren. Im vierten Kapitel wird gezeigt, wie dieser Ansatz auch auf die Atomphysik verallgemeinert werden kann. Im fünften Kapitel werden die Ergebnisse mehrerer Vorstudien vorgestellt, die parallel zur Produktion der DVD-ROM erfolgt sind. Die Arbeit schließt im sechsten Kapitel mit einem Überblick über verschiedene Produktionstypen (Kino/Fernsehen/Lehrfilm/Internet/Lernsoftware) bei der medialen Repräsentation von Physik ab, die das Spannungsfeld zwischen Unterricht und Unterhaltung, zwischen ab-

strakter Physik und Alltagswelt der Schüler beleuchtet. Unser Ansatz (siehe Abb. 1.4 und Abb. 6.2) sucht in diesem Spannungsfeld einen Weg, das Potential Neuer Medien für die Schule optimal zu nutzen. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf mögliche weitere Projekte ab, die sich aus diesem Ansatz ergeben.

## 1.2 Kontextorientierung im Physikunterricht

Ein zentrales Ergebnis der PISA-Studie aus dem Jahr 2006 [99], [12] ist die Beobachtung, dass Schüler Defizite haben, naturwissenschaftliches Wissen im *Kontext* anwenden zu können. Projekte zum kontextorientierten Lernen in den naturwissenschaftlichen Fächern werden zur Zeit in Deutschland diskutiert und umgesetzt [94],[29]. Ein direkter und lebensweltlicher Ansatz von H.J. Schlichting, Kontextbezug zu erhalten, ergibt sich durch das Erlernen der Fähigkeit, in alltäglichen Situation physikalische Themen *sehen zu lernen* [110]. Durch Schlichtings Ansatz werden z.B. Regentropfen auf der Fensterscheibe oder Tautropfen auf einem Spinnennetz zu Sammellinsen (Abb. 1.1), und die gekrümmte Karosserie des Autos zu einem Zerrspiegel. Physikalische Fragestellungen ergeben sich unmittelbar aus diesen alltäglichen Bildern, und geben Dingen, die man meint, schon tausendmal gesehen zu haben, einen neuen und durch die physikalische Fragestellung unerwarteten Bezug. Hier ergibt sich durch die Kombination einer künstlerisch-ästhetischen mit der wissenschaftlich-rationalen Sicht eine ganz besondere, faszinierende Sicht auf die Physik. Es gibt kaum ein Gebiet der Schulphysik, das sich nicht durch Alltagsphysik motivieren und in einen unvermuteten Kontext einbinden lassen könnte. Interessant an diesem Ansatz ist auch die Vernetzung der Fragestellungen: Das Bild von Tautropfen im Spinnennetz in Abb. 1.1 führt zu einer ganzen Reihe von physikalisch interessanten Fragestellungen, (z.B. Größe und Anordnung der Tautropfen, Oberflächenspannung von Wasser, etc), ganz im Gegensatz zur Sammellinse im Labor, die den Lernstoff auf *ein* geplantes Thema reduziert, das steril herauspräpariert und anhand der Idealgestalt abgearbeitet wird.

### Anchored Instruction

Was den Einsatz von Neuen Medien angeht, so ist die aus den USA stammende *Anchored Instruction* (AI) als ein Ansatz zu situiertem Lernen [40] zu nennen, der schon seit den 1980iger Jahren in Theorie und Praxis umfassend untersucht worden ist. Vereinfacht gesagt handelt es sich dabei um Textaufgaben, die jeweils durch eine kurze Filmsequenz in einen Kontext eingebaut und motiviert werden. Im Film sind die Daten und Informationen, die zur Lösung des Problems wichtig sind, eingebettet. Der Film hat eine narrative Struktur und zeigt eine realistische Problemstellung in einem authentischen Kontext. Die ersten AI-Produktionen wie 'The Adventures of Jaspar Woodbury' bestanden aus einzelnen Videosequenzen mit Textaufgaben [98]. Mit der Weiterentwicklung digitaler Medien konnte im Rahmen des AI-Ansatzes eine stärkere Interaktivität umgesetzt werden, wie z.B. bei 'Adventure Player' [28]. Die Lernwirksamkeit des AI-Ansatzes wurde in zahlreichen Studien untersucht, die von Blumenschein in einer Meta-Analyse zusam-

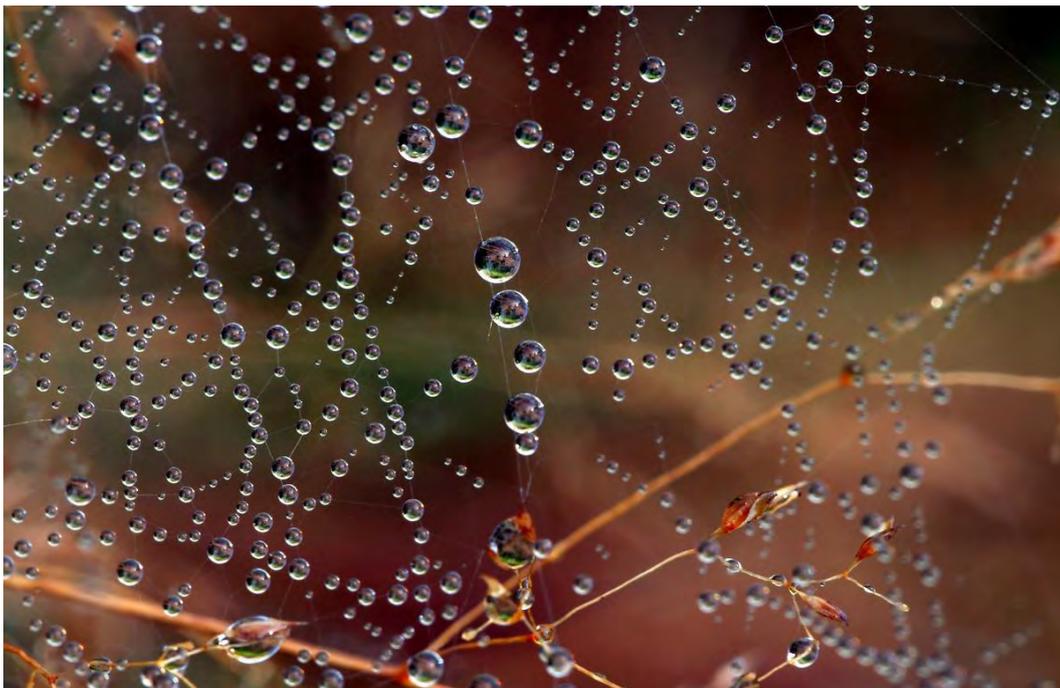


Abbildung 1.1: Tautropfen auf einem Spinnennetz: Physikalische Fragestellungen ergeben sich in Bezug zu einem ästhetisch reizvollen, alltäglichen Kontext (Foto: H.J. Schlichting)

mengefasst wurden [10]. Zwar weisen die Studien meist einen positiven Effekt für die AI-Klassen nach. Allerdings ist der Aufwand für die Realisierung einer multimedialen Lernumgebung sehr hoch, so dass Kuhn die Frage stellt, ob es nicht einen einfacheren Ansatz für Kontextbezug und Authentizität im Physikunterricht gibt [67]. Demzufolge hat Kuhn ein theoriegeleitetes Konzept für Physikaufgaben entwickelt, das unmittelbar in der Unterrichtspraxis Verwendung finden kann: Durch *Zeitungsaufgaben* wird das physikalische Thema in einen Kontext gestellt und erhält für den Schüler eine unmittelbare Relevanz. Kuhn weist in einer detaillierten Studie nach, dass durch Zeitungsartikel in einen Kontext eingebettete Physikaufgaben signifikant besser gelöst werden und zu höherer Motivation führen als herkömmliche Textaufgaben. Diese sogenannte 'modifizierte anchored instruction' (MAI) basiert auf den Leitlinien Praktikabilität, Flexibilität und empirischer Forschung [87]. Als Defizit des ursprünglichen AI-Ansatzes wird der hohe Entwicklungsaufwand von vielen hundert Stunden für das Lehrmedium pro Unterrichtsstunde und Unflexibilität genannt, da das Ankermedium als DVD vorliegen muss und am Computer gezeigt wird. Weiterhin besteht ein erheblicher Fortbildungsbedarf für die Lehrer, die das Medium einsetzen sollen, und es ist schwierig, auf die individuellen Bedürfnisse des Unterrichts einzugehen. In der Tat haben sich die AI-Lernmedien nicht über den englischsprachigen Raum hinaus ausgebreitet, und in zwei großen Studien wurde von Problemen bei der Implementation von AI berichtet [98], [54]. Der Vorschlag

von Kuhn, sich auf Printmedien als Kontextgeber zurückzuziehen, überzeugt durch den Erfolg und die Einfachheit der Idee. Textaufgaben können auf diese Weise in einen sinnstiftenden Kontext gesetzt und in der Unterricht integriert werden.

## **Neue Medien in Schule und Freizeit**

In dieser Arbeit beschreiten wir einen anderen Weg, der auf die Weiterentwicklung und Optimierung von lerntheoretisch fundierten Multimedia-Produkten abzielt. Sicherlich wird Papier auch in absehbarer Zukunft das Leitmedium bleiben. Für Schüler gibt es allerdings gegenüber der DVD oder dem Internet keine Akzeptanzprobleme, da diese Medien sowohl in der Freizeitgestaltung als auch bei der Recherche von Informationen intensiv genutzt werden. Im heutigen Computerspiele- und Lernprogrammmarkt gibt es eine große Vielzahl von Angeboten, von denen die meisten allerdings nicht theoriegeleitet, sondern kommerziell angelegt sind. Der gesamte Medienmarkt hat ein immenses Volumen und eine Dynamik, die sich weniger durch Lerntheorie seitens der Universität beeinflussen lässt, als durch die Gesetze der Marktwirtschaft. Es sollte auch die Frage gestellt werden, wieviel physikalische Kenntnisse Schüler tatsächlich durch den Physikunterricht vermittelt bekommen, und wieviel durch Fernsehen, Internet, Spiele und Zeitschriften. Zu dieser Frage gibt es bislang nach meiner Kenntnis noch keine Untersuchung. Medien in der Schule einzusetzen, die Schüler gerade in der Freizeit intensiv nutzen, sollte keine große technische Hürde mehr darstellen. Die Kritik von Kuhn und die Frage nach der Flexibilität von Multimedia-Produktionen ist sicher berechtigt, allerdings kann die Antwort nicht sein, die rasante Entwicklung auf dem freien Markt nicht durch anspruchsvolle, didaktisch fundierte Produktionen seitens der Universität zu erweitern und eine Lösung anzubieten, die das Problem mangelnder Flexibilität soweit möglich minimiert, die Mediennutzung moderner Schüler berücksichtigt, und lerntheoretisch fundiert ist. Für bestimmte Fragestellungen eignen sich Zeitungsaufgaben gut, aber es gilt zu untersuchen, wann dynamische Animationen gegenüber Texten mit Standbildern überlegen sind, und wie in diesem Fall eine geeignete multimediale Lernumgebung konstruiert werden kann.

## **Der Zyklus von Evaluation und Realisation multimedialer Lernumgebungen**

In dieser Arbeit wird somit das Potential Neuer Medien für die Physikdidaktik kritisch hinterfragt und eine Methode vorgestellt, wie das Lernen moderner Physik in der Schule durch gezielt entwickelte Lernumgebungen verbessert werden kann. Es gibt zwar eine Reihe von Untersuchungen über den Lernerfolg beim Einsatz Neuer Medien (siehe z.B. [57]), allerdings besteht zwischen der Untersuchung einzelner Prototypen und einer kompletten, strukturierten Unterrichtshilfe noch eine Lücke. Hat man das Ziel vor Augen, den Physikunterricht durch die in den letzten Jahrzehnten neu hinzugekommenen Möglichkeiten im Bereich Multimedia zu erweitern und somit zu verbessern, kann nach der Untersuchung einzelner Prototypen die Arbeit noch nicht als abgeschlossen

gewertet werden. Erst die Erarbeitung eines auf den in verschiedenen Studien ausgemachten positiven Faktoren basierenden Multimedia-Konzepts, das tatsächlich von einer großen Anzahl von Schülern verwendet wird, kann verlässliche Aussagen ergeben, ob und in welcher Form Lernumgebungen förderlich sind. Es ergibt sich dadurch eine Rückkopplungsschleife von Evaluationen, konkreter Implementation der Ergebnisse, und erneuter Evaluation, die bei der weiteren Erarbeitung von Lernumgebungen zu stetiger Optimierung führt.

Dieser Ansatz kann nicht im Rahmen einer einzelnen Arbeit realisiert werden, da sowohl die Erarbeitung von Unterrichtskonzepten als auch die Evaluation zeitaufwändig sind und einer besonderen Expertise bedürfen. Wir beschränken uns daher auf die Aufgabe, ausgehend von den vorliegenden Studien und einer Analyse vom Bedarf an Lernumgebungen, ein konkretes Multimedia-Konzept für den Bereich Quantenphysik zu realisieren und in mehreren Vorstudien zu evaluieren. Der nächste Schritt der Rückkopplungsschleife, also die Hauptstudie über den Lernerfolg und die Optimierung bei weiteren Projekten, ist in naher Zukunft geplant.

### **1.3 Gestaltungsprinzipien einer DVD-ROM als Lernumgebung**

Lernen im Sinne des haptischen 'Begreifens' stößt an seine natürliche Grenze einerseits aufgrund der eingeschränkten Wahrnehmungsfähigkeit der menschlichen Sinne, andererseits aufgrund der begrenzten räumlichen und zeitlichen Größenordnung, die ein Mensch ohne technische Hilfsmittel fähig ist, wahrzunehmen. Die Physik sucht nach Möglichkeiten, sowohl in Theorie als auch Experiment weit über den direkt wahrnehmbaren Teil der Welt hinaus Gesetzmäßigkeiten zu verstehen und zu beschreiben, und letztlich auch technologisch nutzbar zu machen. Notwendigerweise werden die Naturgesetze, die für den Mikrokosmos gelten, abstrakt sein und zunächst wenig mit der alltäglich gewohnten Welt zu tun haben. Faktenwissen hierzu steht der jetzigen Generation von Schülern in einer unübersehbaren Fülle zur Verfügung. Bei der Suche nach elementarisierten, dem Wissenstand der Schüler angemessenen Repräsentationen und bei der Auswahl und Strukturierung des Inhalts ist die Rolle des Lehrers unabdingbar. Um den Lehrer zu unterstützen, können Bilder und Animationen zur Illustration von ansonsten nicht beobachtbaren Vorgängen nützlich sein. Da in der Physik viele Vorgänge zu schnell oder zu langsam, zu groß oder zu klein etc. sind, und somit nicht direkt wahrgenommen werden können, können Bilder quasi als Ersatz für die direkte sinnliche Wahrnehmung fungieren. Das hohe Maß an Abstraktion und Mathematisierung der modernen Physik stellt zusätzlich eine hohe Hürde dar. Spätestens hier ist Schlichtings Ansatz, aus der Alltagsphysik die Schulphysik zu entwickeln [110], um eine weitere Fragestellung zu ergänzen: Die Naturgesetze verlangen zu ihrer Beschreibung ein Abstraktionsvermögen, das eine große Herausforderung darstellt. Alleine auf die mathematische Repräsentation zurückzugreifen ist für die Schule weder möglich noch sinnvoll. Stattdessen muss auf elementare Modelle und mathematische Visualisierungen zurückgegriffen werden. Für die

Gestaltung einer DVD-ROM für die Schule stellen sich somit folgende Fragen:

- (i) Welche Bilder sind für das Verständnis des speziellen physikalischen Themas geeignet?
- (ii) Wann sollten Standbilder, wann Animationen verwendet werden?
- (iii) Welche Kombination von Kontextbezug und Sachbezug ist lernförderlich?
- (iv) Sollte die DVD-ROM interaktiv sein, und wenn ja, in welchem Ausmaß?

Es ist sicherlich nicht einfach, pauschal eine Antwort zu diesen Fragen zu finden. Auch wenn die Kombination von Texten mit Bildern als lernförderlich angesehen wird, muss im Fall der Physik gewarnt werden: Visualisierungen sind hilfreich, wenn sie den tatsächlichen physikalischen Vorgang möglichst gut beschreiben. Aufgrund der immer weitergehenden Abstraktion bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge z.B. in der Quantenphysik gibt es Grenzen bei der bildhaften Beschreibung, die kaum zu überwinden sind.

Wir wollen daher in zwei Schritten vorgehen. Im ersten Schritt nehmen wir an, wir hätten passende Visualisierungen gefunden, die den zu unterrichtenden Gegenstand gut beschreiben. Es bleiben dann die Fragen (ii)-(iv) zu klären. Zu diesen Fragen gibt es bereits einige Forschungsergebnisse, die wir hier vorstellen wollen. Im anschließenden zweiten Schritt wenden wir diese allgemeinen Ergebnisse auf spezielle Themen an - und müssen in jedem Einzelfall die Frage (i) klären, auf die es keine allgemeine und pauschale Antwort geben kann. Für die Suche nach passenden Visualisierungen zum Thema Verschränkung verweisen wir auf Kapitel 3, für Visualisierungen zum Thema Atomphysik auf Kapitel 4 dieser Arbeit. Im mathematischen Anhang werden für einige weitere Themen Visualisierungen skizziert.

## Das Multimedia-Prinzip

Das sogenannte Multimedia-Prinzip besagt, dass Menschen besser mittels Texten und Bildern lernen als mit Texten allein [120], [57]. Diese Idee wurde laut Schnotz bereits im 17. Jahrhundert von Comenius (1658) postuliert. Dieses Prinzip ist in einer Reihe von differenzierten Untersuchungen genauer beschrieben worden. Eine wichtige Theorie in diesem Zusammenhang ist die Theorie der doppelten Enkodierung von A. Paivio [100]. Zentral ist hierbei die Hypothese, dass es zwei verschiedene kognitive Darstellungen für verbale und nicht-verbale Informationen gibt:

- Verbaler Kanal: Das verbale System verarbeitet sprachliche Informationen. Die Verarbeitung erfolgt sequentiell. Die Einheiten, in denen Informationen gespeichert werden, bezeichnet man als *Logogene*.
- Imaginativ-Piktorialer Kanal: Das visuelle System verarbeitet Bildinformationen. Verallgemeinert gesprochen ist dieser Kanal auch für alle weiteren nicht-verbale

Informationen zuständig, wie Tast- und Geruchssinn. Der nicht-verbale Kanal arbeitet nichtlinear und kann verschiedene Dimensionen desselben Gegenstandes (z.B. Form, Farbe, Geruch) gleichzeitig verarbeiten. Die Speicherung erfolgt in *Imagenen*.

In der populärwissenschaftlichen Literatur wird gerne die rechte und linke Hirnhälfte in Verbindung mit dem rationalen und emotionalen Zugang gebracht, und somit auch mit dem verbalen Kanal und dem imaginativ-visuellen Kanal. Diese vereinfachte Vorstellung ist allerdings nicht genug untermauert. Wie Bedeutung tatsächlich im Gehirn repräsentiert wird, lässt sich nicht in dieser einfachen Form beschreiben. Zwar haben bereits im 19. Jahrhundert Physiologen durch Untersuchung von Unfallopfern festgestellt, dass die linke Hirnhälfte für die grundlegende Sprachfunktion zuständig ist (die sogenannten Wernicke und Broca-Areale). Aber auch für den Tastsinn gibt es eine innere Landkarte, bei der benachbarte Bereiche der Haut auf benachbarte Neuronengruppen im Großhirn abgebildet werden. Ebenso werden Geräusche nach Frequenzen und Amplituden analysiert und abgebildet. Das tatsächliche bewusste Verstehen wird aber nicht auf dieser Ebene, sondern durch Kommunikation zwischen den Hirnarealen ermöglicht. Die Aufteilung in verbale und imaginative Informationen ist eine hilfreiche Modellvorstellung, die nicht an die Lokalisierung von grundlegenden Hirnfunktionen auf bestimmte Areale gebunden werden sollte.

Das Multimedia-Prinzip kann durch das gleichzeitige Ansprechen vom verbalen Kanal und dem imaginativ-visuellen Kanal motiviert werden. Bilder, die nur relevante Informationen enthalten und zudem gut auf den erläuternden Text abgestimmt sind, zeigen bei Schülern einen positiven Effekt [84].

## **Arbeitsgedächtnis und Langzeitgedächtnis**

In Abb. 1.2 zeigen wir das Modell von Schnotz [120], das die Verarbeitung von Informationen im Arbeitsgedächtnis und im Langzeitgedächtnis darstellt. In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass Texte und Bilder im Gehirn getrennt verarbeitet werden. Es gibt ein auditives und ein visuelles Arbeitsgedächtnis, deren Inhalte mit bereits bestehenden mentalen Modellen verglichen werden, die aus dem Langzeitgedächtnis heraus aktiviert werden und zu einer verbalen und einer visuellen Repräsentation führen, die miteinander interagieren und sich gegenseitig stützen. Ein Geräusch, z.B. die Stimme von einer Person am Telefon, kann aufgrund von Vorwissen aus dem Langzeitgedächtnis zu einer bildhaften Vorstellung bzw. einem mentalen Modell der betreffenden Person führen. Ebenso kann z.B. ein Photo auch zu einer verbalen Repräsentation führen, bei der der Klang der Stimme und bestimmte Worte der betreffenden Person reaktiviert werden. Das auditive Arbeitsgedächtnis alleine kann also ebenso wie das visuelle Arbeitsgedächtnis alleine ein komplettes kognitives Schema aktivieren. Das Multimedia-Prinzip besagt, dass die Aktivierung eines vollständigen kognitiven Schemas durch Sinneswahrnehmungen sowohl des auditiven und des visuellen Kanals unter bestimmten Voraussetzungen beim Lernen von Vorteil ist. Ausgehend von eigenen Studien und Literaturstudium hat Mayer eine Reihe von lernförderlichen Komponenten für eine multimediale Lernumgebung ge-

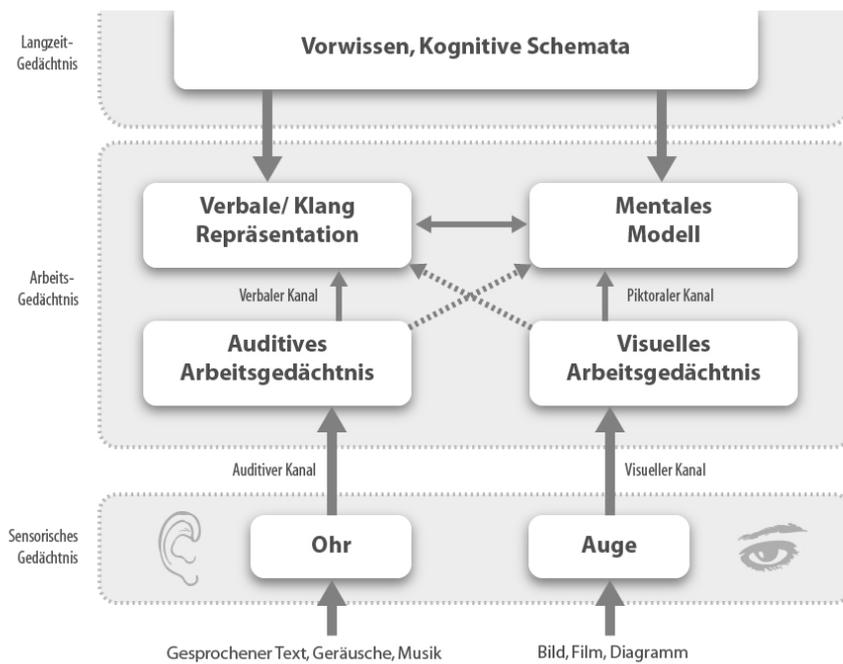


Abbildung 1.2: Multimedia-Modell, frei nach Schnotz [120]. Die abstrakte, sprachliche Repräsentation und die imaginativ-bildhafte werden im Gehirn parallel verarbeitet. Der Lernerfolg kann durch gleichzeitiges Ansprechen beider Kanäle verbessert werden.

funden [83]. In Abb 1.3 zeigen wir unsere Zusammenschau dieser und weitere Arbeiten. Das Multimedia-Prinzip steht im Spannungsfeld zwischen Kontextbezug und Sachbezug einerseits, und zwischen hoher Interaktivität und nicht beeinflussbarer Strukturierung der Lernumgebung andererseits. Was gut oder schlecht ist, kann erst entschieden werden, wenn das Zielpublikum und das zu erreichende Ziel definiert sind. In den vier Ecken stehen mögliche Effekte, die eine solche Lernumgebung tendenziell haben kann, allerdings sind hier aufgrund der Komplexität des Lernvorgangs keine einfachen oder pauschalen Antworten möglich, sondern nur die Angabe möglicher Tendenzen.

## Kognitive Überlastung

Eine mögliche Gefahr von Multimedia-Produktionen ist die kognitive Überlastung [122]. Sweller definiert beim Lernprozess drei verschiedene Beanspruchungen des Lernenden:

- Die extrinsische kognitive Belastung, die durch überflüssige und irrelevante Informationen, Wiederholungen und Verweise gekennzeichnet ist.

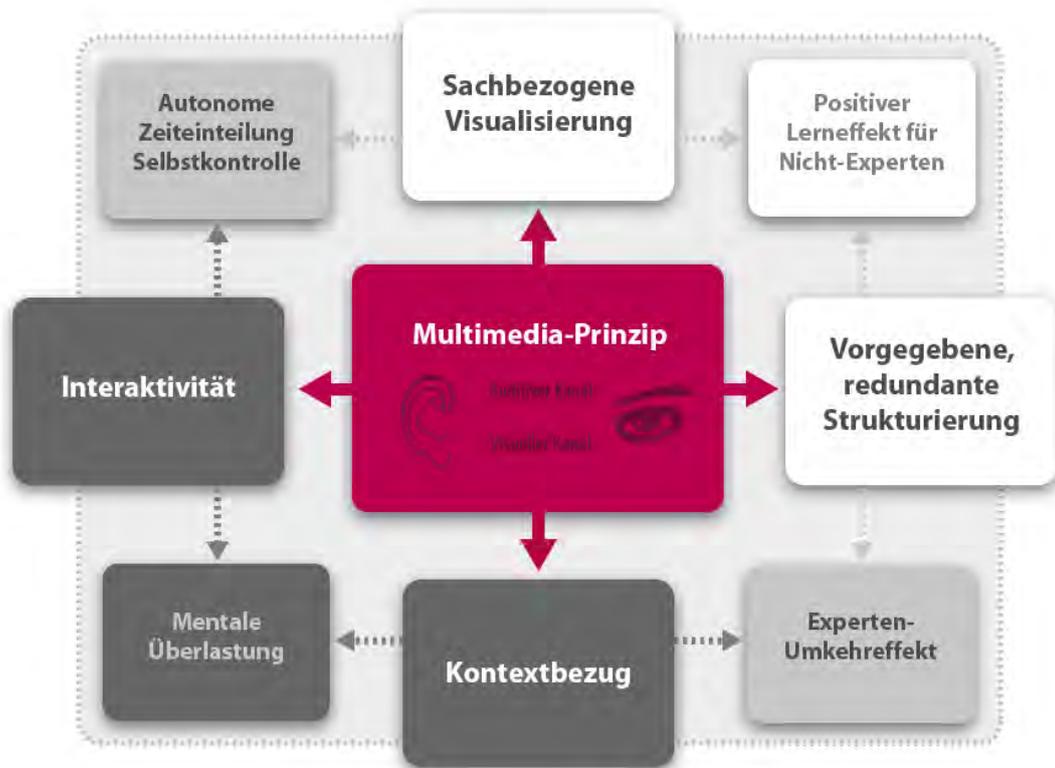


Abbildung 1.3: Die Dimensionen 'Interaktivität oder vorgegebene Struktur' (x-Achse) sowie 'Sachbezug oder Kontextbezug' (y-Achse) ergeben die in den vier Ecken abgebildeten Tendenzen bei der Gestaltung einer Multimedia-Lernumgebung.

- Die intrinsische kognitive Belastung, die durch die Komplexität des zu lernenden Stoffes gegeben ist und nicht veränderbar ist.
- Die lernbezogene kognitive Belastung, die mit dem tatsächlich zu lernenden Inhalt und dem Vorwissen des Lernenden zu tun hat.

Mentale Überlastung kann durch verschiedene Auslöser erzeugt werden. Bilder, die nur dekorativ sind, oder wenig relevante Informationen enthalten, bringen den positiven Effekt des Ansprechens von zwei Lernkanälen in Gefahr [121]. Somit kann Kontextbezug beim Lernen auch negativen Einfluss haben, da zu viele irrelevante und ablenkende Bilder das Arbeitsgedächtnis überlasten (siehe Abb 1.3, unten links). Ein weiterer möglicher Trigger für mentale Überlastung kann zu viel Interaktivität der Lernsoftware sein [93], [62]. Besonders interessant im Zusammenhang mit mentaler Überlastung

ist eine Beobachtung, die als Experten-Umkehreffekt bezeichnet wurde [63], [120]. Eine Lernumgebung, bei der Bild- und Tonebene gut aufeinander abgestimmt sind und die für Anfänger positive Lernergebnisse zeigt, kann bei Experten zu genau dem umgekehrten Effekt führen: Die Redundanz in der Information wird beim Experten als störend empfunden, die zu hohe Ausführlichkeit wirkt sich negativ aus. Die mentale Überlastung ergibt sich in diesem Fall nicht aus intellektueller Überforderung, sondern aus der Notwendigkeit, die redundante Information 'wegzufiltern', um bereits vorhandene kognitive Schemata nicht beim Wiedererkennen derselben Information in verschiedenen Repräsentationsformen belasten zu müssen<sup>1</sup>. Hier zeigt sich sehr deutlich, dass es bei der Entwicklung einer Lernumgebung darauf ankommt, die Zielgruppe genau zu definieren, und sich die Expertenmeinung nicht unbedingt mit dem decken muss, was für das Zielpublikum angemessen ist.

## **Animation oder Standbild?**

Durch die wachsende Rechenkapazität von Computern ist es technisch gut möglich, aufwändige Animationen zu realisieren. Aber sind Animationen lerntheoretisch Standbildern überlegen? Und wenn ja, welche zusätzlichen Parameter spielen dabei eine Rolle? Diese Fragen wurden in einer Meta-Analyse von insgesamt 26 Studien zu diesem Thema von T. Höffler untersucht [58], die wir hier kurz zusammenfassen wollen. Die Untersuchungen beschränken sich nicht allein auf Physik, sondern umfassen auch Themen aus Biologie, Chemie und dem Militär. Die Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen: Über alle Studien gemittelt und ohne Unterteilung in weitere Subkategorien ergibt sich durch Animationen eine moderate Verbesserung der Lernleistung im Vergleich zu Standbildern. Die Ergebnisse werden signifikant, wenn genauer differenziert wird. Die Analyse bestätigt, dass Animationen, die repräsentational sind, Standbildern überlegen sind, wenn die Bewegung dem tatsächlich zu lernenden Sachverhalt entspricht. Animationen, die dekorativ sind, führen im Mittel zu keiner Verbesserung gegenüber Standbildern. Für die Berechnung und Angabe von Effektstärken verweisen wir auf [58]. Eine weitere wichtige Frage betrifft den Grad des Realismus der Animation. Hier ist festzustellen, dass Animationen mit niedrigem Realismus nicht zwangsläufig zu niedrigeren Lernerfolgen führen. Im Sinne von Sweller gilt es, möglichst wenig extrinsische kognitive Belastung zu erzeugen. Wenn es allerdings darum geht, zum Beispiel komplizierte Bewegungsabläufe der Hand beim Bedienen einer Maschine darzustellen, kann eine videobasierte Darstellung einer Computeranimation überlegen sein. Das Ergebnis der Metastudie zeigt, was von vielen Entwicklern auch intuitiv erkannt wurde: Gute Bilder erzeugen wenig überflüssige kognitive Belastung und haben den Grad an Realismus, der dem Problem angemessen ist.

Als Nebeneffekt der Metastudie wurde sozusagen die 'Umkehrung' des Multimedia-

---

<sup>1</sup>Dieser Effekt wurde von mir persönlich auch schon bei Präsentationen der DVD-ROM erlebt. Während Schüler und Lehrer die vorliegende DVD-ROM überwiegend positiv bewerteten, wurde von Experten nicht selten die Frage gestellt, warum Inhalte, die man auch auf wenigen Seiten in einem Lehrbuch wie dem Sakurai [107] finden kann, hier mit soviel Aufwand präsentiert werden. Die Bilder wurden als überflüssig kritisiert und der damit verbundene Aufwand als sehr hoch [53].

Prinzip gezeigt: Texte in Kombination mit Bildern führen zu einem größeren Lernerfolg als Texte alleine, und ebenso gilt, dass Bilder in Kombination mit Texten zu einem größeren Lernerfolg führen als Bilder allein. Zusammenfassend läßt sich sagen, dass Animationen besser sind als ihr Ruf: Nach der ersten Multimedia-Euphorie der 1980iger Jahre und der notwendig folgenden Ernüchterung kann durch Studien bestätigt werden, dass passend eingesetzte Animationen signifikant lernförderlich sind.

Eine gute Lernumgebung kombiniert Text- und Animationssequenzen, und beschränkt sich bei den Bildern auf die für das Verständnis wesentlichen Punkte. Es ergibt sich das Problem, dass Animation und Text nicht gleichzeitig betrachtet werden können. Eine Lösung besteht darin, den Text von einem Sprecher vorlesen zu lassen. Das Resultat von diesem Ansatz könnten kurze Filmsequenzen sein, die jeweils in einigen Minuten ein bestimmtes Thema erläutern. Die Filmsequenzen könnten auf der DVD-ROM einzeln angesteuert werden. Um einen Kontextbezug zu erhalten, sollten die physikalischen Themen in eine Rahmenhandlung eingebettet werden. In der Tat entsprach unser erstes Konzept für eine DVD-ROM zum Thema Quantenphysik diesem AI-nahen Ansatz. Die eigentlichen Inhalte, z.B. zur Wahrscheinlichkeitstheorie, wurden durch die Charaktere Alice und Bob in einer Zeichentricksequenz in einer Rahmenhandlung erlebt. Im Anhang zu dieser Arbeit ist das vollständige Storyboard zu den einzelnen physikalischen Themen dokumentiert<sup>2</sup>. In unseren Pilotstudien konnten wir allerdings erkennen, dass dieser Ansatz nicht funktioniert hat, siehe Abschnitt 5.1. Lerntheoretisch formuliert ist der Gegenspieler zum Kontextbezug nach Sweller die extrinsische kognitive Belastung, die zur mentalen Überlastung aufgrund von überflüssigen und irrelevanten Informationen führen kann. Der Vorteil von Kontextbezug ist die Fähigkeit, den gelernten Inhalt in der Lebenswelt wiederzuentdecken und anzuwenden. Der Nachteil ist die Ablenkung vom eigentlichen Sachthema. Hier gilt es, die richtige Balance zu finden.

## Kontextbezug oder Sachbezug?

Der neue Ansatz, der in der Pilotstudie positiv evaluiert wurde und auf der DVD-ROM nun tatsächlich realisiert ist, trennt Kontextbezug und die eigentlichen Inhalte voneinander. Es wurde ein Spielfilm produziert, der nicht wie im ursprünglichen AI-Ansatz bereits die Lösungen zu den physikalischen Fragestellungen enthält, sondern diese nur andeutet und künstlerisch umsetzt. Der Film für sich ist unterhaltsam und bietet visuelle Ankerpunkte. Das Problem der kognitiven Überlastung kann nicht auftreten, da es gar nicht darum geht, rationales Verständnis zu erzeugen, sondern Emotionen. Die Bedeutung von Emotionen für das Lernen wird auch aus der Perspektive der Erziehungswissenschaft diskutiert. Schirp weist darauf hin, dass 'emotionale Zugänge messbar schneller ablaufen als unsere kognitiven, reflektierenden' [109]. Sinneswahrnehmungen werden nur zu einem Bruchteil bewusst wahrgenommen, ein wesentlicher Teil beim Aufbau eines emotionalen Musters spielt sich im Unterbewusstsein ab. Die Motivation eines Schülers, sich rational z.B. einem physikalischen Problem zu nähern, wird stark von unbewussten und emotionalen Momenten gesteuert. Da emotionale Prozesse schneller als rationale

---

<sup>2</sup>Das PDF-Dokument 'Zeichentrickstory der Lernstationen' befindet sich im elektronischen Anhang.

ablaufen, ist eine Lernumgebung, die beide Ebenen anspricht, für die Motivation von großer Bedeutung.

Im eigentlichen Lern-Teil der DVD-ROM wird hingegen komplett auf Kontextbezug verzichtet, es wird lediglich ein kurzes Filmzitat als Einleitung genutzt, um dann in erklärenden Animationen auf den eigentlichen, physikalischen Inhalt einzugehen. Rationales, mathematisches Verstehen und Intuition werden nicht durch gemeinsamen Kontext, sondern durch die Nutzung identischer Bildsymbolik miteinander verknüpft. Die kreative Variation der Bilder wird im Spielfilm, die streng mathematische Interpretation derselben Bilder im DVD-ROM Teil realisiert, siehe Abb. 1.4.

## **Interaktiv oder vorgegebene Strukturierung?**

Ein weiterer wesentlicher Punkt der DVD-ROM ist die *minimale* Interaktivität: Der Nutzer kann die Animationen selber steuern und bei Bedarf wiederholen und anhalten, und unabhängig davon auch den gelesenen Text wiederholen oder stoppen. Auch hier ist wieder die Waage zu halten zwischen der Gefahr der Überforderung durch zu viele Wahlmöglichkeiten bei der Menüführung, und dem Vorteil, den die Steuerung der Lerngeschwindigkeit für Verständnis und Motivation hat. Bereits Skinner hat im Jahr 1954 auf den Vorteil von einem steuerbaren Lernprogramm hingewiesen [118]. Dieses sogenannte self-pacing sollte allerdings minimal sein, dem Nutzer zu jedem Zeitpunkt also nur die Wahl VOR, ZURÜCK, PLAY und STOPP geben. Verschiedene Studien konnten zeigen, dass mehr Steuerelemente keinen positiven Effekt haben [93], [62].

Das grundsätzliche Konzept, Kontextbezug in einem Spielfilm und Lerninhalte in minimal interaktiven, rein repräsentationalen Animationen mit einer geringen extrinsischen kognitiven Belastung, also insbesondere frei von Kontexten, zu gestalten, ist nun erstmalig auf der DVD-ROM *Quantendimensionen* umgesetzt (siehe auch Abb. 6.2). Dieses Grundprinzip kann auf ganz verschiedene Lerninhalte angewendet werden, auch über die hier betrachtete physikalische Themenstellung hinaus. Voraussetzung ist allerdings, geeignete Bildmotive zu finden, die sich in Variationen sowohl in einer Spielfilmhandlung, als auch als mathematische Visualisierungen nutzen lassen.

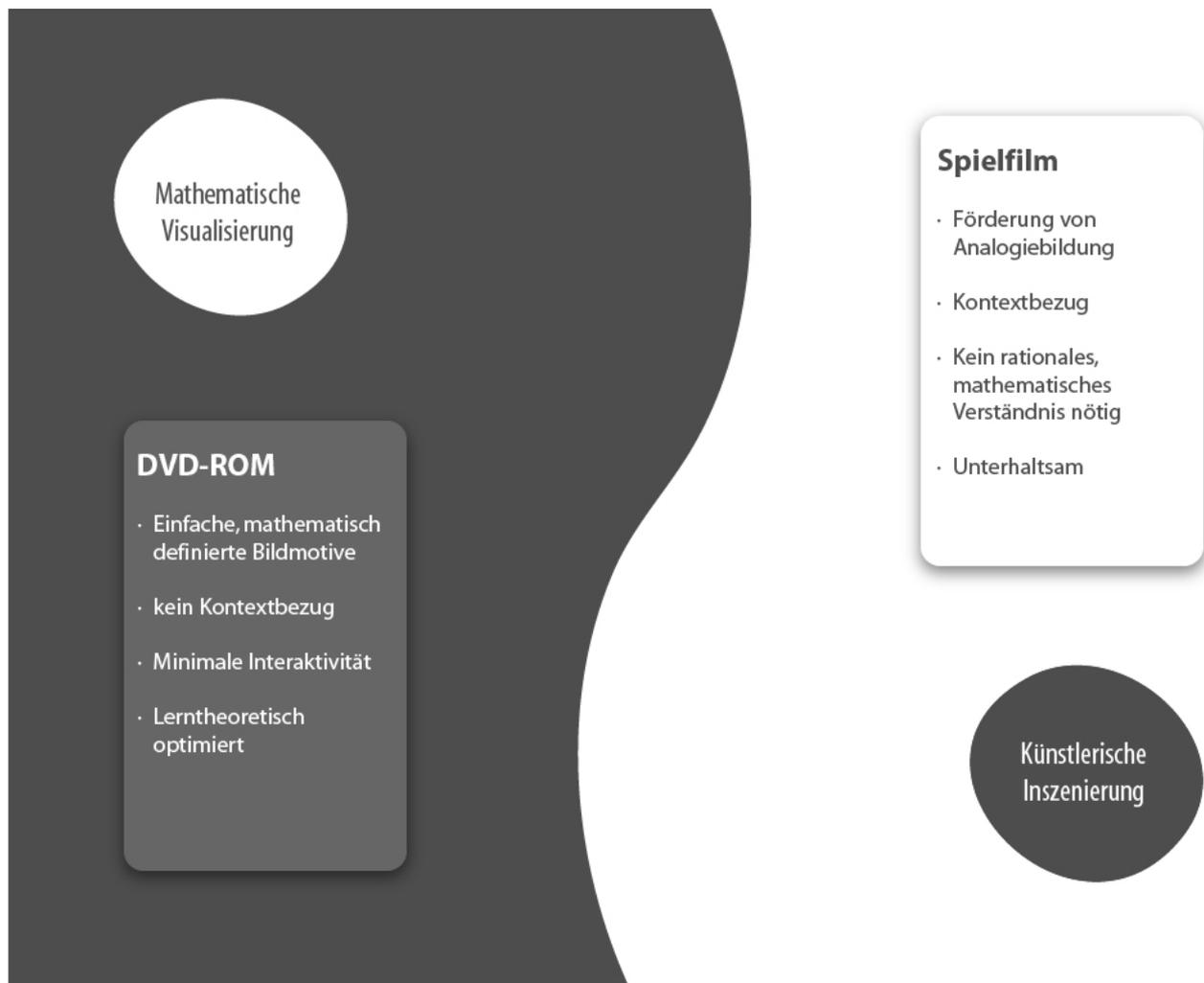


Abbildung 1.4: Der Sciencemotion-Ansatz: Sachbezug und Kontextbezug sind zwar klar voneinander getrennt, gehören aber doch zusammen. Die DVD-ROM (links) beinhaltet in einzelnen Lernstationen mathematisch fundierte Visualisierungen von Theorie und Experiment. Für das Beispiel Quantenphysik sind die Bildmotive in Abb. 3.4 definiert. Im Spielfilm (rechts) werden *dieselben Bildmotive* ästhetisch ansprechend inszeniert und in einen Kontext eingebettet. Ein konkretes Beispiel hierzu ist in Abb. 6.2 zu sehen.

## 2 Physikdidaktik als Übersetzungsaufgabe

### 2.1 Repräsentationsebenen in der Physik

Das Schulfach Physik gilt bei vielen Schülern als unbeliebt [126]. Schon der gesunde Menschenverstand reicht aus, um eine mögliche Ursache zu erkennen: Die Argumentationskette, die von Beobachtungen und Experimenten zur Erklärung führt, ist lang und im allgemeinen abstrakt. Betrachten wir als ein Beispiel den elektrischen Strom. In der Mittelstufe wird das Ohm'sche Gesetz  $R = \text{konst.}$  untersucht. Die Messgrößen Spannung und Strom lassen sich im Experiment an Messgeräten zwar ablesen, und daraus auf den Widerstand schließen, aber die eigentliche Physik bleibt dabei vollkommen im Verborgenen: Die Dynamik von Elektronen im Draht ist im Schulexperiment nicht zu sehen. Von den Schülern wird verlangt, sich diesen unsichtbaren physikalischen Mechanismus *vorzustellen*. Es besteht die Gefahr, dass ein phänomenologisches Gesetz ohne tiefere Erklärung als gegeben angenommen wird, um dieses dann gleich zu verallgemeinern, im Falle des Ohm'schen Gesetzes zu Reihen- und Parallelschaltung. Wenn doch der physikalische Mechanismus erklärt werden soll, hat man es mit einer Reihe von Modellvorstellungen zu tun, die sich zum Teil widersprechen oder nicht verallgemeinerbar sind. Wird der Gleichstrom mit einem Wasserkreislauf verglichen, ist dies ein sinnvolles Bild, das allerdings bei der Analogie zum Wechselstromkreis sofort wieder versagt. Die Induktivität der Spule findet hier keine Entsprechung. Für Schüler, die sich nicht intensiv und über viele Jahre mit den einzelnen physikalischen Themen befassen, besteht die Gefahr, dass physikalische Erklärungen einem Flickenteppich mit vielen Löchern gleichen, und aufgrund fehlenden Verständnisses für die physikalischen Mechanismen Frustration entsteht beim Anwenden von 'Naturgesetzen' wie  $R = \text{konst.} = U/I$  auf Rechenaufgaben zum Ohm'schen Widerstand.

Dem gegenüber stehen weit entwickelte theoretische Konzepte und hochpräzise Experimente, die weit über alle Themen des heutigen Schulstoffes hinaus zu einem sehr fundierten Verständnis von Themen wie etwa dem Ladungstransport in Festkörpern geführt haben. Von der klassischen Drude-Theorie bis zur modernen Festkörperphysik stehen eine Reihe von guten Ansätzen auf verschiedenen Schwierigkeitsgraden zur Verfügung. Sicherlich gibt es hier auch noch eine Reihe von offenen Punkten, die Thema aktueller Forschung sind. Um Physik nicht zu naturwissenschaftlichem Geschichtsunterricht verkommen zu lassen, wäre es gut und wichtig, auch Dinge, die noch *nicht* verstanden sind, im Unterricht zu behandeln. Abgesehen von dem Problem der Bewertbarkeit von kollektivem Unverständnis stellt sich hier umso mehr die Frage, was eigentlich *verstehen*

im tieferen Sinn bedeutet. Wenn ein Schüler in der Lage ist, in einer Parallelschaltung den Gesamtwiderstand  $R_g$  als

$$R_g = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.1)$$

zu berechnen, ist dies zunächst ein Nachweis von Fähigkeiten in elementarer Bruchrechnung und nicht unbedingt in physikalischem Denken. Die Beliebtheit solcher Aufgaben in Physikklausuren ist sicherlich zum Teil auch in der einfachen Bewertbarkeit in den Kategorien 'richtig' und 'falsch zu suchen.' Eine deutlich physikalischere Fragestellung wäre zum Beispiel 'Bilde den Grenzwert  $R_1 \rightarrow \infty$  und deute das Ergebnis physikalisch'. Eine solche offene Fragestellung läßt ein breites Spektrum an möglichen Antworten zu, auch wenn das mathematische Ergebnis des Grenzwertes eindeutig ist. Die eigentlich physikalische Fragestellung wäre: 'Abgesehen von allen Details des Aufbaus dieser Schaltung wie Reihen- oder Parallelschaltung, was ist die physikalische Ursache dafür, dass der Ohmsche Widerstand konstant ist?'. Es ist erstaunlich, dass in den Schulbüchern zu diesem Thema wenig zu finden ist, obwohl zumindest das klassische Bild der Drude Theorie elementar genug für den Schulunterricht wäre.

Schon an diesem einfachen Beispiel zeigen sich verschiedene Repräsentationsebenen eines physikalischen Sachverhalts: Zum einen das Experiment, zum anderen die Theorie. Das Schulexperiment ist nicht in der Lage, den Ladungstransport einzelner Elektronen zu untersuchen. Stattdessen sind kollektive Phänomene sehr vieler Elektronen Gegenstand der Untersuchung, bei der letztlich Erwartungswerte von Strom und Spannung als Messgrößen zugänglich sind. Die Theorie wiederum kann ebenfalls unterteilt werden in die Phänomenologie, bei der makroskopische, gemittelte Größen miteinander in Beziehung gestellt werden, und in ein mikroskopisches Bild, das vom einzelnen Elektron ausgeht. Fundamentale Naturgesetze, die der Grundpfeiler des modernen Verständnisses der Physik sind, beziehen sich auf die mikroskopische Ebene. Die indirekten Auswirkungen auf gemittelte, makroskopische Messgrößen entsprechen dem der Schulphysik zugänglichen Teil davon. Wenn zur Erklärung nur die Phänomenologie verwendet wird, kann ein tieferes physikalisches Verstehen, oder zumindest das Verständnis, wie physikalische Erklärungen im Prinzip funktionieren, sich nicht einstellen.

## Die phänomenologische und die mikroskopische Beschreibung

Guter Physikunterricht muss also in der Lage sein, auch eine mikroskopische Erklärung mit einzubeziehen. Eine rein mathematische Repräsentation würde das Ziel vollkommen verfehlen. Stattdessen können Analogien und Visualisierungen verwendet werden. Beide Ansätze stellen einen Kernpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Es ist nicht leicht, gute Analogien und Visualisierungen zu finden. Sehr schnell ergibt sich die Gefahr von Fehlvorstellungen. Nehmen wir in diesem konkreten Beispiel das Drude-Modell als Ausgangspunkt,

$$eE = m \frac{d\langle v_D \rangle}{dt} - \frac{m}{\tau} \langle v_D \rangle. \quad (2.2)$$

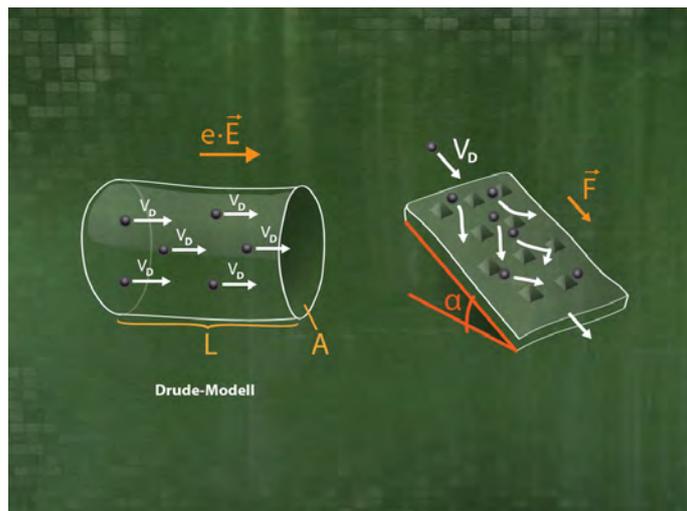


Abbildung 2.1: Das Drudemodell beschreibt den Ladungstransport in einem Metall durch frei bewegliche Ladungsträger, die durch das elektrische Feld beschleunigt und durch Stöße abgebremst werden. Es ergibt sich eine konstante Driftgeschwindigkeit  $v_D$ . Rechts: In Analogie dazu bewegen sich Murmeln auf einer schiefen Ebene und werden an Hindernissen abgebremst.

Hier bezeichnet  $\langle v_D \rangle$  die zeitlich gemittelte Driftgeschwindigkeit des Elektrons,  $E$  das elektrische Feld im Draht,  $m$  die (effektive) Masse des Elektrons und  $\tau$  die Relaxationszeit. Die Relaxationszeit ist die Zeitskala, die die Größenordnung der Zeit zwischen zwei Streuprozessen des Elektrons angibt. Der Term  $\frac{m}{\tau} \langle v_D \rangle$  entspricht dem 'Reibungsterm'. Im stationären Fall ergibt sich  $\langle v_D \rangle = (e/m)\tau E$  für die Driftgeschwindigkeit. Da  $\langle v_D \rangle \propto I$  und  $E \propto U$ , ergibt sich  $I \propto U$ , also das Ohm'sche Gesetz  $U/I = \text{konst.}$ , aus der Konstanz der gemittelten Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Der Übergang zu den makroskopischen, gemittelten Variablen erfolgt über  $I = en \langle v_D \rangle A$  und  $U = EL$ , wobei  $A$  der Querschnitt des Drahtes,  $n$  die Elektronendichte und  $L$  die Länge des Drahtes ist, wie in Abb. 2.1 definiert. Es folgt

$$I = \frac{e^2 n \tau}{m} \frac{A}{L} U \quad (2.3)$$

und somit für den Widerstand  $R = \frac{m}{e^2 n \tau} \frac{L}{A}$ . Für Kupfer bei Raumtemperatur beispielsweise ist die Konzentration an freien Ladungsträgern  $n = 8.5 \times 10^{22} \frac{1}{\text{cm}^3}$  und die Relaxationszeit  $\tau = 2.5 \times 10^{-14} \text{s}$ . Eine schultaugliche Analogie zur Drude Theorie ist in Abb. 2.1 zu sehen. Murmeln fließen auf der schiefen Ebene nach unten und werden an Streuzentren gestreut. In der Analogie wird die elektrische Kraft  $eE$  durch die Gravitationskraft  $mg \sin \alpha$  ersetzt,

$$mg \sin \alpha = m \frac{d\langle v_D \rangle}{dt} - \frac{m}{\tau} \langle v_D \rangle. \quad (2.4)$$

In [105] wurde dieses Modell genauer untersucht und diskutiert, und auch Erweiterungen bis zum Ladungstransport einzelner Elektronen vorgestellt. So passend das Modell auch zu sein scheint, hat es doch auch einige Tücken: Wenn die Murmeln aufgrund ständiger Stöße im Mittel mit konstanter Driftgeschwindigkeit die schiefe Ebene herunterrollen, besteht die Gefahr der Fehlvorstellung, dass sich ganz analog auch die einzelnen Elektronen mit Driftgeschwindigkeit bewegen. Tatsächlich bewegen sich die Elektronen mit Fermigeschwindigkeit  $v_F$ . Für das Beispiel Kupfer ist  $v_F = 1.56 \times 10^6 \frac{m}{s}$ , während die mehr als eine Millionen mal langsamere Driftgeschwindigkeit bei Raumtemperatur nur von der Größenordnung  $v_D \simeq 0.5 \frac{m}{s}$  ist. Eine mögliche Analogie hierzu wäre Wärmediffusion in einem Gas: Die mittlere Geschwindigkeit des einzelnen Gasmoleküls beträgt nahezu Schallgeschwindigkeit, trotzdem ist die gemittelte Geschwindigkeit bei konstanter Temperatur Null. Erst bei einem Temperaturgradienten innerhalb des Gases ergibt sich eine von Null verschiedene Driftgeschwindigkeit. Wenn wir wieder zur Analogie der Murmeln auf der schiefen Ebene kommen, repräsentiert die einzelne Murmel also nicht ein Elektron, sondern den mittleren Ladungstransport durch den Leiter.

Zu der Zeit, als die Drude-Theorie (um 1900) entwickelt wurde, war noch nicht bekannt, dass Elektronen im Leitungsband sich mit Fermigeschwindigkeit bewegen, die von der Größenordnung einiger Prozent der Lichtgeschwindigkeit ist. Trotzdem hat die Theorie gut funktioniert, da aufgrund der Mittelung diese zufällige Bewegung mit Fermigeschwindigkeit irrelevant für den gemessenen Ladungstransport wird. Die Erweiterung um Erkenntnisse der Quantentheorie ist seit etwa 1930 bekannt. Die Forschung zum Thema Quantentransport in der Mesoskopik ist bis heute ein aktuelles Gebiet [50], [89].

Im Schulunterricht besteht allerdings wie schon erwähnt die Tendenz, nicht die physikalischen Ursachen, sondern Variationen der Phänomenologie, also Rechnungen mit zeitlich gemittelten, makroskopischen Observablen wie Strom und Spannung zum Thema zu machen. Solange es sich um anwendungsbezogene Themen wie Reihen- und Parallelschaltungen handelt, ist die Bedeutung dieser Aufgaben ohne Zweifel gegeben. Allerdings sollte dabei die Stärke der Physik, phänomenologische Zusammenhänge auch mikroskopisch zu erklären, nicht unbeachtet bleiben.

Entscheidend ist hier die Frage, mit welchen Repräsentationsebenen physikalischer Themen es möglich ist, Schüler im modernen Medienzeitalter tatsächlich zu erreichen. Hierbei geht es nicht nur um die Schüler, die Physik studieren wollen, sondern vor allem um solche, die sich durch die bislang genutzten Repräsentationsebenen nicht angesprochen fühlen, und nur mit Mühe einen Zugang zu den abstrakten Begriffen der Physik entwickeln.

Im folgenden Beispiel soll aufgezeigt werden, wie vielschichtig Repräsentationen sein können, und welche neuen Möglichkeiten sich daraus für die Physikdidaktik ergeben.

## 2.2 Repräsentationsebenen in der Musik

Musik hat zunächst auch einen physikalischen Aspekt. So wird Schall von einem Instrument erzeugt, und durch ein Gas transportiert. Im Ohr des Hörers wird in der Schnecke die Schwingung in elektrische Signale verwandelt, die in einem komplexen Ablauf bewußt wahrgenommen werden. Wir betrachten nun eine schwingende Saite als Beispiel. Der Ton einer schwingenden Saite der Länge  $L$  kann als ein Gemisch der Obertöne mit Frequenzen  $f_n$  wie

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \sin(2\pi f_n t) \quad (2.5)$$

beschrieben werden. Hierbei bezeichnet  $a_n(t)$  zeitabhängige Amplituden,  $f_n = (n+1)\frac{c}{2L}$  den  $n$ -ten Oberton und  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwingung auf der Saite. Die Vorstellung, eine musikalische Komposition in Formeln auszudrücken, erscheint zunächst ungewohnt. Auf den zweiten Blick haben beide Repräsentationen einiges gemeinsam. So hat es sich in der Notenschrift zur Codierung eines Tons durchgesetzt, nur die Grundfrequenz  $f_0 = \frac{c}{2L}$  anzugeben. Eine Melodie wird als eine Folge von Grundfrequenzen  $f_0^1, f_0^2, f_0^3, \dots$  codiert, siehe auch Abb. 7.14. Durch jedes Instrument, durch jeden Musiker wird diese vorgegebene Folge anders interpretiert, was den Reiz dieser Aufführung ausmacht. In der westlichen Musik hat sich die naheliegende, aber nicht zwingende Aufteilung der Oktave in 12 Teile durchgesetzt. Die physikalische Ursache hierfür ist im Frequenzverhältnis  $v_0/v_1 = 1 : 2$  der Oktav und  $v_1/v_2 = 2 : 3$  der reinen Quint zu suchen. Gehen wir vom Grundton  $f_0$  aus, so gelangen wir nach 7 Oktaven zum Ton mit Frequenz  $2^7 f_0 = 128 f_0$ . Nach 12 reinen Quintschritten ergibt sich fast derselbe Ton,  $(\frac{3}{2})^{12} f_0 = 129.7 f_0$ . Wenn die Quinte leicht verstimmt wird, und nicht als Frequenzverhältnis  $3 : 2 = 1.5$ , sondern als  $128^{1/12} = 2^{7/12} \simeq 1.498$  definiert wird, ergeben sich nach 12 Quinten genau sieben Oktaven - der Kreis schließt sich. So ergibt sich der Quintenzirkel. Der Quintenzirkel in dieser sogenannten wohltemperierten Stimmung ist rotationsinvariant; jede Tonart ist gleichberechtigt. Dadurch ergibt sich eine Aufteilung des Klangraumes der Oktave in zwölf Halbtöne, entsprechend den 12 Tonarten. Gehen wir von A1 mit Grundfrequenz  $f_0 = 55\text{Hz}$  aus, so ist in wohltemperierter Stimmung die Grundfrequenz des  $k$ -ten Halbtons gegeben durch

$$f_0^k = 2^{k/12} f_0. \quad (2.6)$$

Durch diese Diskretisierung des Frequenzspektrums ergibt sich eine Zuordnung der Klaviertasten mit Bezeichnung  $k = 0, 1, 2, \dots$  zu den Grundschwingungen  $f_0^k$ . Die physikalische Obertonreihe wird durch die Tastenfolge  $\{12, 19, 24, 28, 31, 34, 36, 38, 40\}$  am besten abgebildet, wie an folgender Tabelle zu sehen ist:

Oberton	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Obertonfrequenz	55	110	165	220	275	330	385	440	495	550
Tastenfrequenz	55	110	164.8	220	277.2	392.6	392	440	495	550
Tastenummer	0	12	19	24	28	31	34	36	38	40
Name	A1	A	e	a	cis	e1	g1	a1	h1	cis2

Der Vorteil der wohltemperierten Stimmung ist, dass von jedem beliebigen Grundton  $f_0$  ausgehend die Verschiebung zwischen dem physikalischen Obertonspektrum und der Tastenfolge  $\{12, 19, 24, 28, \dots\}$  identisch ist. Wir können aufgrund der Rotationsinvarianz jeder Taste willkürlich die Zahl 0 zuordnen, und wegen

$$f_0^{k+m} = 2^{(k+m)/12} f_0 = 2^{k/12} (2^{m/12} f_0) \equiv 2^{k/12} \hat{f}_0 \quad (2.7)$$

den neuen, um  $m$  Tasten verschobenen Grundton  $\hat{f}_0 \equiv 2^{m/12} f_0$  als Basis wählen. Hierbei kann  $m$  positiv oder negativ sein. Die Analyse von Musik aus physikalischer Sicht ist durch die Entwicklung der kostenlosen software SOUNDS durch A. Voßkühler [96], [129] für den Schulunterricht mit wenig Aufwand möglich geworden. Ein exemplarisches Anwendungsbeispiel einer mathematischen Analyse von Musik ist im Anhang 7.7 gegeben.

## Logogene und Imagene in der Musik

Auch wenn die mathematisch-physikalische Analyse ihren Reiz hat, so ist der eigentliche Zweck der Musik das unmittelbare emotionale Klangerlebnis. Auch die Notenschrift ist einfach nur ein praktisches Speichermedium, eine Repräsentationsebene, die die Weitergabe einer Komposition, auch über Jahrhunderte, ermöglicht. Das Besondere an der Aufführung ist die Tatsache, dass eine Melodie unmittelbar und emotional den Menschen berührt. In der Musik lassen sich die verschiedenen Stufen des Verstehens besonders klar trennen: Es gibt die Stufe des Publikums, des Musikers, und des Komponisten. Um Musik zu hören, bedarf es keiner weiteren technischen Fähigkeit wie dem Erlernen von Notenschrift oder eines Instruments. Unmittelbar und ohne weitere rationale Reflexion erschließt sich die Bedeutung. Der gesamte technische Unterbau, so wichtig er für die Realisierung auch sein mag, verliert hier an Bedeutung. An die Stelle von Zahlen, Frequenzen, Fourieranalysen und rationalem Verstehen treten emotionale Aspekte und Gefühle - die als Imagene im Gedächtnis gespeichert werden, siehe Abb. 2.2. Es öffnet sich eine Welt, die keiner vermutet hätte, wenn man nur auf der Ebene der mathematischen Analyse geblieben wäre. Erst durch den Wechsel der Repräsentationsebene kann die Musik in ihrer Gesamtheit gewürdigt werden.

Als zweite Stufe neben dem Zuhörer gibt es die Musiker, die Melodien auf verschiedenen Instrumenten interpretieren. Der Musiker ist ein Übersetzer, der musikalische Gedanken durch das Instrument in ein Klangerlebnis überträgt. Musiker haben im Lauf der Zeit verschiedene Schrifttypen entwickelt, um musikalische Gedanken zu repräsentieren - die als Logogene im Gedächtnis gespeichert werden, siehe Abb. 2.2. Die mathematisch-physikalische Repräsentation tritt dabei in den Hintergrund. Wesentliche Bausteine sind Harmonie und Rhythmus, die in einem Notensystem abgebildet werden. Es ist für sich

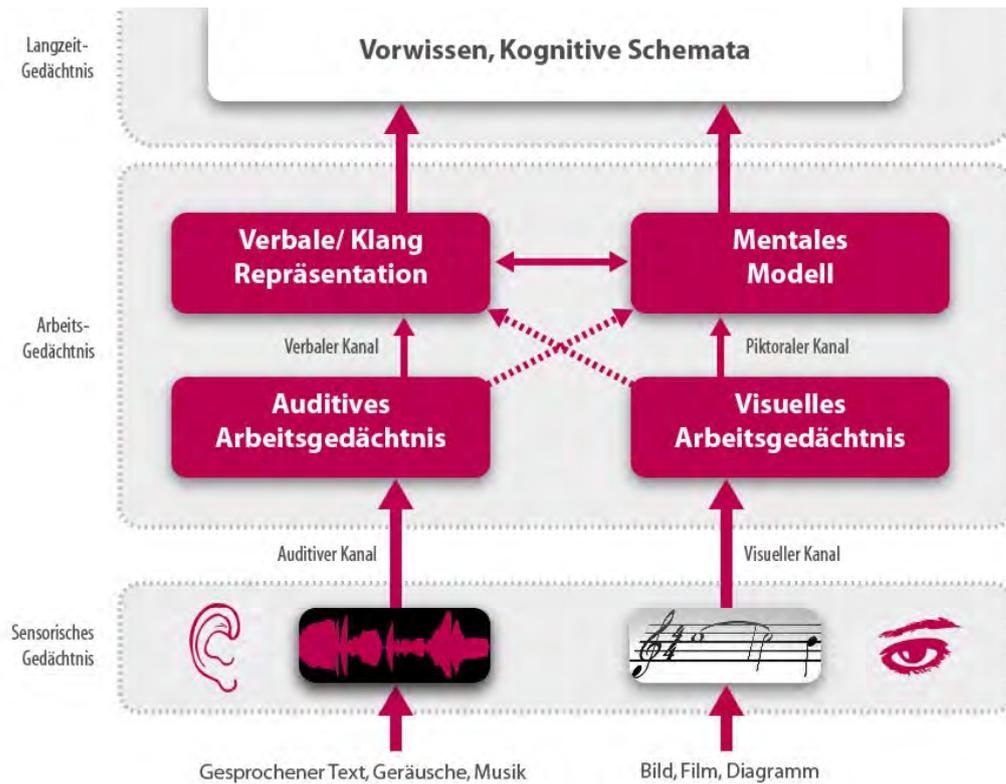


Abbildung 2.2: Repräsentationsebenen in der Musik: Die Partitur beschreibt die Musik in einer abstrakten Sprache. Durch Übersetzung der Partitur in Klang ergibt sich ein unmittelbar erlebbarer und intuitiv verständlicher Zugang zum musikalischen Gedanken.

genommen ein interessantes Untersuchungsthema, wie sich die Notenschrift auf die Interpretation auswirkt - hierbei ergibt sich ein Konflikt zwischen Freiheit der Ausführung und Genauigkeit in der Festlegung durch den Komponisten. Während zum Beispiel in der klassischen Sonatenhauptsatzform Melodie, Rhythmus und Harmonie sehr genau festgelegt sind, ist im Jazz oft nur der Melodieansatz und Harmonieschema festgelegt. Variationen zur Melodie werden improvisiert. Im ersten Fall hat der Musiker die Aufgabe, den musikalischen Gedanken des Komponisten zum Leben zu erwecken, während im zweiten Fall der Musiker selber zum 'Komponisten des Augenblicks' wird.

Die letzte Stufe neben Zuhörer und Musiker bildet der Komponist. Der Komponist ist in der Lage, die technische Ebene der Musik - das Notenschreiben - und die emotionale Ebene - den Klang und seine Wirkung - miteinander zu verbinden. Die Verknüpfung zwischen der technischen Sprache und dem Klangerlebnis, den Logogenen und Imagenen, ist soweit fortgeschritten, dass die Ebenen sich vermischen. Allein schon das Lesen einer

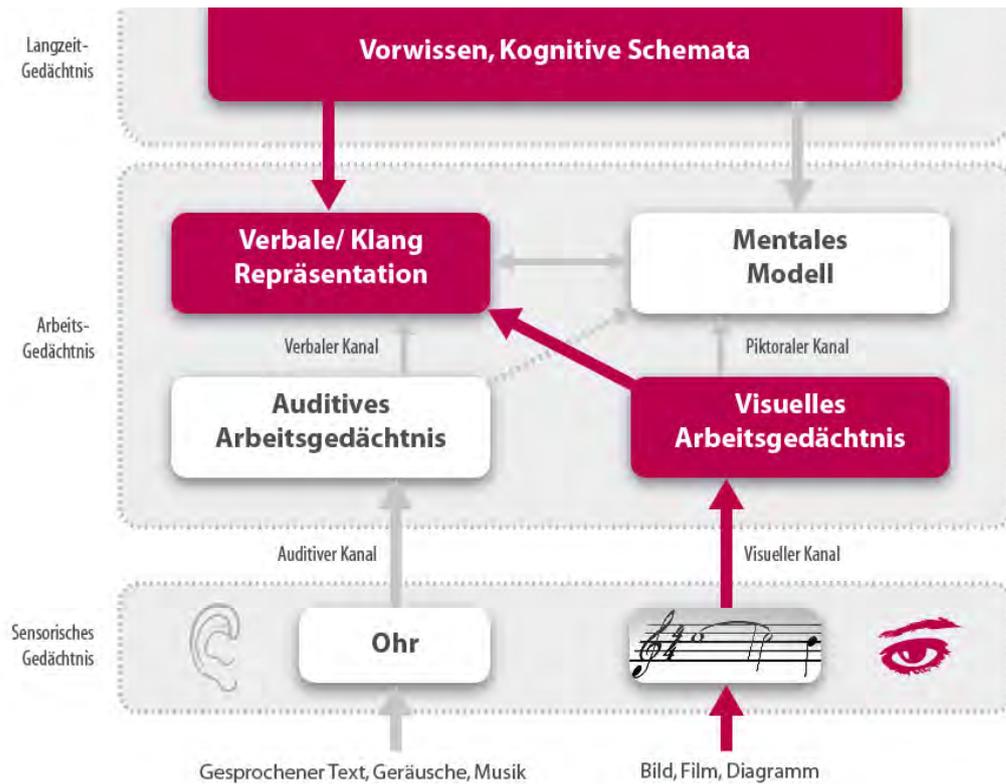


Abbildung 2.3: Geübte Musiker und Komponisten können beim Lesen der Partitur das entsprechende Klang- und Emotionsbild im Arbeitsgedächtnis erzeugen. Hierfür muss ein hohes Maß an Vorwissen aktiviert werden.

Partitur erzeugt die Emotionen, die sich beim Zuhörer erst durch die Aufführung einstellen. Wir wenden das Modell von Schnotz auf die Musik an, siehe Abb. 2.3. Die gehörte Musik und die Partitur werden durch den auditiven Kanal und den visuellen Kanal rezipiert. Die Querverbindung vom visuellen Arbeitsgedächtnis zur Klangrepräsentation wird nur bei geübten Musikern und Komponisten aktiviert. Nur dann ist es möglich, allein durch das Lesen der Partitur die Musik zu 'hören'.

## Musik und Physikdidaktik

Es gibt verschiedene Aspekte der Musik, die für die Physikdidaktik relevant sein können. Wenn wir die Analogie zwischen Zuhörer und Schüler, Musiker und Lehrer, Komponist und Forscher nutzen wollen, wird aus der Notenschrift die Fachsprache, insbesondere auch die mathematische Beschreibung. Neben der theoretischen Beschreibung spielt das Experiment eine entscheidende Rolle. Auch für experimentelle Aufbauten gibt es be-

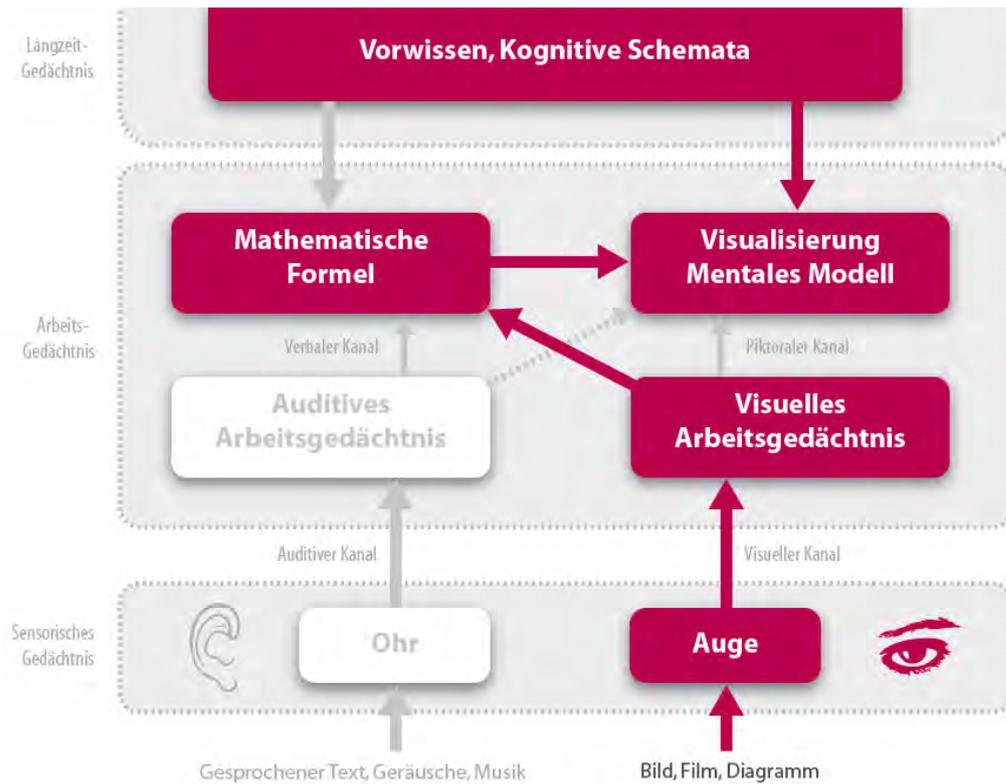


Abbildung 2.4: Schüler sollten darin gefördert werden, Bilder zu entwickeln, die den Inhalt der mathematischen Gleichungen repräsentieren. Durch die doppelte Kodierung in Formeln und Bildern kann das Verständnis und die Behaltensleistung verbessert werden.

stimmte technische Codes - etwa im Fall von Elektronik. Je länger man sich mit einer Fachsprache beschäftigt, desto fließender werden die Übergänge zwischen den verschiedenen Repräsentationsebenen. So wird von einem Physiker der Wechsel zwischen den Repräsentationsebenen zwischen einem Schaltbild von zwei parallelen Widerständen, dem tatsächlichen Aufbau der Schaltung, und der Formel  $R_g = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  kaum mehr bewußt wahrgenommen, es handelt sich schließlich um ein und dasselbe Ding, das experimentell und theoretisch beschrieben wird. Für Schüler können sich Probleme ergeben, die Ebenen miteinander zu verknüpfen [130].

## Die Übersetzung der Fachsprache

Wir können noch einen radikaleren Standpunkt beziehen: In der Musik gelingt die Übersetzung aus der Fachsprache (der Notenschrift) in eine allgemein verständliche,

emotional direkt zugängliche Sprache (dem Klangbild). Durch diese Übersetzung hat die Musik einen Siegeszug erlebt, der sich in Milliarden verkaufter CDs und DVDs und Millionen Aufführungen in den verschiedensten Formen widerspiegelt. Musik ist ein Massenphänomen, sie bewegt und inspiriert, und doch ist Musik auch eine Fachsprache, die studiert werden kann und muss.

Den Physikern ist eine solche Übersetzung ihrer Fachsprache (Theorie und Experiment) in eine allgemein verständliche, emotional direkt zugängliche Sprache in dieser klaren, einheitlichen Form noch nicht gelungen. Aber ist das überhaupt gewünscht? Und wenn es gewünscht ist, was ist z.B. der emotionale Gehalt einer Parallelschaltung?

Ob eine solche Übersetzung gewünscht wird oder nicht, entscheiden nicht die Physiker allein, sondern auch die Wünsche und Vorstellungen in der allgemeinen Bevölkerung. Im Sinne von allgemeinverständlicher (mitunter reißerischer und simplifizierender) Darstellung bestehen bereits etliche Ansätze in Zeitschriften, Fernsehmagazinen oder auch Computerspielen. Je näher die Handelnden an marktwirtschaftliche Kriterien wie z.B. Einschaltquoten oder Auflagenzahlen gebunden sind, desto kleiner ist die Chance, dass tiefgehende Recherchen oder ungewohnte, experimentelle Zugänge hier ihren Platz finden. Der Ausgangspunkt auf dem freien Markt ist nicht unbedingt die Physik, sondern eher die Erwartungshaltung des Publikums. Der Bedarf an allgemeinverständlichen Repräsentationen ist also vorhanden, allerdings gibt es keinen Konsens darüber, wie diese zu gestalten sind.

Bezogen auf die zweite Frage, worin der emotionale Gehalt z.B. einer Parallelschaltung liegen könnte, geben wir durch den Vergleich mit einer Partitur eine mögliche Antwort. Eine Partitur besteht aus verschiedenen Komplexitätsebenen:

- Gesamte Partitur
- Einzelner Satz
- Melodie
- Motiv
- Einzelne Note

Neben dieser vertikalen Strukturierung in Ebenen gibt es noch eine horizontale in die verschiedenen Musikinstrumente, die parallel zueinander erklingen, aber in der Partitur getrennt voneinander notiert werden. Bei einem Streicherquartett gäbe es z.B. die vier parallelen, horizontalen Stränge 'erste Geige, zweite Geige, Bratsche, Cello'. Wenn wir nach einem emotionalen Inhalt suchen wollen, macht das erst ab einer bestimmten Komplexitätsebene Sinn. Eine einzelne Sinusfrequenz, etwa die einer Stimmgabel, hat wenig emotionalen Gehalt. Erst ab der Motiv-Ebene sind Assoziationen, Klangverweise und Variationsmöglichkeiten so ausgeprägt, dass sich ein emotionaler Inhalt ausmachen läßt. Natürlich sind hier die Grenzen fließend und auch subjektiv. Bei einem physikalischen 'Motiv' wie der Parallelschaltung wird sich erst durch weitere Assoziationen und Querverweise ein emotionaler Gehalt ergeben können.

Im Fall der Musik ist es gelungen, eine mächtige Sprache zu entwickeln, die sowohl als akustisches Erlebnis als auch als Partitur kodiert werden kann. Wenn wir die Musik als Vorbild sehen, können wir als Voraussetzung für eine erfolgreiche Lernform eine starke horizontale und vertikale Vernetzung der einzelnen 'physikalischen Motive' ablesen, und eine Übersetzung der Fachsprache in eine direkt, auch emotional zugängliche Sprachform. In der Physik bieten sich als ein Element dazu *Visualisierungen* in Animationen bzw. im Film an, da durch Bilder das hohe Abstraktionsvermögen, das Voraussetzung zum physikalischen Denken ist, gemildert werden kann, siehe Abb. 2.4. Visualisierungen mathematischer Formeln im Sinne von direkten geometrischen Darstellungen (der Graph einer Funktion) sind zwar einfach machbar, aber nur ein erster Schritt. Hier besteht aus meiner Sicht noch ein weites Feld mit viel Potential, weitere Visualisierungstechniken für physikalisch-mathematische Strukturen zu entwickeln, die zwar ebenso wie der Graph der Funktion klar definiert sind, aber mit einem größeren Fundus an Darstellungsmöglichkeiten arbeitet.

Im Beispiel der Physik nichtintegrierbarer Systeme ist es z.B. erst mit Hilfe des Computers durch die Visualisierung der Dynamik in Poincare-Schnitten des Phasenraums möglich geworden, tiefere Einsichten in das Verhalten chaotischer Systeme zu gewinnen [111]. Die enorme Popularisierung von Chaosphysik, die zum Beispiel in der weltweiten Verbreitung von Bildern der Mandelbrot-Menge ihren Ausdruck findet, zeigen deutlich die Macht der Bilder.

Die Bedeutung von Bildern läßt sich an vielen Beispielen in der Physikgeschichte illustrieren [112]. Wenn ein Phänomen sichtbar gemacht worden ist, ist dessen Existenz schon fast bewiesen - oder im Umkehrschluss dieses Sichtbarkeitspostulates wird z.B. Ernst Mach nachgesagt, dass er den zu seiner Zeit noch umstrittenen Atomismus dadurch zu widerlegen suchte, dass er die Verfechter der Atomhypothese gefragt haben soll: 'Ham's ans g'sehn?'. Auch wenn in heutiger Zeit die Existenz von Atomen unumstritten ist, bleibt bis heute die Frage, wie man sie bildhaft darstellen kann, und welches Bild von Atomen in der Schule vermittelt werden sollte. Diese Fragen werden in Kapitel 4 weiter vertieft.

Nach diesen Vorüberlegungen wenden wir uns nun der konkreten Realisierung des Vorhabens zu, durch Visualisierungen eine zusätzliche Repräsentationsebene eines physikalischen Themas zu erarbeiten, und diese Visualisierungen auf einer DVD-ROM in einer vernetzten Lernumgebung für die Schule zu gestalten. Warum hierbei die Wahl auf die Quantenphysik gefallen ist, wird im folgenden Kapitel erläutert. Wie eine solche Lernumgebung im Detail zu strukturieren ist, ist auch nach Diskussion der lerntheoretischen Grundlagen und unserer in Abb. 1.4 dargestellten Zweiteilung in kontextbezogenen Spielfilm einerseits und kontextfreie DVD-ROM andererseits alles andere als offensichtlich. Das jetzt vorliegende Konzept ist erst nach mehreren Rückkopplungen mit Schulen und vielen Diskussionen mit Schülern, Lehrern und Kollegen entstanden. Die Evaluationen an Schulen und deren Resultate werden in Kapitel 5 erläutert. Im Sinne der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Rückkopplungsschleife wird der Fluß von Realisation und Evaluation nie zu einem endgültigen Konzept einer Lernumgebung führen können, wohl aber zu einer stetigen Verbesserung und zum Erfahrungsaustausch zwischen der Lehr-Lernforschung und Lerninhaltsforschung.

# 3 Visualisierung moderner Quantenphysik

Die Quantenphysik nimmt in der Schulphysik eine ganz besondere Stellung ein, da sie einerseits als prototypisch für moderne Physik steht, andererseits als abstrakt und unanschaulich gilt. Die Einheitlichen Prüfungsanforderungen fordern zum Thema Quantenphysik unter anderem die Behandlung folgender Themen: 'Grundlegende Merkmale von Quantenobjekten unter Einbezug erkenntnistheoretischer Aspekte' insbesondere 'stochastisches Verhalten' und 'Nichtlokalität' [65]. In allen Lehrplänen der Sek. II findet sich weiterhin das Themengebiet Interferenz, das neben dem stochastischen Verhalten die zweite Grundlage der Quantenphysik darstellt. Als eine zentrale lerntheoretische Methode wird Analogiebildung und Transfer genannt.

Verschiedene Unterrichtskonzepte sind zur Quantenphysik bereits entwickelt und erprobt worden. Eine große Hürde stellt die theoretische Deutung der Quantenphysik über die Schrödingergleichung  $H\psi = i\hbar\partial_t\psi$  dar. Auf eine tiefere, mathematische Begründung z.B. von Atomspektren über die Schrödingergleichung in der knapp bemessenen Zeit einzugehen, kann kaum gelingen. Auswege, die in der Praxis angewendet werden, sind halbklassische Modelle (Bohr'sches Atommodell) vereinfachte Modellsysteme (Potentialkasten), oder auch Visualisierungen. Besonders erwähnenswert ist hierbei das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenphysik. Zentrales Element bei diesem Ansatz sind neben elementarisierten Lehrtexten Simulations-Programme wichtiger Experimente, die auf dem Computer gezeigt werden können, [90], [91]. Dieselben Autoren geben auch einen Überblick über weitere Ansätze und didaktische Konzepte im deutschsprachigen Raum. So hat G. Pospiech bereits sehr früh die Bedeutung von Verschränkung und Nichtlokalität für den Schulunterricht betont [102] [103]. Die Bedeutung von Visualisierungen für einen Zugang zur Quantenphysik ist von A. Müller beschrieben worden [86].

An der Universität Erlangen wurde am Institut für Didaktik der Physik ein Schülerlabor zur Quantenphysik eingerichtet, das auch online unter [www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de) nutzbar ist. Hauptfokus ist hier die Erläuterung von Experimenten mit einzelnen Photonen. Erste Unterrichtskonzepte, die einen Zugang zur Quantenphysik über Einzelphotonexperimente geben, sind bereits entwickelt und erprobt worden [20], [21], [22]. Unsere Arbeit steht in enger Verbindung mit diesem Projekt. Angelehnt an die in Erlangen aufgebauten realen Experimente dienen die von uns entwickelten Visualisierungen der quantitativen Analyse der Messergebnisse sowie deren theoretischen Deutung in einer schultauglichen Repräsentationsform.

## Bilder des Unsichtbaren - ein Widerspruch in sich?

Der Versuch, Bilder des Mikrokosmos zu erzeugen, wird durch die physikalischen Eigenschaften von Licht begrenzt, etwa durch das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Auch bei der Weiterentwicklung weitere Instrumente wie dem Elektronenmikroskop bleibt eine unüberwindbare Grenze der Sichtbarkeit. Hinter dieser Grenze kennt die heutige Physik mathematisch formulierte Gesetzmäßigkeiten im Hilbertraum, die nur indirekt mit Beobachtungen zusammenhängen. Es ist eine besondere Herausforderung, prinzipiell unbeobachtbare Dinge, die sich nur durch die theoretische Erklärung mathematisch fassen lassen, zu *visualisieren*. Diese Herausforderung macht nur dann Sinn, wenn diese abstrakten Bilder mittelbar in Bezug zu experimentellen Beobachtungen stehen.

Aus diesem Grund eignet sich das Thema Quantenphysik besonders gut für die Entwicklung einer multimedialen Lernumgebung. Um Experiment und Theorie in Einklang zu bringen, haben wir verschiedene Repräsentationstypen entwickelt, in denen die einzelnen Themen dargestellt werden, siehe Abb. 3.4. Das von uns entwickelte Vier-Quadranten-Schema lässt sich auf eine Reihe von Themen der Quantenphysik anwenden. Neben der Visualisierung verschränkter Zustände, die bereits als DVD-ROM veröffentlicht ist, können z.B. auch Grundelemente der Atom- und Molekülphysik mit ähnlichen Methoden schultauglich visualisiert und elementarisiert werden, wie in Kapitel 4 gezeigt.

### 3.1 Ein Qubit

Als Ausgangspunkt für unsere Arbeit zur Quantenphysik wählen wir das einfachste mögliche Beispiel, das sogenannte Qubit [51]. Bevor wir uns im folgenden Abschnitt mit einer schultauglichen Visualisierung des Qubits beschäftigen, wollen wir hier als Grundlage die wichtigsten formalen Begriffe einführen. Wir wählen sozusagen diejenigen Teile aus der 'mathematischen Partitur' aus, die wir schulgerecht interpretieren und visualisieren wollen.

Ein 'klassisches' Bit kann zwei binäre Einstellungen ('Zustände') haben, die wir mit 0 und 1 bezeichnen. Das Qubit erweitert das klassische Bit in zwei Schritten: Erstens kann man beim Qubit nicht mit Sicherheit sagen, ob der Zustand Null oder Eins ist - für beides gibt es lediglich eine Wahrscheinlichkeit  $p_0$  bzw.  $p_1$ . Zweitens können beide Zustände miteinander interferieren. Mathematisch entspricht dies der Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeiten  $p_0, p_1$  zu komplexen Amplituden  $z_0, z_1$ , die wie folgt definiert sind:

$$p_0 \rightarrow z_0 \equiv \sqrt{p_0}e^{i\phi_0}, \quad p_1 \rightarrow z_1 \equiv \sqrt{p_1}e^{i\phi_1}. \quad (3.1)$$

Durch die Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu Amplituden verdoppelt sich die Zahl der Parameter pro Messgröße. Jedem Zustand wird eine Amplitude zugeordnet, so dass das Qubits im reinen Zustand durch die Superposition

$$|Q_1\rangle = z_0|0\rangle + z_1|1\rangle \quad (3.2)$$

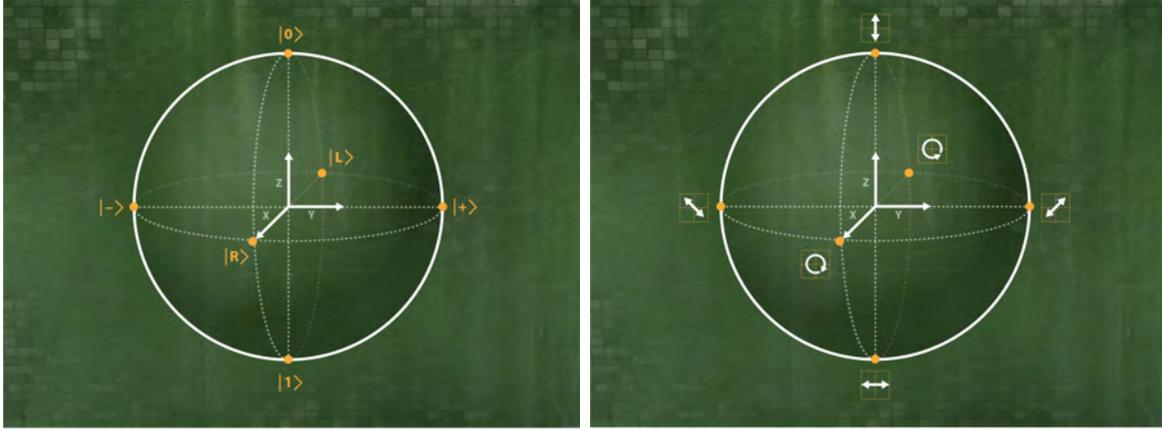


Abbildung 3.1: Jede beliebige Polarisation eines einzelnen Photons kann durch einen Vektor auf der Bloch-Kugel repräsentiert werden. Linear polarisiertes Licht wird in der Tafelenebene ( $yz$ -Ebene), zirkular polarisiertes Licht senkrecht zur Tafelenebene ( $x$ -Achse) abgebildet. Die Polarisationszustände in der Dirac-Schreibweise (links) werden der bildhaften Darstellung (rechts) gegenübergestellt.

beschrieben werden kann. Hierbei bezeichnet  $|0\rangle$  den Zustand 'Null', und  $|1\rangle$  den Zustand 'Eins' des Qubits. Wegen  $p_0 + p_1 = 1$  folgt die Normierung

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1. \quad (3.3)$$

Die komplexen Amplituden des Qubits werden durch drei freie Parameter beschrieben. Die Gesamtheit dieser Parameter erfüllt die Oberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel  $S^3$ . Die verschiedenen Zustände des Qubits können auf der sogenannten Bloch-Kugel visualisiert werden, die die Amplituden durch die Hopf-Abbildung  $S^3 \rightarrow S^2$

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \text{Im}(2z_0^*z_1) \\ \text{Re}(2z_0^*z_1) \\ |z_0|^2 - |z_1|^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

auf die zweidimensionale Einheitskugel  $S^2$  mit den reellen Koordinaten  $(x, y, z)$  abbildet (siehe auch (7.92)). Es gilt  $x^2 + y^2 + z^2 = (|z_0|^2 + |z_1|^2)^2 = 1$ . Die Zustände  $|0\rangle, |1\rangle$  liegen auf der Blochkugel an den Punkten  $z = \pm 1$ , während

$$|+\rangle \equiv 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle \equiv 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle)$$

den Punkten  $y = \pm 1$  und

$$|R\rangle \equiv 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad |L\rangle \equiv 1/\sqrt{2}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

den Punkten  $x = \pm 1$  entspricht, siehe Abb. 3.1. Das Qubit in dieser mathematischen Beschreibung kann verschiedene physikalische Systeme beschreiben, zum Beispiel den

Elektronspin oder die Polarisation des Photons. Dabei verändert sich lediglich die Interpretation der mathematischen Parameter. Im Folgenden werden wir uns mit der Polarisation von Photonen weiter befassen. In diesem Fall kann das Qubit wie folgt interpretiert werden: Der Zustand  $|0\rangle$  wird als horizontal polarisiertes Photon interpretiert und mit  $|H\rangle$  bezeichnet,  $|V\rangle \simeq |1\rangle$  entspricht dem vertikal polarisierten Photon. Bei den Zuständen  $|\pm\rangle$  ist die Polarisationssebene um 45 Grad gedreht. Durch die Verschiebung der horizontalen und vertikalen Komponenten zueinander um  $1/4$  der Wellenlänge ergibt die Superposition  $|R\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + i|V\rangle)$  rechtszirkular polarisiertes Licht, während der Zustand  $|L\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle - i|V\rangle)$  linkszirkular polarisiertes Licht beschreibt.

## Reine und gemischte Zustände

An dieser Stelle können wir den Unterschied zwischen reinen und gemischten Zuständen erläutern. Bei  $|H\rangle$  und  $|V\rangle$  spricht man von reinen Zuständen, ebenso bei Superpositionen wie  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + |V\rangle)$ . Hingegen spricht man von einer Mischung von  $|H\rangle$  und  $|V\rangle$  (bzw. einem gemischten Zustand), wenn für das Vorliegen von  $|H\rangle$  und  $|V\rangle$  nur Wahrscheinlichkeiten anstelle von Amplituden gegeben sind, hier also  $p_H = 1/2 = 50\%$  für  $|H\rangle$  und  $p_V = 50\%$  für  $|V\rangle$ . Bei Messung der Polarisation in horizontaler Stellung des Polarisationsfilters wird man in beiden Fällen mit 50% Wahrscheinlichkeit horizontale Polarisation detektieren. Aber bei Messung der Polarisation in der um +45 Grad gedrehten Stellung des Polarisationsfilters, also in der  $|+\rangle$ -Basis, wird man im ersten Fall mit 100% Wahrscheinlichkeit die Polarisation  $|+\rangle$  detektieren, im zweiten Fall nur mit 50 Prozent. Um diese Fälle zu unterscheiden, führt man die sogenannte Dichtematrix  $\rho$  ein, die im ersten Fall gegeben ist durch

$$\rho_R = |+\rangle\langle+| = \frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| + \frac{1}{2}|H\rangle\langle V| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle H|. \quad (3.5)$$

Als Matrix geschrieben ergibt sich

$$\rho_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Diese Matrix beschreibt den reinen Zustand  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + |V\rangle)$ . Es gilt  $\rho_R^2 = \rho_R$ . Die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|+\rangle$  zu messen, ergibt sich als

$$\text{tr}(\rho_R|+\rangle\langle+|) = \langle+|\rho_R|+\rangle = \langle+|+\rangle\langle+|+\rangle = 1. \quad (3.7)$$

Der gemischte Zustand ist gegeben durch

$$\rho_G = p_H|H\rangle\langle H| + p_V|V\rangle\langle V| = \frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V| \quad (3.8)$$

$$\rho_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Für den gemischten Zustand gilt  $\text{tr}\rho_G^2 < 1$ . Die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|+\rangle$  zu messen, ergibt sich als

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho_G|+\rangle\langle +|) = \langle +|\rho_G|+\rangle &= \langle +|(\frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V|)|+\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle H|H\rangle\langle H|H\rangle + \frac{1}{4}\langle V|V\rangle\langle V|V\rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierbei haben wir  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + |V\rangle)$  und die Orthogonalität  $\langle V|H\rangle = \langle H|V\rangle = 0$  genutzt.

## 3.2 Repräsentationsebenen der Quantenphysik: Das Vier-Quadranten Schema

Offensichtlich ist eine formale Analyse des Qubits für die Schule ohne weitere Hilfestellungen zu abstrakt und somit ungeeignet. Ziel dieses Abschnittes ist es, ein einfaches und möglichst allgemeines Schema von Repräsentationsebenen für Theorie und Experiment im Rahmen der Quantenphysik zu beschreiben. Das Repräsentationsschema wird am Beispiel der Polarisation vorgestellt, kann aber allgemeiner genutzt werden. An erster Stelle steht das Experiment. Für das Beispiel von Polarisation von Licht ist spätestens seit dem Erfolg von Kinofilmen in 3D die Polarisationsbrille ein Begriff. Aber auch in der Fotografie werden Polarisationsfilter verwendet, oder in der Spannungsoptik, um einige weitere Beispiele zu nennen. In diesen Fällen hat man es mit einer sehr großen Anzahl von Photonen zu tun, so dass die erzielten Messergebnisse stets den Erwartungswerten entsprechen. Der stochastische Charakter der Quantenphysik tritt dabei nicht zutage. In einem bekannten Schulexperiment wird linear polarisiertes Licht durch einen zweiten linearen Polarisationsfilter geschickt. Von der Ausgangsintensität  $I$  des einfallenden Lichts tritt dann durch den zweiten Filter die verbleibende Lichtintensität  $I_1(\theta) = I \cos^2[\theta]$ , wobei der Winkel  $\theta$  den Winkel zwischen den Filterachsen beschreibt. Diese Gesetz von Malus lässt sich durch die Zerlegung des elektrischen Feldvektors  $\vec{E}$  in eine parallele und senkrechte Komponente relativ zur zweiten Filterachse elementar erklären,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |\vec{E}| \sin[\theta] \\ |\vec{E}| \cos[\theta] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Nur die vertikale Feldkomponente  $E_1$  kann den Filter passieren, die horizontale wird absorbiert. Da die Intensität proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke ist, gilt  $I_1 \propto |E_1|^2 \propto |\vec{E}|^2 \cos^2[\theta]$ . Nun gehen wir einen Schritt weiter in Richtung Quantenphysik. Im Rahmen von Schulexperimenten ist es nicht möglich, einzelne Photonen abzuzählen. Zwar wird mit dem Fotoeffekt indirekt eine Argumentation gegeben, die auf die Existenz des Photons schließen lässt, aber die Konsequenz daraus für andere 'klassische' Schulversuche wird oft nicht genügend gewürdigt: Wie verhält sich das *einzelne*

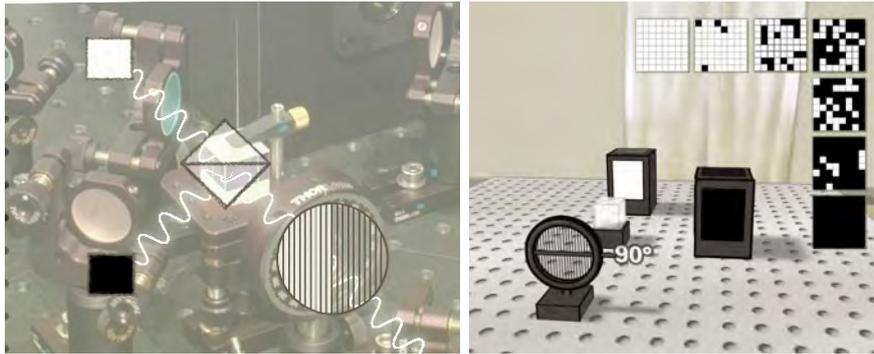


Abbildung 3.2: Links: Am polarisierenden Strahlteilerwürfel teilt sich die Amplitude des Photons entsprechend der Komponenten der linearen Polarisation auf. Die möglichen Messergebnisse Transmission und Reflexion werden als weißes bzw. schwarzes Quadrat visualisiert. Rechts: Schematischer Aufbau des Experiments mit Visualisierung von je 64 Messergebnissen in sieben Winkelstellungen. Es ergibt sich jeweils ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster, wobei die Wahrscheinlichkeit für Reflexion und Transmission stark vom Winkel abhängt.

Photon am Polarisationsfilter? Diese einfache Frage ist ein wichtiger Schlüssel für das Verständnis von Quantenphysik. Die Antwort auf diese Frage hat zwei Teile. Der erste Teil befasst sich mit den experimentellen Resultaten. Der zweite Teil befasst sich mit der theoretischen Beschreibung.

## Visualisierung der experimentellen Resultate

Beginnen wir mit dem ersten Teil, den Messergebnissen. Auch wenn Schulversuche mit einzelnen, angekündigten Photonen (noch) zu aufwändig sind, bietet sich schon heute die Möglichkeit, Ergebnisse solcher Messungen im Quantenoptiklabor als Bildschirmexperiment nachzuvollziehen ([www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de)). In Abb. 3.2 stellen wir dem tatsächlichen experimentellen Aufbau aus der Universität Erlangen unsere Visualisierung zum Einzelphotonexperiment gegenüber. Wesentlich für den Aufbau ist der polarisierende Strahlteilerwürfel (PBS, 'polarizing beam splitter'), der das einfallende Photon aufgrund seiner Kristallstruktur in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegt und in die Richtung des 'weißen' und 'schwarzen' Detektors sendet. Die lineare Polarisation des einfallenden Photons kann durch einen Polarisationsdreher in eine beliebige Richtung relativ zur Kristallstruktur vom polarisierenden Strahlteiler gedreht werden. Im Gegensatz zum Polarisationsfilter absorbiert der Polarisationsdreher keine Anteile, so dass dort keine Verluste auftreten. Wir visualisieren die experimentellen Resultate in sieben verschiedenen Winkelstellungen des Polarisationsdrehers. Wird das Photon vom weißen Detektor registriert, bezeichnen wir das Messergebnis als  $\square$ . In diesem Fall war das Photon vertikal polarisiert. Wird das Photon vom schwarzen Detektor registriert, bezeichnen

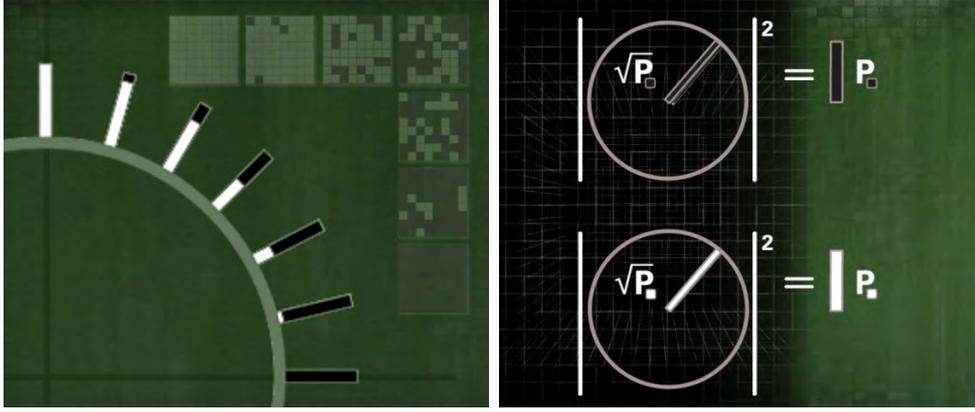


Abbildung 3.3: Links: Experimentell ermittelte Wahrscheinlichkeitsverteilung für Transmission (weißer Balken) und Reflexion (schwarzer Balken). Rechts: Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu komplexen Amplituden. Die Visualisierung der Amplituden von Reflexion und Transmission als 'drehendes Rad' stammt von Feynman und wird als Zeigerformalismus bezeichnet.

wir das Messergebnis als  $\blacksquare$ . In diesem Fall war das Photon horizontal polarisiert. In jeder Winkelstellung betrachten wir 64 Messergebnisse. Wie in Abb. 3.2 zu sehen, ergibt sich in jeder Winkelstellung ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster, allerdings hängt die Verteilung von schwarzen und weißen Messergebnissen stark von der Winkelstellung des Polarisationsdrehers ab. Die erste wesentliche Beobachtung ist die, dass durch Experimente mit einzelnen Photonen das *stochastische* Verhalten als Grundelement der Quantenphysik klar sichtbar wird. *Vor* der Messung kann lediglich eine Wahrscheinlichkeit  $p_{\square}$  bzw.  $p_{\blacksquare}$  zur Beschreibung angegeben werden, nach dem Experiment ergeben sich digitale Daten, wobei wir 'Eins' als Transmission ( $\square$ ) bzw. vertikal polarisiert und 'Null' als Reflexion ( $\blacksquare$ ) bzw. horizontal polarisiert interpretieren wollen. Durch Abzählen der schwarzen bzw. weißen Kästchen lassen sich die relativen Häufigkeiten ermitteln. Aufgrund von statistischen Fluktuationen stimmen relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten nicht vollkommen miteinander überein. Erst für eine sehr große Anzahl  $N$  von Messungen konvergieren die relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten<sup>1</sup>,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N} = p_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_0}{N} = p_0. \quad (3.12)$$

Interferenzexperimente mit Licht haben sich schon lange in der Schulpraxis etabliert. Durch die Diskussion von Experimenten mit einzelnen Photonen wird es möglich, auch das stochastische Verhalten von Quanten zu präsentieren. Der Zufall entscheidet, ob das einzelne Photon am Detektor 'weiß' oder 'schwarz' registriert wird. Durch Auswerten

<sup>1</sup>Der Übersichtlichkeit wegen nutzen wir in der mathematischen Notation hier nicht  $p_{\square}$  bzw.  $p_{\blacksquare}$ , sondern  $p_1$  bzw.  $p_0$ .

vieler experimenteller Daten zeigt sich, dass die Winkelabhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten gegeben ist durch

$$p_1 = \cos^2[\theta], \quad p_0 = \sin^2[\theta]. \quad (3.13)$$

Die gesamte registrierte Lichtintensität nach dem Durchlauf von  $N \gg 1$  Photonen im weißen Detektor ist  $I_1 \propto Np_1$ , beim schwarzen Detektor  $I_0 \propto Np_0$ .

## Visualisierung der theoretischen Beschreibung

Nun wenden wir uns der theoretischen Beschreibung des polarisierten Photons zu. Wir haben zwei verschiedene Wege kennengelernt, die Lichtintensität zu bestimmen, einmal im 'Wellenbild' über  $I_1 \propto |E_1|^2$  (3.11), einmal im 'Teilchenbild' über  $I_1 \propto Np_1$ . Der elektrische Feldvektor  $\vec{E}$  schwankt zwischen positiven und negativen Werten und ermöglicht somit die mathematische Beschreibung der Interferenz. Die Wahrscheinlichkeit  $p$  beschreibt das stochastische Verhalten von Licht, allerdings sind Wahrscheinlichkeiten positive Zahlen und somit nicht 'interferenzfähig'.

Wie lassen sich diese beiden Aspekte der Beschreibung von Licht miteinander kombinieren? Die folgende Argumentation soll eine Möglichkeit aufzeigen, quantenmechanische Amplituden in der Schule zu motivieren. Hierbei machen wir aus didaktischen Gründen starke Vereinfachungen in der mathematischen Argumentation, um die Grundidee so einfach wie möglich darzustellen. In Anhang 7.1 wird die Argumentation mathematisch genauer ausgeführt. Die Kombination aus 'Wellen'- und 'Teilchenbild' ergibt

$$I_1 \propto Np_1 \propto |\vec{E}_1|^2. \quad (3.14)$$

Der makroskopische Erwartungswert des elektromagnetischen Feldes steht also mit dem stochastischen Verhalten des einzelnen Photons über

$$E_1 \propto \sqrt{N}(\sqrt{p_1}e^{i\phi}) \quad (3.15)$$

in Verbindung. Für das einzelne Photon wird somit durch die Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu komplexen Amplituden gemäß

$$p_1 \rightarrow \sqrt{p_1}e^{i\phi_1} \quad (3.16)$$

die Interferenzfähigkeit in Kombination mit dem stochastischen Verhalten mathematisch erfolgreich zum Ausdruck gebracht. Die quantenmechanische Wellenfunktion  $\psi = \sqrt{p}e^{i\phi}$  wurde von M. Born erstmals mit einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation in Verbindung gebracht<sup>2</sup>. Die obige Argumentation - auch in der genaueren Analyse - ist keinesfalls zwingend. Der Erfolg dieser Betrachtungsweise gibt dem Ansatz 'im Nachhinein' recht. Bis heute sind keine Experimente bekannt, die der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion  $\psi$  widersprechen. Die Visualisierung der Wellenfunktion als 'drehendes Rad', wie in Abb. 3.3 gezeigt, geht auf Feynman zurück [31] und hat in der Schule

---

<sup>2</sup>Born hatte diese Interpretation zunächst in einer Fußnote erwähnt - die wichtigste Fußnote der Physikgeschichte.

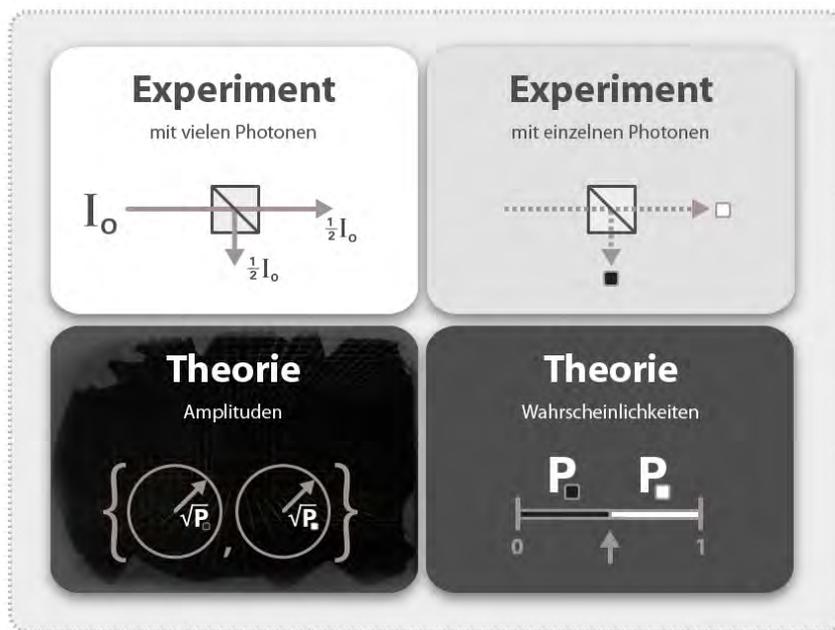


Abbildung 3.4: Das Grundschaema der vier Quadranten. Die obere Zeile beschreibt das Experiment, die untere die Theorie. Beim Experiment werden solche mit kontinuierlichem Laserlicht und mit einzelnen Photonen unterschieden (entsprechend den Quadranten oben links und oben rechts). Der stochastische Charakter der Quantenphysik kann bei Einzelphoton-Experimenten direkt verifiziert werden. Bei der Theorie unterscheiden wir den Raum der Wahrscheinlichkeiten und den Raum der interferenzfähigen Amplituden (entsprechend den Quadranten unten rechts und unten links).

als Zeigerformalismus Einzug gefunden. Die Umdrehungsfrequenz des Rades entspricht der Frequenz des Photons. Der Zeigerformalismus kann in zwei verschiedenen Varianten gedeutet werden: Zum einen kann nach (3.15) der Radius des Rades als elektrische Feldstärke  $E_1$  gedeutet werden. In dieser Variante ist die Visualisierung in der Schule am weitesten verbreitet. Zum anderen kann nach (3.16) der Radius des Rades als Wurzel aus der Wahrscheinlichkeit  $\sqrt{p}$  gedeutet werden. In dieser Variante ist die Visualisierung in der Schule nur zum Teil etabliert. Beide Visualisierungen stehen vereinfacht gesprochen durch (3.15) unmittelbar miteinander in Beziehung.

## Verallgemeinerung von Feynmans Zeigerformalismus: Visualisierung von Theorie und Experiment im Vier-Quadranten-Schema

In unserer Arbeit verallgemeinern wir die Visualisierungstechnik von Feynman in zwei Richtungen: Zum einen nutzen wir die Visualisierung erstmals für die Darstellung verschränkter Photonen. Zum anderen vervollständigen wir das Bild durch die Visualisierung der *experimentellen* Resultate durch die Symbole  $\square$  und  $\blacksquare$  für Transmission und Reflexion.

Durch diese Überlegungen gelangen wir zu einem einheitlichen Visualisierungsschema, das auf vier Quadranten beruht, siehe Abb. 3.4: Jeder Quadrant entspricht einer Repräsentationsebene der Quantenphysik. In der oberen Zeile beschreiben wir das Experiment, in der unteren Zeile die Theorie. Experimente unterteilen wir in zwei Kategorien: Experimente mit vielen Photonen gleichzeitig (I. Quadrant oben links) und Experimente mit einzelnen Photonen hintereinander (II. Quadrant oben rechts). Heutige Schulexperimente fallen alle in den ersten Quadranten. Experimente mit angekündigten, abzählbaren Photonen im Quantenoptiklabor fallen in den zweiten Quadranten. Die theoretische Beschreibung unterteilen wir ebenfalls in zwei Kategorien: Den Raum der Wahrscheinlichkeiten  $p$  (III. Quadrant unten rechts), sowie den Raum der Amplituden bzw. der Wellenfunktionen  $\psi = \sqrt{p}e^{i\phi}$  (IV. Quadrant unten links)<sup>3</sup>. Der IV. Quadrant entspricht dem Hilbertraum; in unserer Arbeit nutzen wir die Bezeichnung *Quantendimension*.

Die vier Repräsentationsebenen für das Beispiel vertikal polarisierten Lichts werden in Lernstation U1-08 Slide 8 visualisiert [46], siehe auch Abb. 7.3. Durch das Schulexperiment mit linearen Polarisationsfiltern kann das Gesetz von Malus und damit die winkelabhängige Intensitätsverteilung  $I_1 \propto \cos^2[\theta]$  gemessen werden (I. Quadrant). Im Quantenoptiklabor kann der stochastische Charakter einzelner Photon nachgewiesen werden (II. Quadrant). Die Transmissionswahrscheinlichkeit  $p_1(\theta)$  ist proportional zur Intensitätsverteilung,  $I_1 \propto Np_1(\theta)$  (III. Quadrant). Für die Kombination von stochastischem Verhalten und Interferenzfähigkeit muss die winkelabhängige Transmissionswahrscheinlichkeit  $p_1(\theta)$  zur Amplitude  $z_1(\theta) = \sqrt{p_1(\theta)}e^{i\omega t}$  verallgemeinert werden (IV. Quadrant).

### 3.3 Zwei Qubits: Verschränkung

Verschränkung ist ein zentrales Thema moderner Quantenphysik, das sowohl theoretisch als auch experimentell ein Gegenstand aktueller Forschung ist. Um uns der Frage zu nähern, wie diese Thematik erfolgreich im Physikunterricht vermittelt werden kann, geben wir zunächst einen Überblick über wesentliche mathematische und experimentelle Aspekte. Anschliessend definieren wir die Inhalte aus dieser komplexen Thematik, die für die allgemein bildende Schule von Bedeutung sein könnten und übersetzen diese

---

<sup>3</sup>Für das Photon ergibt sich die Gesamtwellenfunktion als Produkt aus Orts- und Polarisationsanteil:  $\Psi = \sqrt{\rho(x)}e^{in}\sqrt{p}e^{i\phi}$  Im Fall von Ortswellenfunktionen muss die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x)$  anstelle der Wahrscheinlichkeit  $p$  für die Amplitude verwendet werden.

definierten Inhalte in die Visualisierungen, die sich aus der Verallgemeinerung von Feynmans Zeigerformalismus ergeben, und ordnen diese den vier Quadranten zu, die wir im vorigen Abschnitt für den Unterricht der Quantenphysik definiert haben.

## Mathematische Repräsentation

Beginnen wir mit einer mathematischen Analyse, wie sie in einer Reihe von Arbeiten zu finden ist [139]. Hierbei verallgemeinern wir die Analyse des einzelnen Qubits aus dem vorherigen Abschnitt auf ein Paar von Qubits. Bei einem System von zwei Qubits kann bei einer Messung in der Basis  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  jedem Messergebnis nur eine Amplitude zugeordnet werden. Vor der Messung kann der reine Zustand als Überlagerung

$$|Q_2\rangle = z_{00}|00\rangle + z_{01}|01\rangle + z_{10}|10\rangle + z_{11}|11\rangle \quad (3.17)$$

beschrieben werden. Dies entspricht dem Superpositionsprinzip der Quantenphysik, das hier auf den Fall von zwei Qubits verallgemeinert wird. Hierbei sind die Amplituden  $z_{ij}$  komplexe Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|ij\rangle$  zu erhalten, ist durch  $p_{ij} = |z_{ij}|^2$  gegeben. Die Dichtematrix dieses reinen Zustands ergibt

$$\rho_{R2} = |Q_2\rangle\langle Q_2| = \begin{pmatrix} |z_{00}|^2 & z_{00}^*z_{01} & z_{00}^*z_{10} & z_{00}^*z_{11} \\ z_{01}^*z_{00} & |z_{01}|^2 & z_{01}^*z_{10} & z_{01}^*z_{11} \\ z_{10}^*z_{00} & z_{10}^*z_{01} & |z_{10}|^2 & z_{10}^*z_{11} \\ z_{11}^*z_{00} & z_{11}^*z_{01} & z_{11}^*z_{10} & |z_{11}|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Aufgrund der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit gilt  $\text{tr}\rho = 1$ . Für den reinen Zustand gilt ferner  $\rho^2 = \rho$ . Dies ist aber nicht der allgemeinste Fall. Noch allgemeiner lässt sich der gemischte zwei Qubit Zustand durch die Dichtematrix

$$\rho_{G2} = \sum_{i,j,k,l} w_{i,j,k,l} |i,j\rangle\langle k,l| \quad (3.19)$$

mit komplexen Matrixelementen  $w_{i,j,k,l}$  beschreiben. Bringen wir die  $2^2 \times 2^2 = 4 \times 4$  Matrix durch eine unitäre Drehung mit  $\mathbf{U} \in U(4)$ ,  $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$ , in Diagonalgestalt, ergibt sich ein klareres Bild:

$$\rho_{G2} = \mathbf{U}^\dagger \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mathbf{U} \quad (3.20)$$

Für die reellen Eigenwerte  $\lambda_i$  gilt  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ . Quadrieren wir, ergibt sich

$$\rho^2 = \mathbf{U}^\dagger \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2) \mathbf{U}. \quad (3.21)$$

Reine Zustände lassen sich mathematisch als solche definieren, die aus einem einzigen Basiszustand, z.B.  $|0, 0\rangle$  durch eine unitäre Drehung erzeugt werden können. In diesem Fall gilt  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Aus dieser Sicht entspricht der Vektor  $\{z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}\}$  einfach der ersten Zeile der unitären  $4 \times 4$  Matrix  $\mathbf{U} \in U(4)$ .

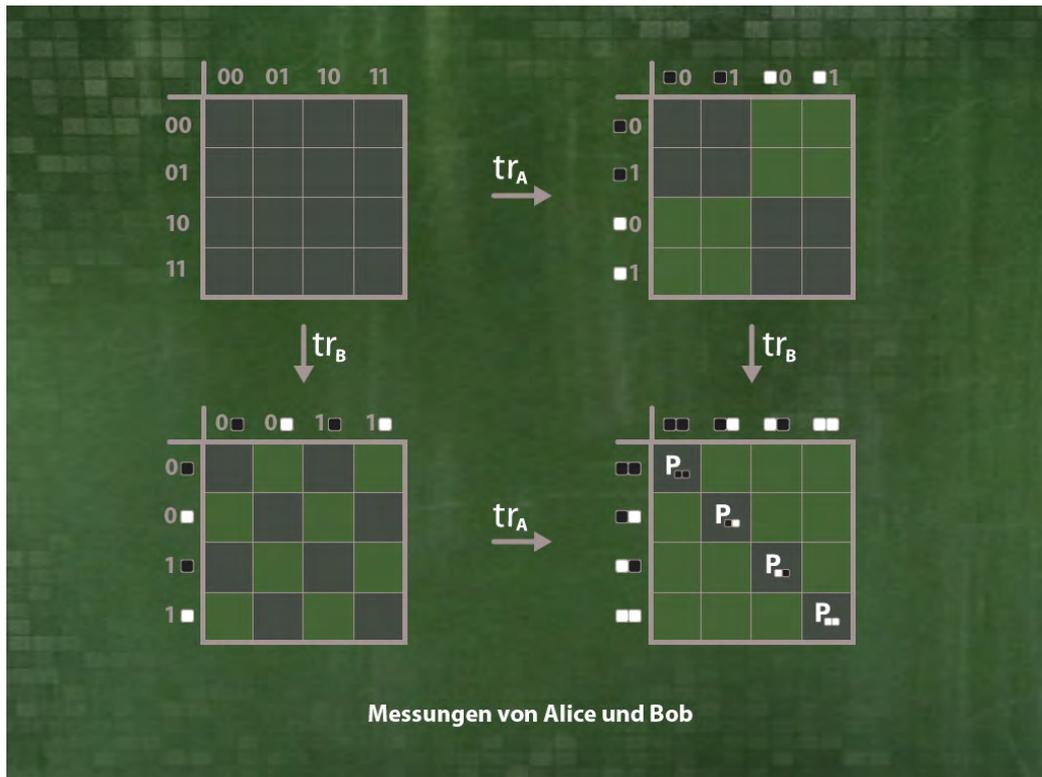


Abbildung 3.5: Die Dichtematrix der Polarisationszustände eines Paares von zwei Photonen ist die  $4 \times 4$  Matrix (3.19), oben links im Bild. Die partielle Spur  $\text{tr}_A$  bzw.  $\text{tr}_B$  auf dem  $2 \times 2$  Unterraum von Alice bzw. Bob ergibt die reduzierte Dichtematrix, bei der nur die grauen Felder von Null verschiedene Einträge haben (oben rechts und unten links im Bild). Die Reihenfolge der Messungen von Alice und Bob spielt keine Rolle; es bleiben nach abermaliger Spurbildung über den komplementären Unterraum nur noch die Diagonaleinträge übrig (unten rechts im Bild).

### Die Reihenfolge der Messungen von Alice und Bob spielt keine Rolle für das Endergebnis

Die Messung an einem Teilsystem steht mit der partiellen Spur über das Subsystem in Verbindung. Durch Spurbildung wird die Dichtematrix auf die möglichen Messergebnisse  $|0\rangle, |1\rangle$  des betreffenden Subsystems eingeschränkt, und Superpositionen zwischen den beiden Zuständen zerstört. Wie in Abb. 3.5 gezeigt, spielt die Reihenfolge der Messungen keine Rolle: Wir bezeichnen in  $|Q_2\rangle\langle Q_2| := |A, B\rangle\langle B, A|$  das eine Teilsystem mit A (Alice), das andere Teilsystem mit B (Bob). Durch die partielle Spur über das Teilsystem A wird ähnlich wie in Gleichung (3.10) über die möglichen Messergebnisse  $|0, B\rangle\langle B, 0|$  und  $|1, B\rangle\langle B, 1|$  summiert. Dies entspricht den beiden möglichen Messergebnissen 0 (■) und 1 (□) beim Detektor Alice. Es ergibt sich die reduzierte Dichtematrix von Bob,

$$\rho_{j,k}^B = \text{tr}_A \rho_{G2} = \sum_{j,k} w_{0,j,k,0} |0, j\rangle \langle k, 0| + \sum_{j,k} w_{1,j,k,1} |1, j\rangle \langle k, 1|. \quad (3.22)$$

Umgekehrt ergibt die partielle Spur über die möglichen Messergebnisse bei B die reduzierte Dichtematrix vom Subsystem A,

$$\rho_{i,l}^A = \text{tr}_B \rho_{G2} = \sum_{i,l} w_{i,0,0,l} |i, 0\rangle \langle 0, l| + \sum_{i,l} w_{i,1,1,l} |i, 1\rangle \langle 1, l|. \quad (3.23)$$

Die reduzierte Dichtematrix beschreibt den Fall, dass die Superpositionsfähigkeit bei dem einen Teilsystem noch existiert, bei dem anderen durch Messung bzw. Wechselwirkung mit Freiheitsgraden der Umgebung und Dekohärenz bereits zerstört wurde und entweder das Ergebnis  $\square$  oder  $\blacksquare$  vorliegt. Nach abermaligem Spurbilden ergeben sich in beiden Fällen wie in Abb. 3.5<sup>4</sup> gezeigt die Diagonalelemente

$$\text{tr}_B \text{tr}_A \rho_{G2} = \text{tr}_A \text{tr}_B \rho_{G2} = \text{diag} \rho_{G2}. \quad (3.24)$$

Die Diagonalelemente bestimmen die Wahrscheinlichkeiten für die vier möglichen Messergebnisse, unabhängig von der Reihenfolge der Messungen bzw. unabhängig von der Reihenfolge der Spurbildung über Subsystem A und B.

## Das Produkt von zwei reinen Polarisationszuständen

Im Folgenden betrachten wir nur reine Zustände, da bereits bei diesem Fall alle wesentlichen Eigenschaften von Verschränkung auftreten. Verschränkung tritt genau dann auf, wenn die Messung am ersten Qubit *nicht* unabhängig von der Messung am zweiten Qubit ist, die Messungen also miteinander interferieren. Auch wenn die Reihenfolge der Messungen irrelevant ist, können die Messungen sehr wohl Einfluss aufeinander haben. Dies ist eine paradoxe Situation, die sich aus der Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu Amplituden ergibt. Wir wollen nun die Frage diskutieren, wann die Messung am ersten Qubit das Resultat einer Messung am zweiten Qubit beeinflussen kann. Bezeichnen wir mit  $p_i^A$  die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis  $i$  beim Qubit A, und mit  $p_j^B$  die Wahrscheinlichkeit für das Messergebnis  $j$  beim Qubit B. Beginnen wir mit dem einfachen Fall, dass beide Qubits unabhängig voneinander sind. Die Messergebnisse sind unabhängig, wenn für die kombinierten Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  der Produktansatz gilt,

$$p_{ij} = p_i^A p_j^B. \quad (3.25)$$

In der Quantenphysik werden Wahrscheinlichkeiten zu komplexen Amplituden  $z_{ij} = \sqrt{p_{ij}} e^{i\phi_{ij}}$  verallgemeinert. Für den Spezialfall des Produktzustandes gilt für die Amplituden ebenfalls der Produktansatz

---

<sup>4</sup>Die Abb. 3.5 entstand in Zusammenarbeit mit F. Haake.

$$\begin{aligned}
|Q_1^A\rangle|Q_1^B\rangle &= (z_0^A|0\rangle + z_1^A|1\rangle)(z_0^B|0\rangle + z_1^B|1\rangle) \\
&= z_0^A z_0^B |00\rangle + z_0^A z_1^B |01\rangle + z_1^A z_0^B |10\rangle + z_1^A z_1^B |11\rangle.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Das einzelne Qubit A wird durch zwei Amplituden mit je zwei reellen Parametern beschrieben. Aufgrund der Normierung gilt  $|z_0^A|^2 + |z_1^A|^2 = 1$ , was geometrisch der Oberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel entspricht. Es bleiben  $2 + 2 - 1 = 3$  reelle, unabhängige Parameter in den Amplituden  $z_i^A$  übrig. Hier müssen wir nun die wichtige Unterscheidung zwischen Parametern im Hilbertraum bzw. der Quantendimension und beobachtbaren Größen diskutieren, also den Unterschied zwischen Amplituden und Wahrscheinlichkeiten. Durch die Multiplikation mit dem Phasenfaktor  $e^{i\varphi}$  der Amplituden in

$$(z_1^A, z_2^A) \rightarrow e^{i\varphi}(z_1^A, z_2^A)$$

ergeben sich keine Änderungen bei den beobachtbaren Wahrscheinlichkeiten. Die Beschreibung der Amplituden ist somit nicht eindeutig! Alle *beobachtbaren* Effekte des einzelnen Qubits lassen sich durch lediglich zwei Parameter beschreiben, die wie in Abb. 3.1 gezeigt als zweidimensionale Oberfläche der Blochkugel visualisiert werden können, siehe auch Gleichung (7.92). Auch wenn diese irrelevante Phase zu keinem beobachtbaren Effekt führt, müssen wir sie bei unserer Buchführung mitzählen. In Abb. 7.9 zeigen wir die faszinierende geometrische Struktur, die sich durch diese nicht beobachtbare Phase in der Quantendimension ergibt.

Das Produkt von zwei unabhängigen Qubits wird ganz analog durch  $3 + 3 = 6$  Parameter  $z_i^A, z_j^B$  beschrieben. Von diesen Parametern führen jeweils 2 zu beobachtbaren Effekten. Es ergibt sich das Produkt von zwei unabhängigen Blochkugeln.

## Die siebte Dimension und die vier Bell-Zustände

Die Kombination von zwei Qubits (A, B) wird durch  $2^2 = 4$  Amplituden  $z_{ij}$  mit je zwei reellen Parametern beschrieben, insgesamt also acht reelle Parameter. Aufgrund der Normierung gilt  $|z_{00}|^2 + |z_{01}|^2 + |z_{10}|^2 + |z_{11}|^2 = 1$ . Es bleiben sieben reelle Parameter, die geometrisch die Oberfläche der siebendimensionalen Einheitskugel beschreiben. Der Produktzustand  $|Q_1^A\rangle|Q_1^B\rangle$  wird in der Quantendimension aber nur durch  $3 + 3 = 6$  reelle Parameter beschrieben, so dass genau eine Dimension frei bleibt! Diese Dimensionsanalyse zeigt, dass der Raum aller reinen Zustände, der *nicht* aus Produktzuständen besteht, durch genau einen Parameter beschrieben wird. Diese 'siebte Dimension' ist durch die sogenannte *concurrence* definiert,

$$c = 2|z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10}|. \tag{3.27}$$

Im Fall des Produktzustandes  $|Q_1^A\rangle|Q_1^B\rangle$  ergibt sich  $c = 0$ . Allgemein gilt  $0 \leq c \leq 1$ . Die concurrence  $c$  ist invariant unter *lokalen* Operationen an einem einzelnen Qubit. Dies ergibt sich wie folgt. Um die Notation so elementar wie möglich zu halten, verallgemeinern wir die lokale unitäre 1-Qubit Operation

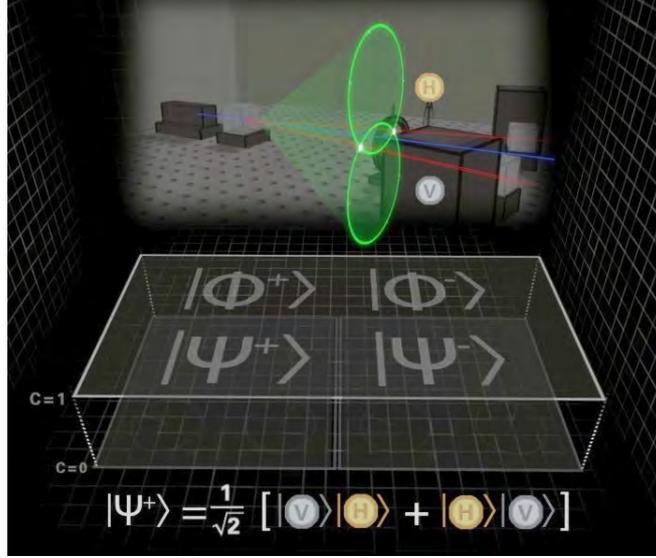


Abbildung 3.6: Visualisierung des sieben-dimensionalen Raumes reiner Polarisationszustände des Photonenpaares. Der sechsdimensionale Unterraum mit  $c = 0$  entspricht den Produktzuständen. Für  $c = 1$  ergibt sich der Raum der maximal verschränkten Bell-Zustände. Im Experiment (oben im Bild, siehe auch Abschnitt 3.3) entsprechen Photonenpaare, die auf den Schnittlinien der Polarisationskegel erzeugt werden, den maximal verschränkten Bell-Zuständen, wie zum Beispiel  $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle + |HV\rangle)$ .

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_0 + \beta z_1 \\ -\beta^* z_0 + \alpha^* z_1 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

indem wir die Amplituden  $z_0, z_1$  durch den zweiten Index zu  $z_{0j}, z_{1k}$  erweitern, der das zweite Qubit symbolisiert. Per Definition kann die lokale Operation am ersten Qubit keinen Einfluss auf die weiteren Qubits haben, so dass für die lokale Operation am ersten Qubit weiterhin gilt

$$\begin{pmatrix} z_{0j} \\ z_{1k} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha z_{0j} + \beta z_{1j} \\ -\beta^* z_{0k} + \alpha^* z_{1k} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Die lokale Invarianz ergibt sich nun aufgrund von  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  in

$$\begin{aligned} c &= 2|z_{00}z_{11} - z_{01}z_{10}| \\ &= 2|(\alpha z_{00} + \beta z_{10})(-\beta^* z_{01} + \alpha^* z_{11}) - ((\alpha z_{01} + \beta z_{11})(-\beta^* z_{00} + \alpha^* z_{10}))|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Es folgt, dass eine Änderung des Wertes der concurrence einer nichtlokalen Operation bedarf, die an *beiden* Qubits zugleich vorgenommen wird. In Abb. 3.6 wird die 'siebte'

Dimension visualisiert: Für  $c = 0$  ergibt sich der sechsdimensionale Raum der Produktzustände (3.27), für  $c = 1$  der Raum der maximal verschränkten Bell-Zustände

$$\begin{aligned} |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \\ |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für festes  $0 \leq c \leq 1$  wird aus der siebendimensionalen Kugeloberfläche, die von den Amplituden  $z_{ij} = \sqrt{p_{ij}}e^{i\phi_{ij}}$  parametrisiert wird, eine sechsdimensionale Hyperfläche herausgeschnitten, die jeweils invariant unter lokalen Transformationen ist.

An dieser Stelle wollen wir die kurze Einführung in die mathematische Struktur hinter dem System von zwei Qubits beenden, auch wenn wir uns hier erst am Ufer eines tiefen Wassers befinden, in dem noch viele Schätze zu bergen sind, wie in Abschnitt 7.5 noch etwas weiter ausgeführt wird. Es kann nicht Aufgabe der allgemein bildenden Schule sein, diese Schätze zu entdecken, sehr wohl aber, darauf aufmerksam zu machen, dass es sich hier lohnt, auf Schatzsuche zu gehen. Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie dieses Thema schulgerecht aufgearbeitet werden kann, wollen wir zuvor noch auf die mathematische Beschreibung der Auswertung der Messergebnisse eingehen.

## Die Korrelationsfunktion

Die Messung an einem Qubit ist nichts anderes als die Wechselwirkung des Qubits mit Freiheitsgraden aus der Umgebung. Durch diese Wechselwirkung ergibt sich schließlich eine makroskopisch sichtbare konstruktive (bzw. destruktive) Interferenz, die zu einem Signal (bzw. zu keinem Signal) im Detektor führt. Die vier Messergebnisse (00, 01, 10, 11) bei den Detektoren A und B sind miteinander korreliert, wenn die concurrence von Null verschieden ist,  $c \neq 0$ . Die beiden Detektoren können räumlich weit getrennt voneinander liegen. Bezeichnen wir bei  $N$  Messungen die Anzahl der vier möglichen Ergebnisse jeweils mit  $N_{00}, N_{01}, N_{10}, N_{11}$  ( $N = N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11}$ ). Ein Maß für die Korrelation zwischen den Ergebnissen bei den Detektoren A und B ist durch die Korrelationsfunktion

$$C_{\text{exp.}} = \frac{(N_{00} + N_{11}) - (N_{01} + N_{10})}{(N_{00} + N_{11}) + (N_{01} + N_{10})} \quad (3.32)$$

definiert. Es gilt  $-1 \leq C \leq +1$ . Die Messergebnisse sind stark korreliert (antikorreliert) für  $C \simeq 1$  ( $C \simeq -1$ ), für  $C \simeq 0$  sind die Messungen voneinander unabhängig. Die Korrelationsfunktion hängt von der gewählten Messbasis der Detektoren A und B ab. Diese müssen nicht übereinstimmen, denn diese kann jeweils durch eine lokale Operationen am Detektor A bzw. Detektor B einzeln verändert werden, wie in (3.29) mathematisch beschrieben. Im Experiment entspricht dies z.B. einer Einstellung des Polarisationsdrehers bei Alice, und unabhängig davon bei Bob.

Für das theoretische Gegenstück zur experimentellen Korrelationsfunktion (3.32) ersetzt man die relativen Häufigkeiten  $N_{ij}/\sum_{kl} N_{kl}$  durch Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij} = |z_{ij}|^2$  und erhält

$$C_{\text{theo.}} = (p_{00} + p_{11}) - (p_{01} + p_{10}). \quad (3.33)$$

Verschränkung zweier Qubits kann in geeigneten Experimenten auch für beliebig weit voneinander entfernten Detektoren vergewissert werden. Dann tritt die folgende seltsam anmutende Situation auf. Denken wir unabhängige, aufeinanderfolgende Qubit-Paare erzeugt, jedesmal im selben Zustand, z.B.  $|\phi^+\rangle$ , siehe Gleichung (3.31). Anfänglich mögen die beiden Qubits eines Paares räumlich eng beieinander liegen, sich danach jedoch voneinander entfernen und jedes auf einen Detektor treffen, der auf 0 oder 1 prüft. Jedesmal hat man dann eines der vier möglichen Messergebnisse  $\{00, 01, 10, 11\}$ . Nach vielen registrierten Paaren darf man die angesammelten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  nehmen und mit den von der Quantenmechanik vorhergesagten Werten  $|z_{ij}|^2$  vergleichen. Nun sind wegen der angenommenen Verschränkung die vier  $p_{ij}$  nicht voneinander unabhängig. Insbesondere sind die beiden Wahrscheinlichkeiten  $p_{0j}$  mit  $j = 0$  oder 1 (Alice misst 0, Bob misst  $j = 0$  oder 1) im Allgemeinen verschieden von den beiden Wahrscheinlichkeiten  $p_{1j}$  (Alice misst 1, Bob  $j = 0$  oder 1). Dieser Sachverhalt kann einem seltsam vorkommen, denn er läßt doch ein zur anthropomorphisierenden Redeweise, der Detektor Bob wüsste irgendwie, und zwar instantan, was am weit entfernten Detektor Alice passiert; oder zur 'objektivierenden' Redeweise, es müsse eine instantane nichtlokale Wechselwirkung zwischen den beiden Qubits eines Paares geben, die jene nichtlokalen Korrelationen erzeugt. Der Erfolg der Quantenphysik z.B. bei der Berechnung von Atomspektren und bei der Erklärung chemischer Bindungen im Molekül beruht auf der Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten zu komplexen Amplituden, und der mathematischen Beschreibung der Zeitentwicklung der Amplituden durch die Schrödinger-Gleichung. Dass sich daraus zwangsläufig nichtlokale Korrelationen ergeben, hat bereits Schrödinger erkannt.

## Das EPR-Paradoxon

Einstein, Podolski und Rosen fanden in einer inzwischen zu Berühmtheit gelangten Arbeit aus dem Jahr 1935 den gerade beschriebenen Befund nicht nur seltsam, sondern paradox. Den Dreien zur Ehre spricht man heute vom EPR-Paradoxon [30]. Im Gegensatz zu Schrödinger erschien ihnen die Quantenmechanik als zutiefst suspekt. Trotz aller schon damals vorliegenden Erfolge der Quantenmechanik vermuteten sie die Existenz einer tieferliegenden 'realistischen lokalen Theorie' ohne 'spukhafte Fernwirkung'.

Dieses scheinbare Paradoxon hatte aber kaum Einfluss auf den Erfolg der Quantenphysik und wurde lange Zeit nur wenig beachtet, da es sich zunächst nur um eine philosophische Debatte handelte, die nicht mit konkreten Experimenten belegt oder widerlegt werden konnte. Für konkrete Rechnungen war der quantenmechanische Formalismus auch ohne Verständnis für die Nichtlokalität und deren tiefere Bedeutung ein schlagkräftiges Werkzeug. Alternative Theorien wie z.B. die Bohm'sche Quantenmechanik, die auf einem lokalen und realistischen Ansatz beruhen, wurden parallel zur Quantenphysik weiterentwickelt [11], hatten aber für die stürmische Entwicklung der Festkörperphysik, der Atom-, Molekül- und Kernphysik im 20. Jahrhundert nur wenig Bedeutung.

Ein wichtiger Fortschritt wurde von J. Bell im Jahre 1964 erzielt, der erstmals ein quantitatives Maß zur Unterscheidung lokaler, realistischer Theorien von der Quantenphysik bei der Messung an einem System von zwei Qubits veröffentlicht hatte [7]. Pionierarbeiten bei Experimenten mit verschränkten Zuständen wurden in den 1980iger Jahren von A. Aspect et. al. veröffentlicht [4] [5], durch die erstmals ein Ausschluss bestimmter Klassen von lokalen Theorien möglich wurde. Ein experimenteller Durchbruch bei der Arbeit mit verschränkten Paaren von Photonen wurde von Zeilinger im Jahr 1995 veröffentlicht [70]. Durch immer weitergehende Messungen an verschränkten Zuständen können mehr und mehr alternative Theorien experimentell widerlegt werden [39].

Heutzutage sehen die meisten Quantenphysiker kein Paradoxon, sondern eine ganz und gar unklassische und daher umso interessantere Eigenschaft von Quantenphänomenen. Man vermeidet die obige, inzwischen als irreführend geltende objektivierende Redeweise. Wie in Gleichung (3.24) gesehen, spielt die Reihenfolge der Messung von Alice und Bob am verschränkten Zustand für das Messergebnis keine Rolle. Der verschränkte Zustand kann nicht dem Ort des Detektors Alice alleine zugeschrieben werden, oder dem Ort des Detektors Bob. Korrelation entsteht, weil zwei räumlich getrennte Detektoren *eine* Wellenfunktion auslesen.

## Experimentelle Repräsentation

Für die didaktische Aufarbeitung bietet sich das Beispiel von verschränkten Photonen aus mehreren Gründen an. Zum einen sind optische Experimente wie z.B. das Doppelspaltexperiment bereits ein fester Teil des Lehrplans, auf die aufgebaut werden kann. Zum anderen sind Photonen ein einfaches Modellsystem, da die gegenseitige Wechselwirkung im Gegensatz zu z.B. Elektronen praktisch vernachlässigt werden kann. Verschränkung entsteht lediglich aufgrund der Ununterscheidbarkeit und dem Superpositionsprinzip. Am Institut für Didaktik der Physik der Universität Erlangen-Nürnberg wurde kürzlich ein didaktisch motivierter Aufbau von Experimenten realisiert, mit dem verschränkte Photonen erzeugt werden können [20]. Durch parametrische Fluoreszenz entsteht in einem nichtlinearen, doppelbrechenden Beta-Bariumborat (BBO) Kristall ein Paar von Photonen. Der Brechungsindex entlang der optischen Achse  $n_o$  ist größer als der entlang der außerordentlichen Achse,  $n_e < n_o$ . Aus historischen Gründen werden die Photonen im Paar i (idler) und s (signal) genannt. Es gelten Energie- und Impulserhaltung im Kristall

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \omega_i + \omega_s \\ \vec{k}_0 &= \vec{k}_i + \vec{k}_s.\end{aligned}\tag{3.34}$$

In der Quantenoptik wird der Begriff 'Impulserhaltung' oft durch 'Phasenanpassung' ersetzt, da Photonen als Wellenpakete mit endlicher Kohärenzlänge modelliert werden. Die Photonen des erzeugten Paares verlassen den Kristall entlang von je einem Kegel, mit ordentlicher beziehungsweise außerordentlicher Polarisation. Verschränkung entsteht dann, wenn zwei Photonen ununterscheidbar werden und zu einer Superposition verschmelzen.

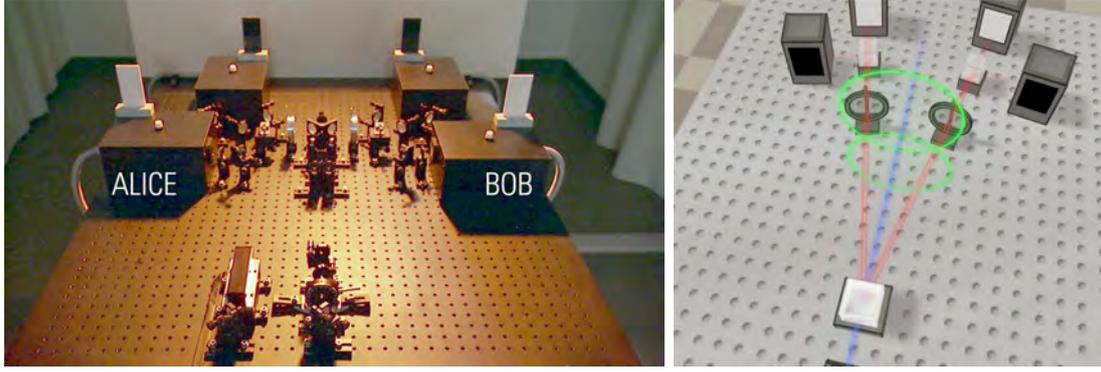


Abbildung 3.7: Links: Experimenteller Aufbau einer Typ-II Quelle von polarisationsverschränkten Photonenpaaren (Didaktik der Physik, Universität Erlangen, [20]). Rechts: Schematische Visualisierung des BBO-Kristalls (weißer Quader), des Pumplasers (in blau), der Emissionskegel des ordentlichen und außerordentlichen Strahls (in grün), der beiden Schnittlinien der Kegel (in rot), sowie der Detektoren Alice und Bob, die jeweils in einer wählbaren Messachse die Polarisation vermessen.

Polarisationsverschränkung kann somit bei Entartung der Energie des Photonenpaares,  $\omega_i = \omega_s = \omega_0/2$ , und bei Überlagerung beider Wellenpakete entstehen.

Es gibt zwei mögliche Aufbauten zur Erzeugung verschränkter Photonenpaare, die sogenannte Typ-I Quelle und die Typ-II Quelle. Bei der Typ-I Quelle werden beide Kegel vollständig überlagert. Bei der Typ-II Quelle erfolgt die Überlagerung so, dass sie sich in zwei Schnittlinien treffen. Nur Photonen, die entlang der Schnittlinien den Kristall verlassen, sind verschränkt. Für die Überlagerung der Kegel bei der Typ-I Quelle ist ein Aufbau mit zwei BBO-Kristallen nötig, im Fall von Typ-II reicht ein BBO-Kristall. Mit der Typ-I Quelle lassen sich auch Photonenpaare herstellen, die nicht maximal verschränkt sind (concurrency  $c < 1$ ), allerdings ist der Verschränkungskontrast klein und muss mit zusätzlichen Iriden zur Einengung des Strahls optimiert werden. Mit der Typ-II Quelle lassen sich maximal verschränkte Photonenpaare mit gutem Verschränkungskontrast herstellen. Der Verschränkungskontrast  $v$  ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, dass das detektierte Photonenpaar tatsächlich verschränkt ist. Soll z.B. das maximal verschränkte Photonenpaar

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle) \quad (3.35)$$

erzeugt werden, so wird auch ein kleiner Anteil von Produktzuständen  $|HV\rangle$  und  $|VH\rangle$  beigemischt sein. Der gemischte Zustand kann mit der Dichtematrix

$$\rho_V = v|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + (1 - v)\rho^* \quad (3.36)$$

beschrieben werden, den sogenannten Werner-Zuständen. Der Anteil

$$\rho^* = \frac{1}{2}|HV\rangle\langle VH| + \frac{1}{2}|VH\rangle\langle HV|$$

bezeichnet den Anteil von nicht verschränkten Zuständen im Gemisch. Details zum Aufbau des Experiments zu didaktischen Zwecken sind in Arbeiten von P. Bronner et. al. [22], [20] veröffentlicht und finden sich auch auf der Internetseite [www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de). In Abb. 3.7 wird der experimentelle Aufbau einer Typ-II Quelle unserer elementarisierten Visualisierung mit eingezeichnetem Strahlengang gegenübergestellt. In blau ist der Pumplaser, in grün die beiden Kegel und in rot die Schnittlinien der beiden Kegel gezeigt. Außerhalb der Schnittlinien sind die beiden Photonen auf dem Kegel unterscheidbar, dort entstehen die Zustände  $|HV\rangle$ , wobei das Photon auf dem oberen Kegel horizontal, das auf dem unteren vertikal polarisiert ist. Auf den Schnittlinien werden die Zustände  $|HV\rangle$  und  $|VH\rangle$  ununterscheidbar, da beide Zuordnungen der Detektoren A und B zum oberen bzw. unteren Kegel auf den Schnittlinien gleichermaßen möglich sind. Dort entsteht die Superposition  $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)$ . Es wird nur die Polarisation solcher Photonenpaare vermessen, die sich auf den beiden in rot gezeigten Schnittlinien befinden. Die zwei Detektorpaare (A, B) vermessen die Polarisation in einer durch den jeweiligen Polarisationsdreher vorgegebenen Basis. Für die Detektorpaare (A, B) haben sich die Namen 'Alice und Bob' etabliert, die wir übernommen haben. Es gibt vier mögliche Messergebnisse bei jedem einzelnen Experiment, da sowohl bei Alice als auch bei Bob das Photon reflektiert oder transmittiert werden kann. Durch zusätzliche optische Komponenten ist es möglich, mit diesem Aufbau jeden der vier Bell-Zustände (3.31) experimentell zu erzeugen [70].

## Was gehört zur schulischen Allgemeinbildung?

Sowohl der experimentelle Aufwand als auch die theoretische Deutung sind anspruchsvoll und gehen in der angedeuteten Tiefe über den bisher üblichen Schulstoff hinaus. Es ist eine berechtigte Frage, ob Verschränkung ein relevantes Thema für die Schule ist. Dafür lassen sich gute Argumente finden, die wir hier anführen wollen. Ununterscheidbarkeit und das Superpositionsprinzip z.B. bei Mehr-Elektronensystemen führen notwendigerweise zum Thema Verschränkung. Aus Sicht des Schulstoffes wäre es naheliegend, das Atom- und Molekülorbitalmodell und somit chemische Bindungen durch ein Verständnis von Verschränkung besser zu erklären. Weiterhin weisen moderne Experimente z.B. mit Photonen den Weg zu technologischen Anwendungen, die sich auf dem Gebiet der Quanteninformation ergeben. Quantenkryptographie und das noch entfernte Ziel des Quantencomputers sind hierzu prominente Beispiele.

Neben diesen Anwendungen bietet das Thema Verschränkung sich auch an, um physikalische Theoriebildung in der Schule zu diskutieren. Der eigentliche Paradigmenwechsel beim Übergang von der klassischen Physik zur Quantenphysik könnte wie folgt beschrieben werden. In der klassischen Physik wird jede Messgröße, wie z.B. die Masse, Geschwindigkeit, Energie etc. durch einen Parameter in der Theorie beschrieben. Es

besteht eine eindeutige Beziehung zwischen beobachtbaren Größen in der mathematischen Beschreibung, und der experimentellen Realisierung. Bei statistisch definierten Größen wie z.B. der Temperatur kann doch zumindest im Prinzip über  $k_B T = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$  ein Zusammenhang zwischen der makroskopischen Messgröße und den mikroskopischen Freiheitsgraden hergestellt werden. Die Mittelung über in der Größenordnung  $10^{23}$  Teilchen pro Mol erfolgt in der klassischen Physik nicht aus der prinzipiellen Unmöglichkeit, die kinetische Energie des einzelnen Moleküls zu messen, sondern aus Denkökonomie.

In der Quantenphysik wird die statistische Interpretation zum Grundprinzip erhoben und insofern erweitert, dass jede Wahrscheinlichkeit  $p$  pro Freiheitsgrad zu einer komplexen Amplitude  $\psi = \sqrt{p}e^{i\phi}$  verallgemeinert wird. Dadurch ergibt sich bei der theoretischen Beschreibung ein *exponentiell wachsender Parameterraum*, von denen sich durch eine lokale Beobachtung nur ein winziger Bruchteil erfassen lässt. Der weitaus größere Teil der Parameter beschreibt nichtlokale Korrelationen oder ist als 'irrelevante Phase' unbeobachtbar. Die eins-zu-eins Beziehung zwischen beobachtbaren Größen und der mathematischen Beschreibung bricht in sich zusammen. Durch die Quantenphysik wird der mathematische Raum - der sogenannte Hilbertraum bzw. die Quantendimension - "hinter" den Beobachtungen zu einem faszinierenden und komplexen Gebilde mit Eigenleben, der nur mittelbar mit den Beobachtungen zusammenhängt<sup>5</sup>.

### 3.4 Visualisierung verschränkter Zustände

Als zentrales Beispiel für die Thematik Nichtlokalität und Verschränkung in der Quantenphysik wählen wir die Typ-II Quelle von polarisationsverschränkten Photonen, wie sie erstmals von Zeilinger 1995 vorgestellt wurde.

Wie in Abb. 1.4 gezeigt, baut unser didaktischer Ansatz auf zwei Säulen auf, zum einen auf einem Spielfilm, zum anderen auf Visualisierungen von Theorie und Experiment in Lernstationen der DVD-ROM *Quantendimensionen*. Im Spielfilm wird die Thematik Verschränkung und Nichtlokalität indirekt und durch intuitive Bilder ausgedrückt. Die Bilder im Spielfilm deuten auf bestimmte experimentelle und mathematische Zusammenhänge, die im zweiten, interaktiven Teil der DVD-ROM erklärt werden. Die DVD-ROM nutzt zur Menüsteuerung wie in Abb. 3.8 gezeigt die Metapher eines U-Bahnplans: U-Bahnlinien verbinden verschiedene Lernstationen, und zeigen deren innere Vernetzung, jeweils von einem Startbahnhof zu einem Zielbahnhof. Jede einzelne Lernstation besteht wiederum aus einzelnen *Slides*. Die Slides einer Station sind jeweils einem der vier Quadranten (Abb. 3.4) zugeordnet. Jedes Slide bezieht sich somit auf eine der vier Repräsentationsebenen der Quantenphysik. In Abb. 3.9 ist als Beispiel die Zuordnung der Slides in der Lernstation U1-11 (Verschränkte Photonen) zu den Repräsentationsebenen gezeigt. In dieser Lernstation wird die Korrelationsfunktion eines Paares von verschränkten Photonen experimentell bestimmt und theoretisch aus Sicht der Quantenphysik gedeutet.

---

<sup>5</sup>In der Sprache der modernen Feldtheorie sind physikalische Zustände durch  $Q_B|\text{phys}\rangle = 0$  definiert, wobei  $Q_B$  die BRST-Ladung ist, [66].

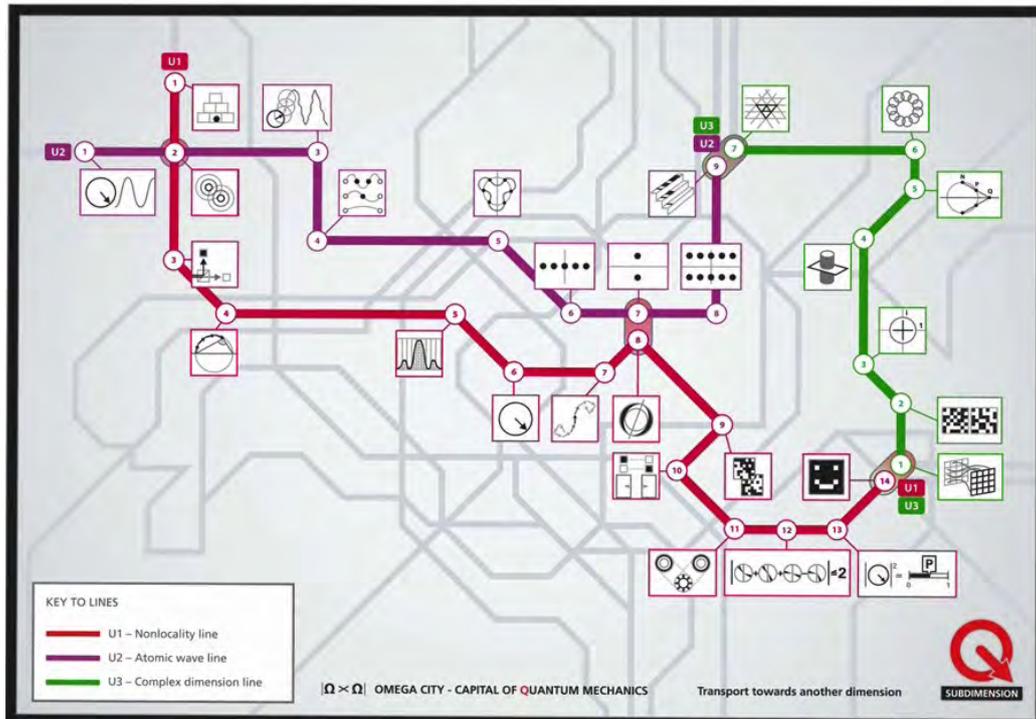


Abbildung 3.8: Der U-Bahnplan von *Omega-City*. Zur Erkundung der *Quantendimensionen* stehen drei miteinander vernetzte U-Bahnlinien zur Verfügung, die U1, U2 und U3. Die Linie U1 beschreibt in 14 Lernstationen die Eigenschaften von einzelnen Photonen (U1-1 bis U1-8), sowie von verschränkten Photonen (U1-9 bis U1-14).

Jedes Slide besteht aus Animationen und erklärenden Texten, siehe Abb. 3.9. Text und Animation sind in kurze *Sequenzen* eingeteilt. Durch Mausklick auf eine einzelne Textsequenz wird der entsprechende Text vorgelesen und die passende Animation abgespielt. Die DVD-ROM ist somit - vergleichbar mit einer musikalischen Partitur, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben - in die folgenden Ebenen aufgeteilt:

- Spielfilm und U-Bahn-Netzwerk
- Einzelne U-Bahnlinie
- U-Bahnstation bzw. Lernstation
- Slide
- Text- und Animationssequenz
- Einzelne Worte und Bilder

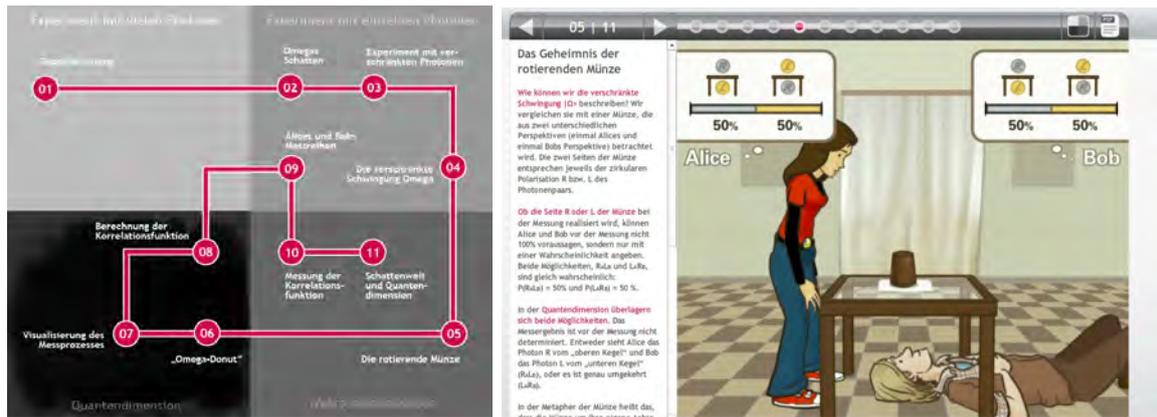


Abbildung 3.9: Links: Zuordnung der elf Slides der Lernstation U1-11 zu den in Abb. 3.4 definierten vier Quadranten. Rechts: Beispiel für den Aufbau eines Slides in Text- und Animationssequenzen. Rot unterlegte Textstellen können angeklickt werden, dann wird die Textsequenz vom Sprecher vorgelesen, während die entsprechende Animation dazu abgespielt wird.

Neben dieser vertikalen Strukturierung in Ebenen gibt es noch die horizontale in die verschiedenen Repräsentationsebenen bzw. Quadranten. Eine enge Verzahnung von Theorie und Experiment wird auf diese Weise ermöglicht, und den Schülern als wichtiges Grundprinzip vermittelt.

Auch in der Lerntheorie gibt es Hinweise, dass eine solche Strukturierung lernförderlich sein kann: Auf methodischer Ebene schlagen Luiten, Ames und Ackerson [77] sogenannte 'Advance Organizer' vor, die Lernenden bereits vor der Unterrichtseinheit einen Überblick über das Thema geben. Der 'Advance Organizer' soll im Laufe des Lernprozesses fortlaufend zur Verknüpfung genutzt werden. Die vertikale Strukturierung in verschiedene Ebenen in Kombination mit der horizontalen Strukturierung durch die vier Quadranten kann als 'Advanced Organizer' genutzt werden. Ob diese Strukturierung im Falle der Quantenphysik tatsächlich zu besseren Resultaten führt, ist Gegenstand weiterer Untersuchungen, wie in Abschnitt ?? weiter ausgeführt wird.

## Bildmotive und Repräsentationsebenen

Als Beispiel für die Variation eines Themas durch die verschiedenen Repräsentationsebenen wählen wir das Thema *Korrelation*. Wir unterscheiden die intuitive, spielerische Repräsentation, die experimentelle und die theoretische. Im Spielfilm wird das Thema intuitiv und ohne Anspruch an wissenschaftliche Strenge inszeniert. Im DVD-ROM Teil wird das Thema mathematisch fundiert und durch Experimente belegbar erläutert.

Beginnen wir mit der Ebene des Spielfilms. Im Spielfilm gibt es vier Charaktere: Alice und Bob, den mysteriösen Omega, und den Hausmeister von Omega. Das Drehbuch vom Spielfilm ist im elektronischen Anhang dieser Arbeit beigefügt. Die Handlung des Films ist einfach: Alice und Bob suchen nach Omega - finden ihn aber nicht. Der 'Hausmeister',



Abbildung 3.10: Links: Filmszene im Spielfilm *Schattenwelten*. Rechts: Die entsprechende Visualisierung in der Lernstation U1-10, bei der die vier möglichen Zustände  $\{(zu, zu), (offen, offen), (zu, offen), (offen, zu)\}$  der Türen mit den vier möglichen Messergebnissen der Detektoren Alice und Bob in Bezug gesetzt werden.

gespielt von Prof. Dr. Harald Lesch, begleitet beide bei ihrer Suche und gibt doppeldeutige Hinweise. Die Bedeutung der Rollen kann auf zwei verschiedene Weisen gedeutet werden: zum einen als fiktive Charaktere (Alice als Studentin von Prof. Omega, Bob ein Freund von Alice), zum anderen als Detektorpaar Alice und Bob, siehe Abb. 3.7, Bell-Zustand 'Omega' bzw.  $|\phi^+\rangle$ , Gleichung (3.31). Der Humor in der Handlung entsteht dadurch, dass zwischen beiden Interpretationen hin- und hergewechselt werden kann. Die Rolle eines Physikprofessors als 'Hausmeister von Omega' ist insofern stimmig, weil die Naturgesetze nicht von Physikern gemacht werden, sondern bestenfalls beschrieben und verwaltet werden. Aus dieser Sicht kann man eine Diskussion darüber anregen, ob die Rolle eines Wissenschaftlers und die eines Verwalters bzw. Hausmeisters nicht mehr Gemeinsamkeiten hat, als man auf den ersten Blick meint.

Das Thema Korrelation spiegelt sich in folgender Szene wider: Die Charaktere Alice und Bob befinden sich in einem Raum mit zwei Türen. Je nach dem, ob die eine Tür offen oder geschlossen ist, kann die andere Tür geöffnet werden oder nicht.

#### *Zwei Türen - Drehbuchausschnitt*

ALICE: Sie könnten uns ja wenigstens sagen, was Sie wissen. Hat Omega Ihnen irgend etwas gesagt? Hatte er eine Reise vor? Wollte er jemanden treffen?

HAUSMEISTER: Ich weiß nicht. Ich bin nur der Hausmeister.

ALICE (*scharf*): Wissen Sie es nicht oder wollen Sie es nicht sagen??

HAUSMEISTER (*bleibt gelassen*): Ich? Wenn ich hier bin, alle paar Tage, schau ich nur, ob die Fenster geschlossen sind und ob es etwas zu reparieren gibt. Ich kümmere mich um die Türen...

(*geht nahe an ALICE heran, in völlig anderem Ton*) Noch nie etwas von selektiver Wahrnehmung gehört?

BOB und ALICE schauen sich an. Ihr Blick sagt "Der weiß mehr, als er zugibt." Bei

*der folgenden Suche schauen sie hin und wieder etwas finster zum HAUSMEISTER, der gelassen an der Wand lehnt und ihnen zusieht.*

ALICE: Komm. Lass uns systematisch vorgehen.

BOB: Wo fangen wir an?

ALICE: Diese Schachspiele, die keine sind. Das kommt mir so vor, als hätte er damit etwas ganz anderes vorgehabt. Das ist doch... Moment mal - Geh mal an diese Tür da!

BOB: Die Badezimmertür?

ALICE: Mach die Tür auf!

BOB: Verschlossen!

ALICE: Schwarz! Nochmal!

BOB: Verschlossen!

ALICE: Schwarz! Nochmal!

BOB: Offen!

ALICE: Weiß! Und jetzt (*geht auf die andere Tür zu*) ist diese Tür verschlossen! Bob, es ist immer entweder die eine oder die andere Tür geöffnet.

\* \* \*

Für die Realisierung des Spielfilms müssen Schauspieler engagiert, ein Filmteam zusammengestellt (Kamera, Licht, Ton, Requisite, Maske, etc), und ein Drehort lokalisiert werden. Nach der Produktion müssen Bild und Ton nachbearbeitet werden, Filmmusik komponiert und die Szene im Schnitt mit gutem Rhythmus in die Gesamthandlung eingebettet werden. Eine Filmproduktion für sich genommen hat schon viele Dimensionen, derer man sich erst bewusst wird, wenn man es selber versucht. Das Thema 'bedingte Wahrscheinlichkeit' bzw. Korrelation erhält durch den Film einen Kontext, der nur noch bedingt etwas mit Physik zu tun hat. Physikalisches Denken hat sich aber immer aus Kontexten heraus entwickelt, und Abstraktion ist nur dann möglich, wenn sie von einem anschaulichen 'Anker' aus startet. Machen wir also die Gedankenschritte, die uns Schritt für Schritt von dieser Szene bis zu der Theorie der Quantenphysik führen. Die Abstraktion, die von den Schülern vorgenommen werden soll, kann wie folgt beschrieben werden. Es gibt vier verschiedene Zustände, die durch

$(\blacksquare, \blacksquare), (\square, \square), (\blacksquare, \square), (\square, \blacksquare)$

symbolisiert werden. Die Symbole können mathematisch auch umgedeutet werden als  $\blacksquare \equiv 0, \square \equiv 1$ . Für diese vier Möglichkeiten gibt es vier Wahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  mit  $i, j \in 0, 1$ . Durch die Inszenierung und den Alltagsbezug (Tür auf/zu) ergibt sich neben der abstrakten Ebene eine Hilfestellung, die auch emotional besetzt ist. Durch gute Filmmusik und eine humorvolle Handlung kann die Motivation, diesen Anker als Startpunkt zur weiteren Abstraktion zu nutzen, vermutlich mehr Schüler erreichen, als die abstrakte Beschreibung ohne Film. Erste Schulversuche sind bereits durchgeführt worden, die in Kapitel 5 näher erläutert werden.

Im Spielfilm ist stets ein Verweis auf die Lernstation gegeben, zu der die entsprechende Szene gehört. Im DVD-ROM Teil wird das Filmzitat genauer erklärt. Wie in Abb. 3.10 gezeigt, wird in der Lernstation U1-10 die Assoziation der vier Zustände

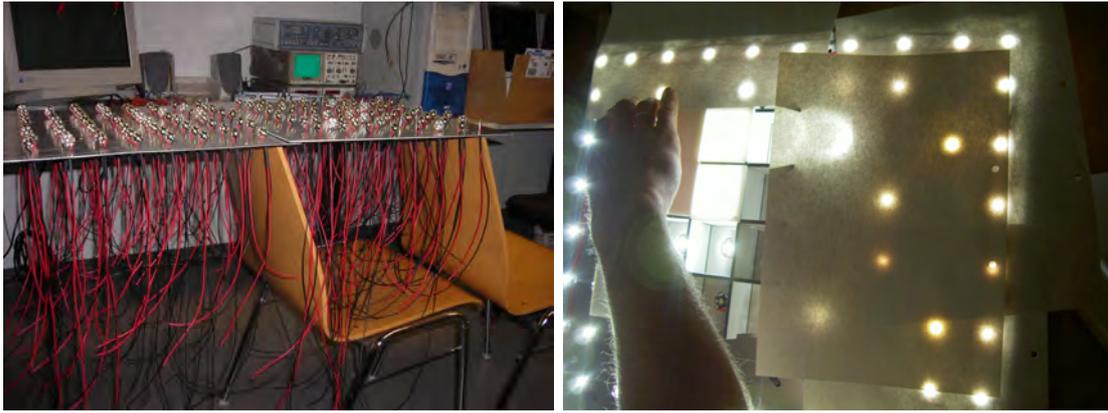


Abbildung 3.11: Vorbereitung der Requisite für den Spielfilm. Links: Die LEDs der einzelnen Felder der beiden Schachbretter können einzeln angesteuert werden. Rechts: Tests mit LEDs auf den Schachfeldern (Bilder: Marian Olef).

$\{(\blacksquare, \blacksquare), (\square, \square), (\blacksquare, \square), (\square, \blacksquare)\}$  mit den vier möglichen Messergebnissen des Detektorpaares Alice und Bob erzielt.

Für eine Messreihe von Alice und Bob ergibt sich in der Visualisierung durch schwarze und weiße Felder für beide jeweils ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster. Die Messdaten werden im Spielfilm auf einem 'Schachbrett' inszeniert. Alice und Bob haben je ein Schachbrett; jedes einzelne Schachfeld kann mit LED-Lichtern angesteuert werden, siehe Abb. 3.11.

Im Spielfilm werden zufällig flackernden Schwarz-Weiß Zufallsmuster dargestellt, allerdings ohne weitere Erklärung. Hier können Schüler den Abstraktionsschritt von Schachfeldern zu Datenspeichern vornehmen, und zu möglichen Korrelationen zwischen den Messergebnissen (bzw. Zufallsmustern auf den Schachfeldern) von Alice und Bob.

## Visualisierung der experimentellen Korrelationsfunktion

Die eigentliche Auswertung der Messergebnisse erfolgt im DVD-ROM Teil in den Stationen U1-10 und U1-11. Erinnern wir uns an die Definition der experimentellen Korrelationsfunktion (3.32),

$$C_{\text{exp.}} = \frac{(N_{00} + N_{11}) - (N_{01} + N_{10})}{(N_{00} + N_{11}) + (N_{01} + N_{10})}. \quad (3.37)$$

Die experimentell ermittelte Korrelationsfunktion wird durch Überlagerung der Schachfelder visualisiert, siehe Abb. 3.12. Bezeichnen wir die Gesamtanzahl von Messungen mit  $N$ . Die Messungen, bei denen Alice und Bob verschiedene Messergebnisse erhalten haben, sind in grau dargestellt und entsprechen der Anzahl  $N_{01} + N_{10} \equiv N_G$ . Die Korrelationsfunktion kann in dieser Visualisierung einfach durch das Abzählen grauer Kästchen bestimmt werden und ergibt

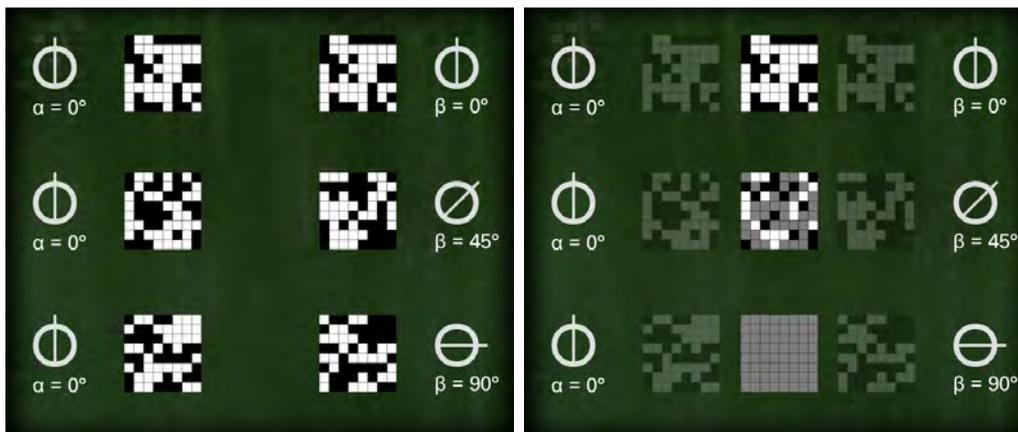


Abbildung 3.12: Links: Visualisierung von jeweils 64 Messergebnissen im Zustand  $|\phi^+\rangle$  von Alice und Bob in drei verschiedenen Winkelstellungen. Rechts: Visualisierung der winkelabhängigen Korrelationsfunktion. Die grauen Felder zeigen unterschiedliche Messergebnisse bei Alice und Bob an. Die Farbwahl 'schwarz' und 'weiß' für Reflexion und Transmission ist willkürlich; die Korrelationsfunktion kann auch bei umgekehrter Farbdefinition durch 'Überlagerung der Schachfelder' gewonnen werden.

$$C_{\text{exp.}}(\alpha, \beta) = 1 - 2 \frac{N_G(\alpha, \beta)}{N}. \quad (3.38)$$

Je nach Winkelstellung  $(\alpha, \beta)$  der Polarisationsdreher bei Alice und Bob ergibt sich ein anderer Wert für die Korrelationsfunktion. Das Auswerten der Messergebnisse ist in dieser Form leicht in der Schule durchführbar. Die Klasse kann in Gruppenarbeit in 'Alice und Bob'-Paare eingeteilt werden. Die einzelnen Gruppen erhalten verschiedene Schwarz-Weiß Zufallsmuster und bestimmen jeweils die Korrelationsfunktion. Die Messergebnisse können für jede Winkelstellung in einem Diagramm aufgezeichnet werden. Das Resultat ist in Abb. 3.15 zu sehen<sup>6</sup>. Auf diese Weise kann die experimentelle Korrelationsfunktion schulgerecht eingeführt werden.

## Visualisierung der Bell-Zustände: Die Quanten-Münze

Für die Visualisierung der Theorie nutzen wir zwei zentrale Leitbilder. Wir betrachten zunächst die vier Bell-Zustände (3.31), die wir für den Fall von polarisationsverschränkten Photonen durch Basistransformation wie folgt umschreiben:

<sup>6</sup>Der Unterrichtsverlauf ist auf der DVD-ROM *Quantendimensionen* dokumentiert.

$$\begin{aligned}
|\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle \pm |VH\rangle) \\
|\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|RL\rangle + |LR\rangle) \\
|\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle - |VV\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Hierbei bezeichnet  $|H\rangle, |V\rangle$  die horizontale und vertikale lineare Polarisation. Die je um 45 Grad gedrehte lineare Polarisation bezeichnen wir mit  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle)$ . Die rechts- und linkszirkular polarisierte Basis bezeichnen wir mit  $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle)$  und  $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle)$ , wie schon bei der Diskussion der Bloch-Kugel gesehen, siehe Abb. (3.1). Durch diese Basistransformation ergibt sich eine einfache und für Schüler griffige Metapher: Die Bell-Zustände können mit einer Münze auf einem Glastisch verglichen werden, die von Alice und Bob jeweils von oben und unten betrachtet wird, siehe Abb. 3.13. Im Gegensatz zu einer 'klassischen' Münze ist die Quantenmünze vor der Messung noch nicht gefallen, sondern rotiert unsichtbar in einem Becher. Durch die Rotation wird die Superposition der beiden Möglichkeiten visualisiert. Die 'klassische' Wahrscheinlichkeit  $p = 1/2$  wird in der Superposition zur Amplitude  $1/\sqrt{2}$  verallgemeinert. Bezeichnen wir mit  $|P_1\rangle$  die eine Seite der Münze, und mit  $|P_2\rangle$  die zweite, ergibt sich vor der Messung für die rotierende Münze die Überlagerung

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|P_1^{\text{Alice}} P_2^{\text{Bob}}\rangle + |P_2^{\text{Alice}} P_1^{\text{Bob}}\rangle). \tag{3.40}$$

Vor der Messung ist die Münze noch nicht gefallen, beide Möglichkeiten koexistieren als Superposition. Nach der Messung ist die 'Münze gefallen', die Superposition ist zerstört. Die Messung erfolgt in einer bestimmten Basis. Wenn die Messbasis von Alice und Bob ebenfalls durch  $|P_1\rangle, |P_2\rangle$  gegeben ist, ergibt sich immer Antikorrelation: Entweder Alice sieht  $|P_1\rangle$  (entsprechend Detektor  $\square$ ) und Bob  $|P_2\rangle$  (entsprechend Detektor  $\blacksquare$ ), oder es ist genau umgekehrt. Vergleichen wir mit den vier Bell-Zuständen (3.39). Durch die Assoziation  $\{|P_1\rangle \rightarrow |H\rangle, |P_2\rangle \rightarrow |V\rangle\}$  ergibt sich  $|\psi^+\rangle$ , mit  $\{|P_1\rangle \rightarrow |+\rangle, |P_2\rangle \rightarrow |-\rangle\}$  ergibt sich  $|\phi^-\rangle$ , und mit  $\{|P_1\rangle \rightarrow |R\rangle, |P_2\rangle \rightarrow |L\rangle\}$  ergibt sich  $|\phi^+\rangle$ . Für das Minuszeichen im antisymmetrischen Bell-Zustand  $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|P_1^{\text{Alice}} P_2^{\text{Bob}}\rangle - |P_2^{\text{Alice}} P_1^{\text{Bob}}\rangle)$  gibt es allerdings keine anschauliche Visualisierung in dieser Metapher.

## Visualisierung der theoretischen Korrelationsfunktion

Das zweite zentrale Leitbild für die Verschränkung neben der 'Quanten-Münze' ist 'ein Objekt, das zwei Schatten wirft' siehe Abb. 3.14. Im Spielfilm wird diese Metapher ohne weitere mathematische Analyse inszeniert und musikalisch untermalt. Dieser visuelle Anker kann bereits eine gewisse Hilfestellung beim intuitiven Verständnis bieten. Es deutet sich an, wie die Schatten eines höherdimensionalen Objekts sich gleichzeitig an zwei

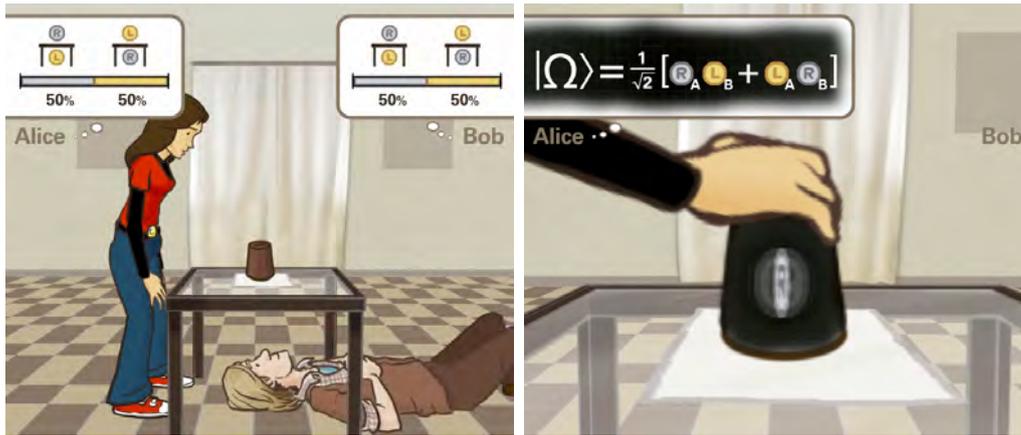


Abbildung 3.13: Die Quanten-Münze als anschauliche Metapher für die Messungen an einem Bell-Zustand. Links: Alice und Bob können jeweils eine der Seiten der Münze beobachten. Rechts: Im Gegensatz zur klassischen Münze ist die Quanten-Münze vor der Messung noch nicht gefallen, sondern *rotiert* noch im Becher. Die beiden Seiten der Münze entsprechen den möglichen Polarisationszuständen  $|RL\rangle$  und  $|LR\rangle$ , die sich in Superposition befinden. Erst wenn der Becher geöffnet wird, wird dadurch die Superposition zerstört und eine der beiden Möglichkeiten manifestiert.

räumlich getrennten Orten befinden können. Bei einer Messung sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse 0 bzw. 1 in dieser Metapher Schatten, die nur mittelbar etwas mit der eigentlichen Wellenfunktion  $|\phi^+\rangle$  zu tun haben. Die Wellenfunktion  $|\phi^+\rangle$  kann mehrere 'Schatten' bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen an räumlich beliebig weit entfernten Punkten erzeugen. In Lernstation U1-11, Slide 6 wird diese Visualisierung von  $|\phi^+\rangle$  im Zeigerformalismus gezeigt, wodurch die quantenmechanische Berechnung der Korrelationsfunktion in jeder beliebigen Basis nachvollzogen werden kann. Im Gegensatz zur Münz-Metapher, bei der die Messbasis nicht frei wählbar ist, sondern durch die Seiten der Münze definiert ist, kann in dieser Visualisierung die Messung in jeder beliebigen Basis dargestellt werden. Visualisiert wird als Beispiel der rotationsymmetrische Bell-Zustand

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|RL\rangle + |LR\rangle), \quad (3.41)$$

dessen Amplitude in jeder Winkelstellung der linearen Polarisationsdreher vor der Wechselwirkung durch  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  gegeben ist. Aufgrund der Rotationssymmetrie kann Alice Wahl der Achse als gegeben angenommen werden<sup>7</sup>. Alice erhält in ihrer Basis entweder das Messergebnis Transmission ( $\square$ ) oder Reflexion ( $\blacksquare$ ). Im ersten Fall reduziert sich die

<sup>7</sup>Auch alle anderen Bell-Zustände lassen sich ebenfalls in der Schatten-Metapher visualisieren, wobei die Zustände  $|\psi^\pm\rangle$  nicht rotationsinvariant sind und daher etwas komplizierter als der rotationsinvariante Zustand  $|\phi^+\rangle$  darzustellen sind.

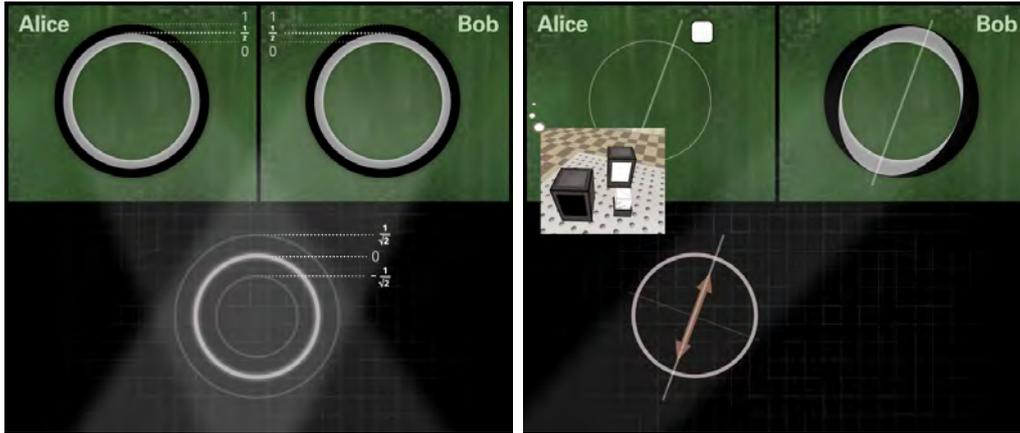


Abbildung 3.14: Visualisierung der Messung am verschränkten Bell-Zustand  $|\phi^+\rangle$  im Zeigerformalismus. Links: Die rotationsymmetrische Wellenfunktion  $|\phi^+\rangle$  hat in jeder Winkelstellung die Amplitude  $1/\sqrt{2}$ . Eine Wellenfunktion gibt an zwei verschiedenen Orten die Wahrscheinlichkeiten für die Messergebnisse Transmission ('weiß') und Reflexion ('schwarz') vor. Rechts: Durch Alice Messung ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Bob. Dadurch ergibt sich die klassisch nicht erklärable Korrelationsfunktion  $C(\alpha, \beta)$  zwischen den Messergebnissen von Alice und Bob.

Wellenfunktion zu

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) \rightarrow \text{Alice} : \square, \text{Bob} : |V\rangle_A \quad (3.42)$$

Im zweiten Fall reduziert sich die Wellenfunktion zu

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) \rightarrow \text{Alice} : \blacksquare, \text{Bob} : |H\rangle_A \quad (3.43)$$

Der Formalismus gibt keine Möglichkeit zu erkennen, welche der beiden Möglichkeiten realisiert wird. Der Zufall entscheidet. Die Visualisierung in Abb. 3.14 von Gleichung (3.42) zeigt deutlich, was in den Gleichungen für Schüler nicht unmittelbar ersichtlich ist: Alice Wahl der Messachse  $\{|H\rangle_A, |V\rangle_A\}$  wird zu Bob teleportiert, da sich durch Alice Messung die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Bob so verändert, dass in Richtung von Alice vertikaler Achse das Maximum ( $\square$ ) oder das Minimum ( $\blacksquare$ ) der Transmissionswahrscheinlichkeit für Bob entsteht. Allerdings wird keine Information teleportiert, sondern nur Korrelation: Alice kann unter keinen Umständen festlegen, ob Bobs Photon horizontal oder vertikal relativ zu ihrer Achse polarisiert ist, da sie nur die Achse festlegen kann, nicht das Messergebnis bezüglich dieser Achse. Bei dieser Argumentation haben wir angenommen, dass erst Alice und dann Bob die Messung macht. Allerdings können die Rollen von Alice und Bob auch vertauscht werden, siehe (3.24).

Die Korrelationsfunktion  $C_{\text{theo}}$  ergibt sich wie folgt. Bob kann seine Messachse frei

wählen. Bobs 'vertikale' und 'horizontale' Achse hängen mit Alice Basis wie folgt zusammen

$$\begin{pmatrix} |H\rangle_A \\ |V\rangle_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha - \beta] & -\sin[\alpha - \beta] \\ \sin[\alpha - \beta] & \cos[\alpha - \beta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |H\rangle_B \\ |V\rangle_B \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  hat Alice Reflexion gemessen. Dann ist Bobs Photon wie folgt polarisiert:

$$|H\rangle_A = \cos[\alpha - \beta]|H\rangle_B - \sin[\alpha - \beta]|V\rangle_B \quad (3.45)$$

Die kombinierte Wahrscheinlichkeit  $p_{00}$  für (Reflexion, Reflexion) ergibt

$$p_{00} = \frac{1}{2} \cos^2[\alpha - \beta].$$

Für die kombinierte Wahrscheinlichkeit  $p_{01}$  (Reflexion, Transmission) erhalten wir

$$p_{01} = \frac{1}{2} \sin^2[\alpha - \beta].$$

Wie in Abb. 3.15 zu sehen, ergibt sich für die Korrelationsfunktion im Bell-Zustand  $|\phi^+\rangle$  insgesamt

$$\begin{aligned} C_{\text{theo.}}(\alpha - \beta) &= (p_{00} + p_{11}) - (p_{01} + p_{10}) \\ &= \cos^2[\alpha - \beta] - \sin^2[\alpha - \beta] \\ &= \cos[2(\alpha - \beta)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Wie in Abb. 3.15 gezeigt, ergibt sich die theoretische Korrelationsfunktion aus der Differenz der Transmissionswahrscheinlichkeiten  $p_{\blacksquare\blacksquare} + p_{\square\square} = p_{00} + p_{11} = \cos^2[\alpha - \beta]$  und  $p_{\blacksquare\square} + p_{\square\blacksquare} = p_{01} + p_{10} = \sin^2[\alpha - \beta]$ .

## Vergleich von Theorie und Experiment

In Abb. 3.15 vergleichen wir die theoretische und die experimentelle Herleitung der Korrelationsfunktion und deren Visualisierungen. Somit liegt erstmals eine Methode vor, Theorie und Experiment von Verschränkung mit elementaren, schultauglichen Methoden zu visualisieren. Die Experimente sind durch interaktive Bildschirmexperimente wie [www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de) im Prinzip zugänglich, allerdings können die hier gezeigten Visualisierungen wie die Quanten-Münze und die Schattenmetapher dabei helfen, ein tieferes, auch quantitatives Verständnis für den theoretischen Hintergrund zu gewinnen. Erst durch den Vergleich von Theorie und Experiment ergibt sich ein vollständiges Bild, bei dem alle Repräsentationsebenen der Quantenphysik, wie in Abb. 3.4 gezeigt, miteinander in Beziehung gebracht werden.

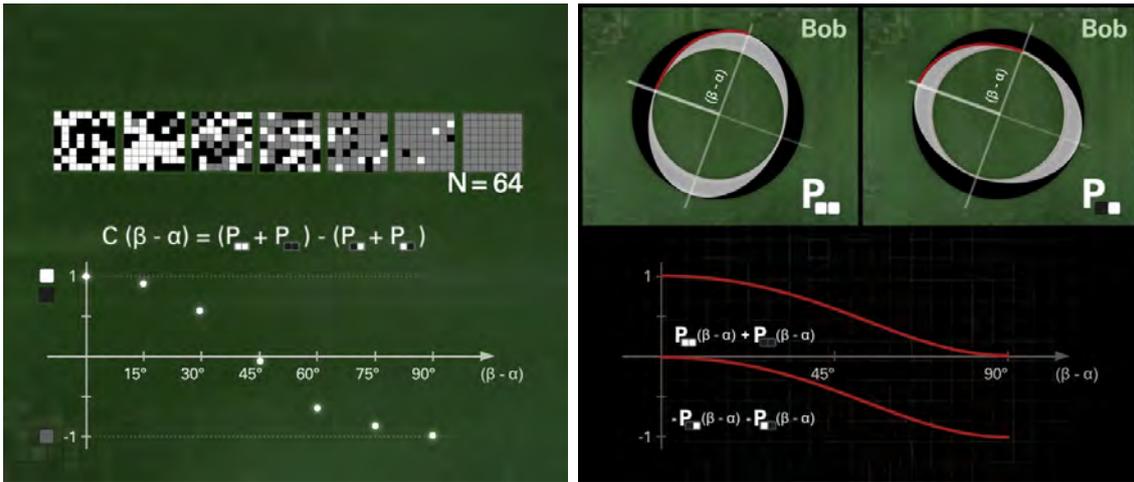


Abbildung 3.15: Vergleich von Theorie und Experiment. Links: Die experimentell ermittelte Korrelationsfunktion im Zustand  $|\phi^+\rangle$  ergibt nach Mittelung über viele Messungen  $C_{\text{exp.}} = \cos(2(\beta - \alpha))$ . Rechts: Die Quantenphysik geht davon aus, dass *eine* Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeiten an *beiden* Detektoren bestimmt. Durch diese Annahme ergibt sich die theoretische Korrelationsfunktion  $C_{\text{theo.}} = \cos(2(\beta - \alpha)) = \cos^2[\alpha - \beta] - \sin^2[\alpha - \beta]$ , die vom Experiment bestätigt wird. Durch Visualisierungen ist es möglich, sowohl Theorie als auch Experiment fast ohne Bezug auf den mathematischen Formalismus *quantitativ* zu verstehen, und somit in der Sek. II zu erläutern.

### 3.5 Alternativen zur Quantenphysik

Die Theoriebildung in der Physik kann nie als endgültig betrachtet werden. Die Deutung der gemessenen Korrelationsfunktion durch das Superpositionsprinzip in der Quantenphysik muss also in Frage gestellt werden, und auch andere Erklärungsmodelle diskutiert werden. Für Schüler stellt sich folgende naheliegende Frage: Wie kann man zwischen der Überlagerung

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle) \quad (3.47)$$

und einem zufälligen Gemisch der Zustände  $|HH\rangle$  und  $|VV\rangle$  überhaupt unterscheiden? Im Bild der rotierenden Münze (Abb. 3.13) stellt sich also die Frage: Wie kann man behaupten, dass die Münze vor der Messung *rotiert*, wenn man diese Superposition gar nicht direkt beobachten kann? Wie kann man zwischen einer vor der Messung rotierenden und einer bereits gefallen Münze unterscheiden? Diese Frage wird in der Lernstation U1-12 (Bell'sche Ungleichung) untersucht. Wie in Abb. 3.16 gezeigt, werden zwei verschiedene Erklärungsansätze miteinander verglichen: Eine lokale, realistische Theorie, bei der von einem Gemisch von vorgegebenen Polarisierungen ausgegangen wird, und die

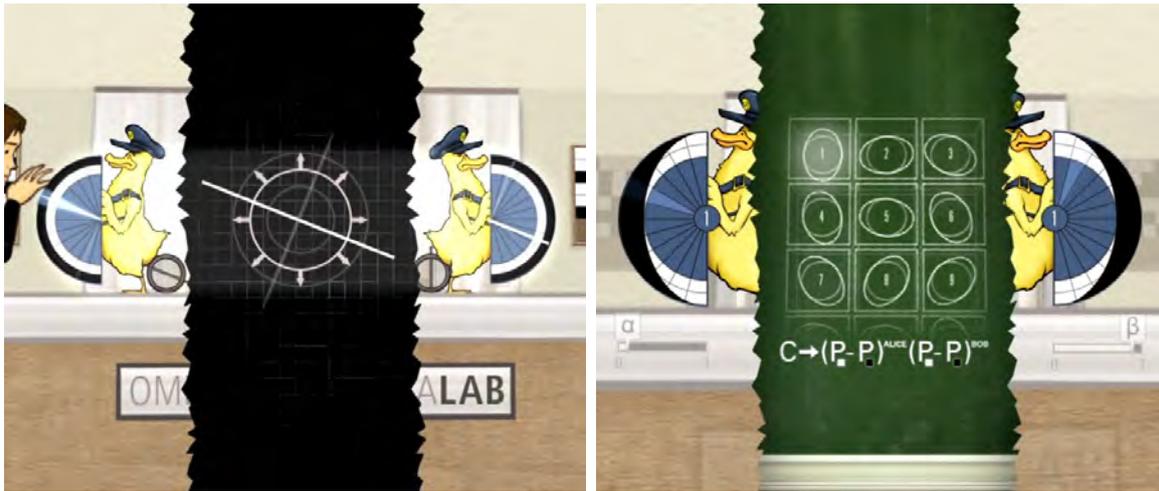


Abbildung 3.16: Unterscheidung zwischen der rotierenden und der gefallenen Münze: Im linken Bild stehen die Messungen von Alice und Bob durch die gemeinsame Polarisationswellenfunktion  $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$  miteinander in Verbindung, siehe auch Abb. 3.13. Die Messungen von Alice und Bob beeinflussen sich gegenseitig. Im rechten Bild zeigen wir ein Gemisch von verschiedenen, vorgegebenen Polarisationsrichtungen  $|HH\rangle$  und  $|VV\rangle$  in zufällig gewählten Achsen  $\{H, V\}$ . Die Messungen von Alice und Bob sind voneinander unabhängig. Trotzdem können die Messergebnisse korreliert sein, abhängig von dem Mischungsverhältnis. Die Frage ist, ob die experimentell ermittelte Korrelationsfunktion  $C_{\text{exp.}} = \cos(2(\beta - \alpha))$  auch ohne gegenseitige Beeinflussung der Messergebnisse theoretisch gedeutet werden kann.

Quantenphysik, die von einer Superposition der verschiedenen Polarisierungen ausgeht. Ein wichtiges Lernziel hierbei ist es, Erklärungen und Modelle auf ihre Tauglichkeit zu testen und nicht ungefragt zu übernehmen. Die Quantenphysik gewinnt ihre Stärke gerade aus der Fähigkeit, Erklärungsmodelle zu hinterfragen und konkurrierende Ansätze im Experiment unterscheiden zu lernen, um so das eine oder andere Konzept auszuschließen. Bis jetzt ist allerdings kein Experiment bekannt, das der Born'schen Interpretation der Quantenphysik widerspricht.

# 4 Visualisierung der Grundzüge von Atomphysik

Im Gegensatz zum Thema Verschränkung ist das Atommodell bereits fester Bestandteil des Lehrplans, sowohl im Gymnasium als auch an Haupt- und Realschulen. Häufig wird mit halbklassischen Modellen wie dem Bohr'schen Atommodell oder vereinfachten Modellsystemen wie einem Potentialkasten eine Grundvorstellung für das 'eigentliche' Atommodell vermittelt. Die Lösung der Schrödingergleichung z.B. für das Wasserstoffatom wird für die Schule als zu anspruchsvoll angesehen. Das ist sicher richtig, allerdings kann anstelle von Vereinfachungen auch hier der Weg von Visualisierungen im Sinne von möglichst genauen Übersetzungen der Theorie in eine zu entwickelnde Bildersprache beschritten werden. Wir wollen zu diesem Zweck zunächst einen kurzen Überblick über den theoretischen Hintergrund geben, um danach eine Übersetzung in Bilder zu erarbeiten. Anschliessend diskutieren wir die Bedeutung des Konzepts verschränkter Zustände für die Atom- und Molekülorbitaltheorie.

## 4.1 Atomphysik als Eigenwertproblem

### Das klassische Punktteilchen im Zentralpotential

Wir betrachten zunächst ein klassisches Punktteilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{x})$ . Die Gesamtenergie des Teilchens setzt sich aus der Summe aus kinetischer und potentieller Energie zusammen,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \quad (4.1)$$

Die zeitliche Ableitung ergibt (über doppelt vorkommende Indices wird summiert)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p_j}{m} \frac{dp_j}{dt} + \frac{dV(\vec{x})}{dx_j} \frac{\partial x_j}{dt} = \frac{p_j}{m} \left( \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (4.2)$$

Die Energie ist aufgrund der Newton'schen Bewegungsgleichung  $F_j = \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_j}$  eines Punktteilchens mit Impuls  $m \frac{dx_j}{dt} = p_j$  eine Erhaltungsgröße. Für den Spezialfall des Zentralpotentials  $V(r)$  gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, den Drehimpuls  $\vec{L}$ . Dieser ist durch

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \quad (4.3)$$

definiert. Wir betrachten die zeitliche Ableitung des Drehimpulses, das sogenannte Drehmoment,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{x} \times \vec{F}. \quad (4.4)$$

In einzelnen Komponenten geschrieben erhalten wir mit  $F_k = -\frac{dV}{dr} \frac{x_k}{r}$  den Ausdruck

$$\frac{dL_j}{dt} = \epsilon_{ijk} x_j \left( -\frac{dV}{dr} \frac{x_k}{r} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Aufgrund der Antisymmetrie des  $\epsilon_{ijk}$ -Tensors und der Symmetrie im Produkt  $x_j x_k$  verschwindet der Ausdruck, somit ist der Drehimpuls für ein Zentralpotential konstant. In der klassischen Physik ist dies die Ursache für das 2. Kepler'sche Gesetz, die Konstanz der Flächengeschwindigkeit. Die kinetische Energie  $\frac{\vec{p}^2}{2m}$  kann im Zentralpotential aufgrund von

$$\vec{L}^2 = \vec{x}^2 \vec{p}^2 - (\vec{x}\vec{p})^2 \quad (4.6)$$

umgeschrieben werden zu

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}. \quad (4.7)$$

Es ergibt sich das sogenannte effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r) = \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)$ , mit dem die Gesamtenergie wie folgt ausgedrückt werden kann

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) \equiv \frac{p_r^2}{2m} + V_{\text{eff}}(r). \quad (4.8)$$

Lösungen der Bewegungsgleichung im Zentralpotential in drei Dimensionen sind Kegelschnitte, also Ellipsen und Hyperbeln. Für den Spezialfall der Kreisbahn gilt  $\frac{p_r^2}{2m} = 0$ , in diesem Fall erhalten wir

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\vec{L}^2}{mr^3} + \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad (4.9)$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen  $L = mrv$  für die Kreisbahn  $mv^2/r = dV(r)/dr$ . Für das Gravitationspotential  $V(r) = -G\frac{Mm}{r}$  ergibt sich als Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Radius

$$L^2 = Gm_T(m_S M)r. \quad (4.10)$$

und somit für die Energie als Funktion des Drehimpulses

$$E(L) = -\frac{1}{2}G^2 m_T (m_S M)^2 \frac{1}{L^2}. \quad (4.11)$$

Diese Gleichungen sind gültig für Planeten der Masse  $m_T$  mit Drehimpuls  $L = m_T v r$ , die sich auf einer Kreisbahn um ein Zentralgestirn der Masse  $M$  bewegen. Hierbei sind

$m_T$  die träge Masse, und  $m_S$  die schwere Masse. Gemäß dem Äquivalenzprinzip sind beide gleich,  $m_T = m_S \equiv m$ . In Analogie zu diesem Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Radius, der für einen Planeten auf einer Kreisbahn im Gravitationspotential gilt, wird in der klassischen Physik das Elektron im Coulomb-Potential des Atomkerns betrachtet. Für das Coulomb-Potential  $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  ergibt sich ganz analog im Fall einer Kreisbahn als Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Radius

$$L^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} m_T e^2 r \quad (4.12)$$

und somit für die Energie als Funktion des Drehimpulses

$$E(L) = -\frac{1}{2} \frac{m_T e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{L^2}. \quad (4.13)$$

Im klassischen Modell ist die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch das beschleunigte Elektron ein Problem, da das Elektron dadurch Energie verlieren müsste und das Atom instabil würde.

## Das Bohr'sche Atommodell

Durch das in der klassischen Physik nicht begründbare Postulat der Drehimpulsquantisierung nach  $L = n\hbar$  gelingt es Bohr, das diskrete Energiespektrum für das Wasserstoffatom zu erhalten, und die Stabilität der Atome zu 'erklären'. Ohne tiefere Begründung wird in (4.13)  $L$  durch  $n\hbar$  ersetzt, so daß sich das diskrete Energiespektrum

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_T e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{\hbar^2 n^2} \equiv -Ry \frac{1}{n^2} \quad (4.14)$$

ergibt. Hierbei ist  $Ry = \frac{1}{2} \frac{m e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.59\text{eV}$  die sogenannte Rydberg-Konstante. So genial dieser Ansatz in seiner Zeit war, so wenig davon ist aus heutiger Sicht noch relevant. Die Beliebtheit dieses Modells für die Schule lässt sich nur aus der Einfachheit und dem durchschlagenden Erfolg erklären - dass das Energiespektrum 'korrekt' herauskommt, ist allerdings reiner Zufall und führt eher zu der Fehlvorstellung, dass einfache Modelle ebensoviel leisten können wie die weiterentwickelte Theorie. Die Hauptschwierigkeiten des Modells sind folgende:

- Das Elektron wird als klassisches Teilchen in zwei Dimensionen beschrieben.
- Der Zusammenhang zwischen Energieniveaus  $E_n = -Ry \frac{1}{n^2}$  und dem Drehimpuls ist für das Elektron nicht korrekt. Die Energie  $E_n$  ist im Rahmen der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie unabhängig vom Drehimpuls.

In der weiteren Geschichte der Quantenphysik hat sich Bohr's Ansatz als eine Sackgasse erwiesen, die erst durch eine neue Sichtweise auf das Problem überwunden wurde: Die entscheidende Idee ist hierbei der Übergang zu einem Ansatz, der Zustände und Operatoren an den Ausgangspunkt der Überlegung setzt.

## Quantisierung als Eigenwertproblem

Der entscheidende Fortschritt in der Geschichte der Quantenphysik ergibt sich aus einer Uminterpretation der klassischen Gleichungen für Energie und Drehimpuls. Auf Schrödinger geht die Idee zurück, die Berechnung von Energiespektren als Eigenwertproblem zu betrachten [114]. Eigenwertprobleme sind aus der Linearen Algebra bekannt. Wir wollen daher zunächst die wesentlichen Punkte aus der Linearen Algebra kurz skizzieren. Sei  $\vec{v}$  ein Vektor im  $M$ -dimensionalen komplexen Vektorraum und  $\mathbf{A}$  eine  $M \times M$  Matrix. Durch Anwenden der Matrix  $\mathbf{A}$  wird  $\vec{v}$  im Allgemeinen auf einen Vektor  $\vec{w}$  abgebildet. Es gilt

$$\mathbf{A}\vec{v} = \vec{w}. \quad (4.15)$$

Diejenigen Vektoren  $\vec{v}_n$ , die durch Anwenden der Matrix  $\mathbf{A}$  nur gestreckt oder gestaucht werden, nicht aber die Richtung ändern, für die also gilt

$$\mathbf{A}\vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n \quad (4.16)$$

heißen Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die im Allgemeinen komplexen Zahlen  $\lambda_n$  werden als Eigenwerte bezeichnet. Die Gesamtheit  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  aller  $M$  Eigenwerte bezeichnet man als Spektrum der Matrix  $\mathbf{A}$ . Es liegen Welten zwischen der klassischen Beschreibung des Elektrons als Punktteilchen mit Energie  $E$  und Drehimpuls  $L$  und einem Eigenwertproblem. Der einzige Anhaltspunkt, den Schrödinger hatte, war die interessante Eigenschaft von Matrizen, dass sich ein *diskretes* Spektrum von Eigenwerten ergibt. Wenn es also möglich wäre, die Eigenwerte  $\lambda_n \leftrightarrow E_n$  als diskretes Energiespektrum  $E_n = -Ry \frac{1}{n^2}$  für eine geeignete Matrix zu deuten, wäre das ein entscheidender Fortschritt. Die Eigenwerte  $E_n$  sind dann reell, wenn die Matrix die Symmetrie  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$  erfüllt. Identifiziert man die Eigenwerte als Energie, so muss auch die Matrix als 'Energie-Matrix' interpretiert werden und in Zusammenhang zu (4.8) stehen. Da das Spektrum im Prinzip unendlich viele Werte umfasst, muss auch die Matrix unendlich dimensional sein. Eine unendlich dimensionale Matrix kann auch als ein Differentialoperator betrachtet werden. Sicherlich sind viele andere auf den ersten Blick ebenso unwahrscheinlich anmutende Hypothesen der Physiker aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wieder in Vergessenheit geraten, weil sie nicht zum Erfolg geführt haben. Aus didaktischer Sicht wäre es wünschenswert, einige der alternativen Konzepte historisch weiter aufzuarbeiten [102]. Schrödinger hatte mit seinem Ansatz Erfolg. Die Verallgemeinerung von (4.15) ergibt die Operatorgleichung

$$\text{Operator } |\text{Zustand}\rangle = |\text{anderer Zustand}\rangle \quad (4.17)$$

und die Eigenwertgleichung (4.16) entspricht

$$\text{Operator } |\text{Eigenzustand}\rangle = \text{Eigenwert } |\text{Eigenzustand}\rangle. \quad (4.18)$$

Der Energie-Operator (bzw. die gesuchte Matrix) wird als Hamilton-Operator  $\mathbf{H}$  bezeichnet<sup>1</sup>. Aus heutiger Sicht wird die Quantenphysik in den Lehrbüchern oft durch die Quantisierungsbedingung

$$[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = \mathbf{x}_i \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{x}_i = i\hbar \delta_{ij} \quad (4.19)$$

eingeführt. Diese Gleichung hat folgende Bedeutung: Ort und Impuls werden zu Operatoren uminterpretiert. Die Reihenfolge, in der die Operatoren angewendet werden, ist von Bedeutung; Orts- und Impulsoperator kommutieren nicht. Wenn die Quantisierungsbedingung so definiert wird wie hier gezeigt, dann wird aus der 'klassischen' Energie  $E$  der Hamiltonoperator  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}). \quad (4.20)$$

Der Operator wirkt auf einen Zustand, den wir mit  $|\psi\rangle$  bezeichnen, die sogenannte Wellenfunktion<sup>2</sup>. Diese entspricht dem (unendlich dimensional) Vektor  $\vec{v}$  aus Gleichung (4.15). Das Eigenwertproblem ist

$$\mathbf{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (4.21)$$

Mit diesem Ansatz ist es tatsächlich möglich, das Energiespektrum des Wasserstoffatoms erfolgreich zu berechnen. Aus Sicht der Spektroskopie relevant sind lediglich die Eigenwerte  $\{E_1, E_2, E_3, \dots\}$  und die zugehörigen Spektrallinien mit Photonenergie  $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$ . Die Bedeutung der Wellenfunktion  $\psi$  ist zunächst irrelevant; sie könnte auch als eine mathematische Hilfsgröße betrachtet werden. In der Eigenwertgleichung (4.16) hat der Eigenwert bereits seine Interpretation als Energie des Elektrons gefunden, der 'Vektor' sollte also in irgendeiner Form das Elektron beschreiben. Klassisch gesehen ist das Elektron ein Punktteilchen, das sich am Ort  $x$  mit Impuls  $p$  befindet. In der Quantenphysik tritt an die Stelle dieser Beschreibung eine komplexe Funktion, die sich weder mit einem Ort, noch einem Impuls direkt in Verbindung bringen lässt. Die Dimension von  $\psi_n$  ist  $\frac{1}{\sqrt{m^3}}$ , was keiner bekannten klassischen Größe entspricht.

Die Bornsche Interpretation der Wellenfunktion als komplexe Verallgemeinerung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(x)$  des Elektrons gemäß

$$\rho(x) \rightarrow \sqrt{\rho(x)}e^{i\phi} \equiv \psi(x), \quad (4.22)$$

bzw.  $|\psi(x)|^2 d^3x = \rho(x)d^3x$  als Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Volumenelement  $d^3x$  um den Ort  $x$  herum zu finden, folgt nicht zwangsläufig aus dem Formalismus. Die Energiespektren lassen sich mit und ohne diese Interpretation berechnen. Experimente, bei denen nicht die Energie, sondern der Ort des Elektrons gemessen wird, wie z.B. das Doppelspaltexperiment mit Elektronen, zeigen aber, dass diese Interpretation mit den Beobachtungen konform ist. Auch neuere Streuexperimente am Dreifachspalt ergeben

<sup>1</sup>Es folgt, dass der Energie-Operator ein hermitescher Operator mit  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$  sein muss, da nur dann die Eigenwerte reell sind.

<sup>2</sup>Der Zustand  $\psi(x)$  an einem Ort ergibt sich als  $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$

keinen Hinweis auf Fehler bei dieser Interpretation [117]. Wenn  $\psi(x)$  den *Zustand* des Elektrons beschreibt, so kann durch Anwenden geeigneter Operatoren eine *Messung* einer bestimmten Observable beschrieben werden. In Verallgemeinerung von (4.15) zeigt diese Interpretation, dass ein eindeutiges Messergebnis nur zu erwarten ist, wenn sich das Elektron in einem Eigenzustand des betreffenden Operators befindet. Ist dies nicht der Fall, so kann es bei der Messung verschiedene Resultate geben, die jeweils nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angenommen werden. Das einfachste Beispiel hierzu ist uns bereits in Abschnitt 3.1 begegnet: Das Qubit kann sich in einer Überlagerung von zwei Eigenzuständen befinden, die wir mit  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  bezeichnet hatten. Hierbei ist es irrelevant, bezüglich welches Operators die Eigenzustände definiert sind, es kann z.B. die Energie, der Ort, der Spin oder die Polarisation eines Teilchens sein. Der mathematische Formalismus funktioniert für alle diese Fälle nahezu identisch. Im Kapitel 3 haben wir erläutert, wie aus der Verallgemeinerung

$$\rho \rightarrow \sqrt{\rho} e^{i\phi}$$

zwangsläufig im Falle von Mehrteilchen-Quantenphysik nichtlokale Korrelationen bzw. Verschränkung folgt, und welche experimentellen Konsequenzen sich daraus ergeben. Die Thematik Verschränkung wird auch im Zusammenhang von Atom- und Molekülphysik bei der Beschreibung chemischer Bindungen wieder relevant werden.

## Die Drehimpulsalgebra als Schlüssel zur modernen Atomphysik

Wir bleiben zunächst bei Ein-Teilchen Quantenphysik und suchen nach einer Möglichkeit, die mathematische Beschreibung der Atomphysik in einfachen Bildern für die Schule zugänglich zu machen. Der Schlüssel hierzu hat genau wie in Bohrs Ansatz etwas mit dem Drehimpuls zu tun. Durch die Umdeutung der klassischen Energie (4.8) zum Hamiltonoperator (4.20) wird auch der Drehimpuls zum Drehimpulsoperator umgedeutet. Der Drehimpulsoperator verändert im Allgemeinen den Zustand durch eine Drehung. Der Drehimpuls ist nur für einen Eigenzustand als Observable eindeutig zugänglich. Wir wählen für den Kommutator  $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar$  die übliche Darstellung

$$\mathbf{x}_j = x_j, \quad \mathbf{p}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.23)$$

Durch die Quantisierungsbedingung  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$  wird der klassische Drehimpuls zum Drehimpulsoperator, der der Drehimpulsalgebra

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{L}_k \quad (4.24)$$

genügt. Im Zentralpotential ergibt sich analog zur klassischen Energiefunktion (4.8) der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r) \equiv \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m} + V_{\text{eff}}(r), \quad (4.25)$$

wobei der Radialimpuls durch<sup>3</sup>  $\mathbf{p}_r = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) r = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$  definiert ist, und das effektive Potential durch

$$\mathbf{V}_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Gesucht sind Lösungen der Eigenwertgleichung  $\mathbf{H}\psi_n = E_n\psi_n$ , wobei die Wellenfunktion  $\psi_n(\vec{x})$  von den drei Ortskoordinaten  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  abhängt. Im Zentralpotential ist es sinnvoll, zu Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  überzugehen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung in (4.25) ist es möglich, eine Trennung der Variablen vorzunehmen, und die Wellenfunktion als Produkt einer Kugelflächenfunktion  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  und der zunächst noch unbekanntes Radialwellenfunktion  $R_{nl}(r)$  anzusetzen gemäß

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.26)$$

Mit dem Ansatz (4.26) und dem Hamiltonoperator (4.25) ist es möglich, mit Differentialgleichungen die Lösung des Eigenwertproblems (4.21) zu finden. Der Rechenweg ist in etlichen Lehrbüchern beschrieben und soll daher hier nicht wiederholt werden [107]. Wichtig ist an dieser Stelle zu erkennen, dass durch die Quantenphysik der Bahnbegriff des Elektrons aufgegeben wird, und stattdessen das Elektron durch die komplexe Wellenfunktion  $\psi(r, \theta, \phi)$  beschrieben wird. Die Energie, die mit dem Zustand  $|\psi\rangle$  assoziiert wird, kann im Rahmen der nichtrelativistischen Schrödinger-Theorie für Eigenzustände des Hamiltonoperators berechnet werden. Es ergeben sich die  $n^2$ -fach entarteten Energieeigenwerte  $E_n = -Ry \frac{1}{n^2}$ . Die entsprechenden Zustände werden durch die sogenannte Hauptquantenzahl ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), die Drehimpulsquantenzahl  $l = (0, 1, \dots, n-1)$  und die magnetischen Quantenzahl  $m \in \{-l, +l\}$  beschrieben. Im Rahmen dieser Theorie ist die Energie unabhängig vom Drehimpuls  $l$  und hängt nur von  $n$  ab. Die Entwicklung und das Verständnis von Atomspektren hat aber hier noch nicht ihr Ende gefunden. Die Wellenfunktion muss nicht zwangsläufig auf den dreidimensionalen Raum beschränkt sein. Durch die abstrakte Beschreibung des Elektrons als einen *Zustand* ist die Tür geöffnet zu einer komplexen Welt, von der je nach gewähltem 'Beobachtungsfenster' bestimmte Vorhersagen abgeleitet werden können. Ein prominentes Beispiel hierfür ist der Elektronspin. Hier ergibt sich umso mehr das Dilemma, dass die Erweiterungen der Theorie zur Pauli-Gleichung und schließlich zur Dirac-Gleichung kein zugänglicher Weg für die Schule ist, so dass nach Alternativen gesucht werden muss.

## 4.2 Visualisierung von Matrizen und Operatoren

Der Versuch, die Quantenphysik in Analogie zur klassischen Physik zu unterrichten, birgt die Gefahr von Fehlvorstellungen, insbesondere die direkte Analogie zwischen Planetenbahnen im Zentralpotential der Sonne und Elektronenbahnen im Zentralpotential des Atomkerns. Viel näher an der tatsächlichen Physik wäre es, die klassische Physik als Spezialfall der Quantenphysik anzusehen (im Limes  $\hbar \rightarrow 0$ ). Dies widerspricht der

<sup>3</sup>Man beachte den zusätzlichen Term  $i\hbar\mathbf{x}\mathbf{p}$ , der durch die Nicht-Kommutativität von Ort und Impuls in  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{L}^2/r^2 + \mathbf{p}_r^2$  beiträgt, denn es gilt  $\mathbf{L}^2 = \mathbf{x}^2\mathbf{p}^2 - (\mathbf{x}\mathbf{p})^2 + i\hbar\mathbf{x}\mathbf{p}$

geschichtlichen Entwicklung, die erst die klassische Physik und Jahrhunderte später die Quantenphysik hervorbrachte. Allein schon aus diesem Grund sind Lehrpläne zunächst an der klassischen Physik orientiert, und die Erweiterung zur Quantenphysik wird aus Sicht der klassischen Physik vorgenommen. Ein weiteres Argument für den Vorrang der klassischen Physik ist die lebensweltliche Erfahrung. Für den Alltag und auch viele technische Anwendungen sind Begriffe wie z.B. kinetische Energie oder der klassische Drehimpuls von Bedeutung und werden auch in Zukunft unverzichtbar sein. Allerdings nimmt auch der Stellenwert der Quantenphysik mit zunehmender technischer Entwicklung immer weiter zu.

## Operatoren und Zustände in der Atomphysik

Es besteht also die Notwendigkeit, sowohl klassische Mechanik als auch Quantenphysik zu unterrichten. Um Fehlvorstellungen zu vermeiden wäre es wichtig, die Quantenphysik *aus sich selber heraus* zu entwickeln, und nicht über den Umweg der klassischen Mechanik. Dazu verwenden wir folgende Grundelemente der Quantenphysik:

- Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu Amplituden
- Zuordnung der Amplituden zu möglichen 'Zuständen'
- Eigenwertprobleme

Es klingt vielleicht erstaunlich, aber das Thema Verschränkung und Nichtlokalität ist aus dieser Sicht einfacher zu unterrichten als Atomphysik, weil hierzu lediglich die Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu Amplituden, und die Zuordnung der Amplituden zu möglichen Zuständen benötigt wird, wie in Kapitel 3 und auf der DVD-ROM *Quantendimensionen* gezeigt. Für die Atomphysik brauchen wir zusätzlich noch ein Verständnis von Eigenwertproblemen.

In dem Bild von Operatoren und Zuständen ist es legitim, die grundlegenden Eigenschaften von Operationen wie z.B. die Nicht-Kommutativität zunächst mit anschaulichen Beispielen zu erläutern. Der Übergang zur Quantenphysik erfolgt durch die Umdeutung der Zustände, nicht durch die Umdeutung der Operatoren. Die mathematischen Eigenschaften der Operatoren können unabhängig von der Quantenphysik untersucht werden. Je nachdem, ob klassische oder Quantenzustände betrachtet werden, ändert sich lediglich die Interpretation der Ergebnisse bezüglich der Zustände.

Wir untersuchen zunächst zwei einfache, anschauliche Modellsysteme. Das erste Beispiel soll den Begriff und die mathematische Definition des 'Kommutators' anschaulich werden lassen. Im zweiten Beispiel betrachten wir Drehoperatoren. Der Anschluss an die Atomphysik erfolgt, indem die Drehoperatoren auf Quanten-Zustände angewendet werden. Dabei ändern sich die grundlegenden Eigenschaften der Drehoperatoren *nicht*, sondern nur die Interpretation der berechneten Ergebnisse bezüglich der Zustände.

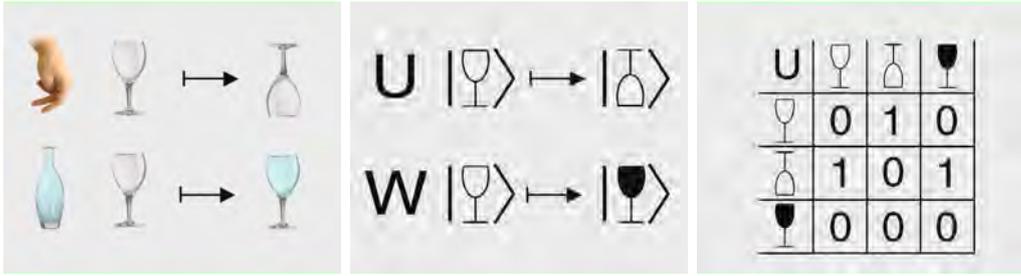


Abbildung 4.1: Übergang von einer lebensweltlichen zu einer mathematischen Repräsentation von Operatoren und Zuständen. Links: Ein Wasserglas kann umgedreht werden, oder es kann Wasser über dem Glas ausgegossen werden. Mitte: Definition der entsprechenden Operatoren  $U$  und  $W$ , sowie der drei möglichen Zustände des Glases. Rechts: Matrixdarstellung des Umdreh-Operators  $U$ .

## Operatoren und Zustände in der klassischen Physik

Beginnen wir mit dem ersten Beispiel. Wir betrachten ein Wasserglas und zwei Operationen an dem Glas: Umdrehen und Wasser einfüllen. Übersetzen wir dies in mathematische Symbole [47]. Wir bezeichnen mit  $|\chi_1\rangle$  den Zustand 'Glas leer, oben' und mit  $|\chi_2\rangle$  den Zustand 'Glas leer, umgedreht'. Der Umdrehoperator  $U$  erfüllt per Definition

$$U|\chi_1\rangle = |\chi_2\rangle, \quad U^2|\chi_1\rangle = |\chi_1\rangle. \quad (4.27)$$

Weiterhin bezeichnen wir mit  $|\chi_3\rangle$  den Zustand 'Glas gefüllt'. Der Wassereinfülloperator  $W$  erfüllt per Definition

$$W|\chi_1\rangle = |\chi_3\rangle, \quad W^2|\chi_1\rangle = |\chi_3\rangle, \quad W|\chi_2\rangle = |\chi_2\rangle. \quad (4.28)$$

Das gefüllte Glas bleibt nach erneutem Einfüllen von Wasser immer noch gefüllt, daher gilt  $W^2|\chi_1\rangle = |\chi_3\rangle$ . Wir können die Matrixelemente der Operatoren berechnen, indem wir die Zustände als orthonormal betrachten mit Skalarprodukt  $\langle\chi_i|\chi_j\rangle = \delta_{ij}$ . Die Matrixdarstellung der Operatoren ergibt dann

$$U_{ij} = \langle\chi_i|U|\chi_j\rangle, \quad W_{ij} = \langle\chi_i|W|\chi_j\rangle. \quad (4.29)$$

Offensichtlich gilt  $UW - WU \neq 0$ , denn die Operationen 'Wasser einfüllen' und 'Glas umdrehen' kommutieren nicht. Dies lässt sich auch durch Matrixmultiplikation mathematisch verifizieren. Durch dieses Modell werden mathematische Begriffe der Linearen Algebra direkt mit anschaulichen, lebensweltlichen Dingen verknüpft. Anstelle der mathematischen Notation der Zustände als  $|\chi_j\rangle$  können in der Schule alternativ auch Bilder wie in Abb. 4.1 verwendet werden.

Von diesem Punkt aus ist es möglich, durch Abstraktion zu verallgemeinern. Wir betrachten formal das Eigenwertproblem

$$\mathbf{U}|\chi\rangle = \lambda|\chi\rangle \quad (4.30)$$

Offensichtlich sind die Zustände  $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$  und  $|\chi_3\rangle$  keine Eigenwerte von  $\mathbf{U}$ . Die Abstraktion, die nun verlangt wird, ist die Möglichkeit, eine Summe oder Differenz von Zuständen zu bilden. Die Summe  $(|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle)$  ist ein Eigenvektor mit Eigenwert  $(+1)$ :

$$\mathbf{U}(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle) = (+1)(|\chi_2\rangle + |\chi_1\rangle). \quad (4.31)$$

Die Operatoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{W}$  haben jeweils drei Eigenvektoren, die von den Schülern in der Sek. II mit etwas Knobelei gefunden werden können. Wichtig hierbei ist festzustellen, dass dies eine mathematische Konstruktion ist, die keine offensichtliche Analogie mehr zum ursprünglichen, 'klassischen' Modellsystem mit leeren und gefüllten Gläsern hat. Im mathematischen Anhang 7.7 wird ein alternatives Modellsystem vorgestellt, bei dem die Zustände als Schallwellen gedeutet werden, und die Superposition als Überlagerung von Schallwellen. Dieses Beispiel zeigt bereits, dass ein und derselbe mathematische Formalismus je nach Kontext eine vollkommen andere Bedeutung annehmen kann, wobei nicht die Definition der Operatoren, sondern die Interpretation der Zustände verändert wird.

## Die Drehimpulsalgebra in der klassischen Physik

Als zweites Beispiel betrachten wir Drehoperatoren. Wir führen die Operationen  $\mathbf{D}_x(\alpha_x)$ ,  $\mathbf{D}_y(\alpha_y)$  und  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$  als Drehungen um die  $x, y$  und  $z$ -Achse ein. Beispielsweise mit einer Flasche als Zustand  $|\xi\rangle$  lässt sich einfach zeigen, dass Drehoperationen nicht kommutieren: Eine Drehung um 90 Grad erst in  $x$ -, dann in  $y$ -Richtung ist nicht identisch mit den Drehoperationen in umgekehrter Reihenfolge. Es gilt also

$$\mathbf{D}_x(\alpha_x)\mathbf{D}_y(\alpha_y) - \mathbf{D}_y(\alpha_y)\mathbf{D}_x(\alpha_x) \neq 0.$$

Aus dieser einfachen Beobachtung folgt bereits, dass der Zustand  $|\xi\rangle$  nicht gleichzeitig Eigenzustand von *zwei* Drehoperatoren sein kann. Hierzu machen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen,  $|\xi\rangle$  wäre Eigenzustand von  $\mathbf{D}_x(\alpha_x)$  und  $\mathbf{D}_y(\alpha_y)$ . Dann gilt

$$\mathbf{D}_x(\alpha_x)|\xi\rangle = \lambda_1|\xi\rangle, \quad \mathbf{D}_y(\alpha_y)|\xi\rangle = \lambda_2|\xi\rangle. \quad (4.32)$$

Bilden wir den Kommutator

$$0 \neq (\mathbf{D}_x(\alpha_x)\mathbf{D}_y(\alpha_y) - \mathbf{D}_y(\alpha_y)\mathbf{D}_x(\alpha_x))|\xi\rangle = (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1)|\xi\rangle = 0. \quad (4.33)$$

Da die Eigenwerte kommutieren, ergibt sich Null, im Widerspruch zu der Beobachtung, dass die Drehoperationen nicht kommutieren. Die Annahme, dass  $|\xi\rangle$  gleichzeitig Eigenzustand von  $\mathbf{D}_x(\alpha_x)$  und  $\mathbf{D}_y(\alpha_y)$  ist, muss falsch sein. Der Zustand  $|\xi\rangle$  kann also höchstens Eigenzustand von *einem* Drehoperator sein. Mit dieser einfachen, fast spielerischen Argumentationen lassen sich Operatoren und Zustände einführen, und einige wichtige Eigenschaften von Eigenwertproblemen.

## Übergang zur Quantenphysik: Umdeutung der Zustände, nicht der Operatoren

Wir sind mit dieser Argumentation der Quantenphysik des Atoms schon sehr viel näher, als uns ein 'Planetenmodell' je bringen kann. Der Übergang zur Quantenphysik wird nun nicht durch die Umdeutung des Drehimpulses zum Drehimpulsoperator vorgenommen, sondern durch die Anwendung des Drehimpulsoperators in der oben definierten Form auf Quantenzustände. Durch den Übergang von makroskopischen Zuständen wie z.B. einer Flasche auf einen mikroskopischen Zustand wie z.B. ein Elektron ergibt sich als wesentliche zusätzliche Eigenschaft die Interferenzfähigkeit der Zustände, die im Superpositionsprinzip zum Ausdruck kommt. Für die mathematischen Eigenschaften des Drehimpulsoperators ändert sich nichts<sup>4</sup>.

Mit obigem Argument wird z.B. klar, warum es nur eine magnetische Quantenzahl  $m$  geben kann, und nicht mehrere. Die magnetische Quantenzahl ist der Eigenwert des Drehoperators  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$ . Da die Drehungen nicht kommutieren, kann nicht vom selben Eigenzustand auch noch ein Eigenwert des Drehoperators  $\mathbf{D}_x(\alpha_x)$  oder  $\mathbf{D}_y(\alpha_y)$  existieren. Die Rechnung hierzu ist identisch zu Gleichung (4.33), wobei der Zustand  $|\psi\rangle$  nun nicht als makroskopische Flasche, sondern als interferenzfähiger Elektron-Zustand interpretiert wird.

Im Gegensatz zum Bohr'schen Atommodell wird nicht der Versuch gemacht, Begriffe wie den Drehimpulsoperator aus dem klassischen Drehimpuls abzuleiten. Tatsächlich hat der klassische Drehimpuls nur sehr indirekt (über komplizierte Konstruktionen mit kohärenten Zuständen, [108]) etwas mit dem quantenmechanischen Drehimpulsoperator zu tun. In der Schule sollte also gar nicht erst versucht werden, irgendeinen Zusammenhang zwischen dem klassischen Drehimpuls und den quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren zu suchen! Durch unseren auf Schrödinger zurückgehenden Ansatz wird der Drehimpulsoperator direkt in seiner Funktion eingeführt, als Operator, der *Drehungen* erzeugt. In dem Bild von Operatoren und Zuständen ist es legitim, die grundlegenden Eigenschaften wie die Nicht-Kommutativität mit anschaulichen Beispielen wie z.B. einer Wasserflasche zu erläutern. Der Übergang zur Quantenphysik erfolgt nicht durch Umdeutung des klassischen Drehimpulses zum Drehimpulsoperator, sondern indem die Zustände uminterpretiert werden.

### 4.3 Visualisierung der Drehimpulsalgebra

Der didaktische Ansatz, in Operatoren und Zuständen zu denken, und nicht in klassischen Punktteilchen, kann weiter ausgebaut werden. Für das Atommodell ist es sinnvoll, sich unter den stationären Zuständen des gebundenen Elektrons stehende Wellen vorzustellen. Dies wird in der Schule bereits verwendet, etwa um das Bohr'sche Postulat  $L = n\hbar$  mit der de Brogli-Beziehung  $p = h/\lambda$  in Verbindung zu bringen. Wenn im halbklassischen Modell der Bohrsche Radius und der Impuls  $p$  bestimmt sind, wird das

---

<sup>4</sup>Es wird lediglich eine Skalierung mit dem Planck'schen Wirkungsquantum  $\hbar$  wie in Gleichung (7.75) definiert in der Definition des Drehimpulsoperators vorgenommen.

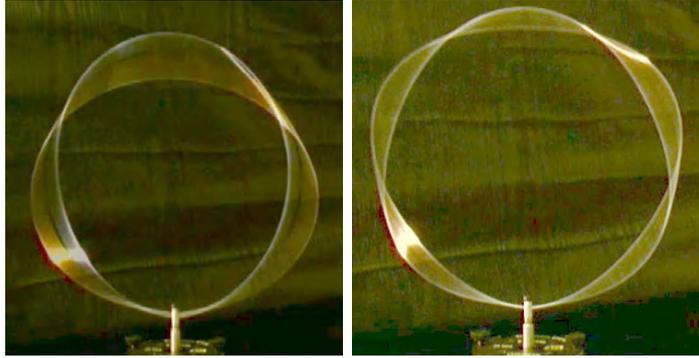


Abbildung 4.2: Stehende Wellen auf einem vibrierenden Ring mit drei und fünf Knotenpunkten. Aufgrund der Randbedingung, dass der Ring am unteren Ende mit dem Frequenzgenerator fixiert ist, ergeben sich in diesem Modell nur stehende Wellen mit einer ungeraden Anzahl von Knotenpunkten.

Konzept des Punktteilchens in vielen Schulbüchern zugunsten einer stehenden Welle mit Wellenlänge  $\lambda = h/p$  auf der Kreisbahn aufgegeben [131]. Der Kreisumfang  $2\pi r$  soll einem Vielfachen der Wellenlänge entsprechen,

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p}. \quad (4.34)$$

Dies entspricht dem Bohr'schen Postulat

$$L = rp = n\frac{h}{2\pi}. \quad (4.35)$$

Eine mögliche klassische Analogie zu einer stehenden Welle auf dem Kreisring ist in Abb. 4.2 gezeigt. Die stehenden Wellen auf dem Kreisring können durch die Anzahl von Knotenpunkten klassifiziert werden.

Diese Argumentation hat die Schwäche, dass die 'Elektronenwelle' immer noch zweidimensional ist, und dass der Bahnbegriff nach wie vor eine Rolle spielt. Weiterhin wird die Hauptquantenzahl  $n$  mit der Anzahl von Knotenpunkten einer stehenden Welle gemäß (4.34) in einen Zusammenhang gebracht, was in dieser Form für das Wasserstoff-Problem nicht korrekt ist. Suchen wir also im abstrakteren Bild von Operatoren und Zuständen nach einer Alternative. Wir betrachten zunächst den *Zustand*, also die Wellenfunktion des Elektrons im dreidimensionalen Raum um den Atomkern. Aufgrund der Radialsymmetrie des Coulomb-Potentials können wir Kugelkoordinaten verwenden und die dreidimensionale Schwingung in einen Anteil auf der Kugeloberfläche und einen Radialteil aufteilen. Wie Zwiebschalen fächern wir also den Raum auf und betrachten die möglichen Schwingungen auf den Zwiebschalen, und senkrecht dazu.

Wir nutzen unseren Ansatz, zunächst reale, anschauliche Zustände und Operationen zu untersuchen, um grundlegende mathematische Eigenschaften einzusehen. Dann werden die Zustände zu Quantenzuständen uminterpretiert, wodurch sich fast nichts an der

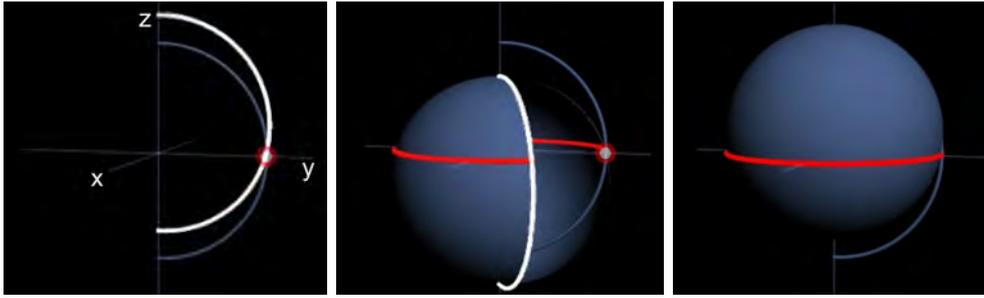


Abbildung 4.3: Der Knotenpunkt auf der  $y$ -Achse der stehenden Welle auf dem Halbkreis wird durch Rotation um die  $z$ -Achse zu einer Knotenlinie (in rot gezeichnet) parallel zur  $xy$ -Ebene einer Schwingung auf der Kugeloberfläche. Diese entspricht der Kugelflächenfunktion  $Y_{10}$ .

mathematischen Struktur, aber fast alles an der Interpretation der gefundenen Struktur ändert: Der Eigenwert wird zur Observable, der Eigenzustand zur komplexen Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitsdichte.

## Klassische Zustände: Schwingungen und Drehungen auf der Kugeloberfläche

Welche möglichen stehenden Wellen gibt es auf der Kugeloberfläche? Zur Beantwortung dieser Frage beginnen wir mit Schwingungen auf einem Kreisring. Ähnlich wie in Abb. 4.2 gezeigt können wir Schwingungen von kreisförmigen Gegenständen wie einem Metallring untersuchen, oder z.B. auf dem Rand von einem Weinglas. Für stehende Wellen auf einem Kreisring ohne Randbedingungen wie dem Weinglas ergibt sich eine gerade Anzahl von Knotenpunkten, die spiegelsymmetrisch angeordnet sind. Wir bezeichnen die Spiegelachse als  $z$ -Achse.

Nun verallgemeinern wir die Schwingung auf der Kreislinie zu einer Schwingung auf der Kugeloberfläche. Besonders symmetrische Schwingungen entstehen als Rotationskörper, indem der Kreisring um die  $z$ -Achse gedreht wird. Als Beispiel betrachten wir den Fall, bei dem genau zwei Wellenlängen um den Kreisumfang passen, also  $\pi r = \lambda$  gilt, siehe Abb. 4.3. Der Knotenpunkt auf der  $y$ -Achse verallgemeinert sich durch die Rotation zu einer Knotenlinie auf der  $xy$ -Ebene. Der Schwingungsbauch befindet sich auf der  $z$ -Achse. Die so definierte Schwingung auf der Kugeloberfläche ist per Konstruktion rotationssymmetrisch um die  $z$ -Achse und spiegelsymmetrisch in der  $xz$ -Ebene. Dieselbe Konstruktion kann für alle stehenden Wellen mit  $\pi r = l\lambda$  wiederholt werden. Es ergeben sich rotationssymmetrische stehende Wellen auf der Kugeloberfläche mit  $l = 1, 2, \dots$  Knotenlinien parallel zur  $xy$ -Ebene. Wir bezeichnen diese Schwingungen auf der Kugeloberfläche als  $Y_{l0}$ . Für  $l = 0$  ergibt sich eine Konstante, unabhängig vom Winkel.

Per Konstruktion sind die so erzeugten Schwingungen Eigenzustand des Drehoperators um die  $z$ -Achse mit Eigenwert 1. Es gilt

$$\mathbf{D}_z(\alpha_z)Y_{l0} = Y_{l0}. \quad (4.36)$$

Drehungen um die x-Achse oder die y-Achse führen zu einem neuen Zustand, bei dem die Knotenlinien aus der xy-Ebene herausgedreht werden. Dadurch geht die Rotations-symmetrie um die z-Achse verloren. Der Zustand  $\mathbf{D}_x(\alpha_x)Y_{l0}$  bzw.  $\mathbf{D}_y(\alpha_y)Y_{l0}$  kann daher nicht Eigenzustand von  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$  sein. Es gibt allerdings bestimmte Kombinationen der um die x- und y-Achse gedrehten Zuständen, die wiederum ein Eigenzustand von  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$  sind. Zu einer rotationssymmetrischen Schwingung mit  $l$  Knotenlinien lassen sich genau  $2l$  weitere konstruieren, die ebenfalls Eigenzustand zu  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$  mit genau  $l$  Knotenlinien sind. Wir nutzen hier den direkten Zugang zu dieser Konstruktion über Visualisierungen, und verweisen für die mathematische Behandlung auf Abschnitt 7.2. Die Konstruktion der  $(2l)$  nicht-rotationssymmetrischen Zustände gelingt wie folgt. Jede der  $l$  Knotenlinien kann einzeln aus der xy-Ebene herausgedreht werden, bis sie senkrecht zu dieser steht. In der Abb. 4.4 zeigen wir die Beispiele  $l = 2$  und  $l = 4$ . Die rotationssymmetrische Schwin-gung  $Y_{2,0}$  ( $Y_{4,0}$ ) wird von einer Spiegelebene geteilt; sie ist ihr eigenes Spiegelbild. Wird *eine* Knotenlinie gedreht, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder die Knotenlinie dreht sich um die z-Achse rechtsherum, oder (im Spiegelbild) linksherum. Diese Zustände be-zeichnen wir mit  $Y_{2,\pm 1}$  ( $Y_{4,\pm 1}$ ). Werden *zwei* Knotenlinien gedreht, ergeben sich ebenfalls diese beiden Möglichkeiten. Stehen insgesamt  $l$  Knotenlinien zur Verfügung, ergibt sich daraus die Schar von  $2l$  nicht-rotationssymmetrischen Eigenzuständen des Operators  $\mathbf{D}_z(\alpha_z)$ . Insgesamt ergeben sich  $(2l + 1)$  Zustände. Wir bezeichnen mit  $\pm m$  die Anzahl von Knotenlinien, die sich um die z-Achse rechts- bzw. linksherum drehen, die sich also *nicht* parallel zur xy-Ebene befinden. Es gibt im Extremfall  $m = l$  rechtsdrehende Kno-tenlinien, die der Schwingung entspricht, die am weitesten von der Spiegelebene entfernt ist.

Dies ist sicherlich ein Beispiel einer Visualisierung, bei der eine Animation dem Stand-bild klar überlegen ist (siehe Kapitel 1.3). Im Bild ist nur ein 'Schnappschuss' der gezeig-ten Eigenschwingungen zu sehen, und die Spiegelebene, die die einzelnen Schwingungen miteinander in Beziehung setzt. Entscheidend für das Verständnis der Visualisierung ist die Dynamik der einzelnen Schwingungsmuster. Das Spektrum von stehenden Wellen auf der Kugeloberfläche lässt sich wie gezeigt durch die Zahlen  $(l, m)$  beschreiben, wobei  $l$  die Gesamtanzahl von Knotenlinien ist und  $\pm m$  die Anzahl von Knotenlinien, die in Bezug auf die z-Achse *nicht* rotationssymmetrisch sind.

## Das Bohr'sche Postulat und die Drehimpulsalgebra

Wie findet sich das Bohr'sche Postulat in dem Spektrum der Kugelflächenfunktionen wieder? Betrachten wir dazu die abstraktere Darstellung aus Abb. 4.5. Die rote Spiegel-ebene bildet die rechtsliegenden Zustände auf die linksliegenden ab, und umgekehrt. Der Zustand auf der Spiegelebene ist sein eigenes Spiegelbild<sup>5</sup>. In diesem Bild gibt es einen

---

<sup>5</sup>Die Spiegelung entspricht für die Kugelflächenfunktionen der Operation  $Y_{l,m} \rightarrow Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$ , für  $m = 0$  gilt  $Y_{l,0} \rightarrow Y_{l,0}$ .



Abbildung 4.4: In rot zu sehen sind die Knotenlinien von  $Y_{lm}$  auf der Kugeloberfläche mit  $l = 2, 4$ . Es sind immer genau  $l - |m|$  Knotenlinien rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse. Die komplett rotationssymmetrische Schwingung  $m = 0$  wird durch die Spiegelebene genau in der Mitte geteilt. Hier befinden sich alle Knotenlinien parallel zur  $xy$ -Ebene und sind somit rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse. Je weiter man sich von der Spiegelebene entfernt, desto weniger Knotenlinien sind rotationssymmetrisch. Im linken Bild ist das Beispiel von  $l = 2$  Knotenlinien zu sehen mit  $m \in (-2, -1, 0, 1, 2)$ , im rechten Bild die neun Schwingungsmuster mit  $l = 4$ .

einzigsten freien Parameter, den *Abstand* zwischen den einzelnen Zuständen. Für 'klassische' Schwingungen, wie die einer Seifenhaut oder eines schwingenden Wassertropfens in der Schwerelosigkeit, ist dieser Abstand zwischen den Eigenschwingungen eine nicht weiter bedeutende Größe. In der Quantenphysik verwandeln sich die Eigenschwingungen  $Y_{lm}$  zu abstrakten Zuständen im Hilbertraum, die als komplexe Verallgemeinerung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit gedeutet werden. Der 'Abstand' zwischen den Eigenschwingungen entspricht dem Planck'schen Wirkungsquantum  $\hbar$ . Das Bohr'sche Postulat  $L = n\hbar$  muss durch die Eigenwertgleichung  $\mathbf{L}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm}$  ersetzt werden. Anstelle des klassischen Drehimpulses tritt der Drehimpulsoperator  $\mathbf{L}_z$ , der Drehungen um die  $z$ -Achse erzeugt. Der Operator wirkt auf den Zustand  $Y_{lm}$ . Hier haben wir ganz bewusst die Hauptquantenzahl  $n$  durch die magnetische Quantenzahl  $m$  ersetzt. Der Zusammenhang zwischen Hauptquantenzahl und Drehimpuls, wie er von Bohr postuliert wurde, führt nur aufgrund eines genialen Zufalls zum korrekten Resultat. In Abb. 4.4 sind die Eigenzustände bezüglich  $\mathbf{L}_z$  mit Eigenwert  $m\hbar$  für  $l = 2$  und  $l = 4$  gezeigt. Anstelle der klassischen Vorstellung eines Punktteilchens mit Drehimpuls tritt also die Beschreibung einer stehenden Welle auf der Kugeloberfläche. Durch diese Überlegung wird einsichtig, dass es wichtig ist, die Quantenphysik *aus sich selbst* heraus zu entwickeln, und nicht zu versuchen, irgendeine Analogie zwischen klassischen Begriffen wie dem Drehimpuls und dem quantenmechanischen Drehimpulsoperator auf der Ebene einzelner Atome zu

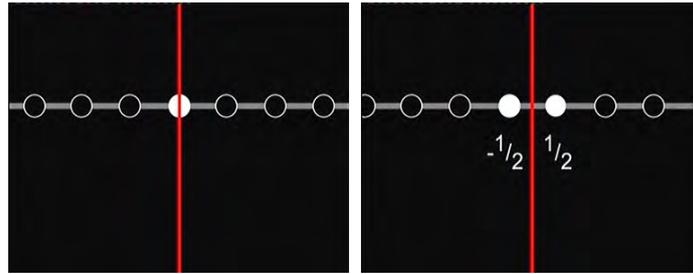


Abbildung 4.5: Durch Spiegelung werden Zustände aufeinander abgebildet. Es existieren zwei grundsätzlich verschiedene Lösungstypen. Entweder die Spiegelebene teilt einen Zustand genau in der Mitte. In diesem Fall ist dieser Zustand sein eigenes Spiegelbild. Diese Lösung entspricht in der Quantenphysik den Kugelflächenfunktionen, die den Bahndrehimpuls beschreiben, siehe Abb. 4.4. Die zweite mögliche Lösung ergibt sich, wenn sich die Spiegelebene genau in der Mitte zwischen zwei Zuständen befindet. Diese Lösung entspricht in der Quantenphysik dem Spinfreiheitsgrad mit halbzahligen Drehimpulsquanten.

bilden. Der Zustand wird durch den Drehimpulsoperator gedreht, aber welchen 'Drehimpuls' der Zustand hat, ist eine andere Frage. Ist der betrachtete Zustand kein Eigenzustand des Drehimpulsoperators, hat der Drehimpuls vor der Messung überhaupt keinen festgelegten Wert. Drehimpulsquantenzahlen lassen sich durch Knotenlinien der Wellenfunktion charakterisieren, was nichts mit einer klassischen, anschaulichen Vorstellung vom Drehimpuls gemein hat. Daher ist es ratsam, ein neues Begriffsgerüst zu nutzen, das auf den Grundbegriffen Operator und Zustand aufbaut, und bei dem Drehimpulsquantenzahlen mit Knotenlinien von stehenden Wellen in Zusammenhang stehen. Für eine genauere Diskussion verweisen wir auf den mathematischen Anhang 7.2<sup>6</sup>.

## Der Spinfreiheitsgrad

Die abstrakte Darstellung aus Abb. 4.5 für die Eigenzustände der Drehimpulsalgebra kann noch verallgemeinert werden. Wir können die Frage stellen, ob es noch eine weitere mögliche Lösung für das 'Spiegel'-Problem gibt, bei dem rechts- und linksdrehende Zustände aufeinander abgebildet werden. Diese rein geometrische Frage ist auch für Schüler zugänglich. Es gibt in der Tat noch eine weitere Lösung für den Fall, dass sich die Spiegelebene genau in der *Mitte* zwischen zwei Zuständen befindet. In diesem Fall gibt es keinen Zustand, der sein eigenes Spiegelbild ist. Diese Lösung des mathematischen

<sup>6</sup>Tatsächlich ergibt sich aus dem kollektiven Verhalten durch Mittelung über viele Atome bei Änderung von Spin bzw. Drehimpuls wiederum eine makroskopische *Drehung*, wie z.B. im Einstein de Haas-Effekt. Allerdings ist die klassische Physik als Grenzfall der Quantenphysik zu verstehen, nicht umgekehrt. Die makroskopische Drehung ist daher nicht gleichzusetzen mit Eigenschaften der mikroskopischen Freiheitsgrade, sondern ergibt sich umgekehrt als Grenzfall nach Mittelung über die mikroskopischen Freiheitsgrade.

Problems hat eine wichtige quantenmechanische Interpretation: Der Zustand  $|\xi_{+1/2}\rangle$  mit Abstand  $+\hbar/2$  von der Spiegelebene entspricht 'Spin up', der Zustand  $|\xi_{-1/2}\rangle$  mit Abstand  $-\hbar/2$  von der Spiegelebene entspricht 'Spin down', siehe auch (??). Zustände mit höherem Spin spielen für das einzelne Elektron keine Rolle, könnten aber in dieser Visualisierung auch dargestellt werden.

Bahndrehimpuls und Spinfreiheitsgrad stehen orthogonal zueinander. Das Produkt  $Y_{lm}\xi_s$  kann somit durch zwei in 90 Grad gekreuzte Spiegel visualisiert werden, siehe Abb. 4.6. Der Abstand zwischen den einzelnen Eigenschwingungen  $Y_{lm}\xi_s$  ist jeweils gegeben durch das Planck'sche Wirkungsquantum  $\hbar$ . In dieser Visualisierung lässt sich folgende wichtige Schlußfolgerung ziehen: Zu  $l = 0$  gibt es zwei, zu  $l = 1$  sechs, und allgemein  $2(2l + 1)$  Zustände pro Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$ , also pro Schwingung mit  $l$  Knotenlinien auf der Kugeloberfläche  $S^2$ . Diese Zustände stehen durch die Spiegelsymmetrie von zwei 'gekreuzten Spiegeln' miteinander in Beziehung. Im mathematischen Anhang 7.5 diskutieren wir die Spiegel-Visualisierung aus Sicht von Gruppentheorie eingehender.

Durch diese elementare Herleitung gelingt es, die  $2(2l + 1)$  möglichen Eigenzustände  $Y_{lm}\chi_s$  der Wellenfunktion des Elektrons und deren Symmetrieeigenschaften zu visualisieren. Die Quantisierung vom Drehimpuls nach Bohr durch  $L = n\hbar$  kann so durch das von Schrödinger vorgegebene Bild von Eigenzuständen bezüglich des Drehoperators ersetzt werden.

Als letzter fehlender Baustein für die Beschreibung des Wasserstoffatoms fehlt nun noch der Radialteil der Wellenfunktion aus Gleichung (4.26). Im folgenden Abschnitt betrachten wir zunächst wieder die mathematische Beschreibung, um dann Möglichkeiten der Visualisierung zu diskutieren.

## 4.4 Visualisierung des Wasserstoffspektrums

Für die stationären Lösungen der Schrödingergleichung des Elektrons im Potential des Atomkerns gilt mit dem Hamiltonoperator (4.25)

$$\mathbf{H}R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) = -\frac{Ry}{n^2}R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.37)$$

Hierbei bezeichnet  $n$  die Hauptquantenzahl. Bezüglich der Drehimpulsquantenzahl  $l$  ist die Energie  $E_n = -Ry/n^2$  in dieser Näherung entartet. Hier zeigt sich deutlich, dass die klassische Vorstellung vom Drehimpuls eines Punktteilchens zu Fehlvorstellungen führt, denn z.B. im Fall einer Kreisbahn besteht zwischen Energie  $E$  und Drehimpuls  $L$  der Zusammenhang  $E \propto \frac{1}{L^2}$  (4.13). Im Bild von Drehoperatoren und Zuständen löst sich der Widerspruch: Der Zustand mit Drehimpulsquantenzahl  $l$  hat  $l$  Knotenlinien auf jeder 'Zwiebelschale' mit konstantem Radius. Die Energie des Elektrons hängt nur von der Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons vom Atomkern ab. Anstelle von der klassischen Vorstellung von 'Drehimpuls' tritt die Verteilung von Knotenlinien in der Wellenfunktion auf Kugelflächen mit konstantem Radius. Beispielsweise gehören zur Quantenzahl  $l = 2$  zwei Knotenlinien in der Kugelflächenfunktion  $Y_{2m}$ . Diese haben nur mittelbar Einfluss auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Ebenso

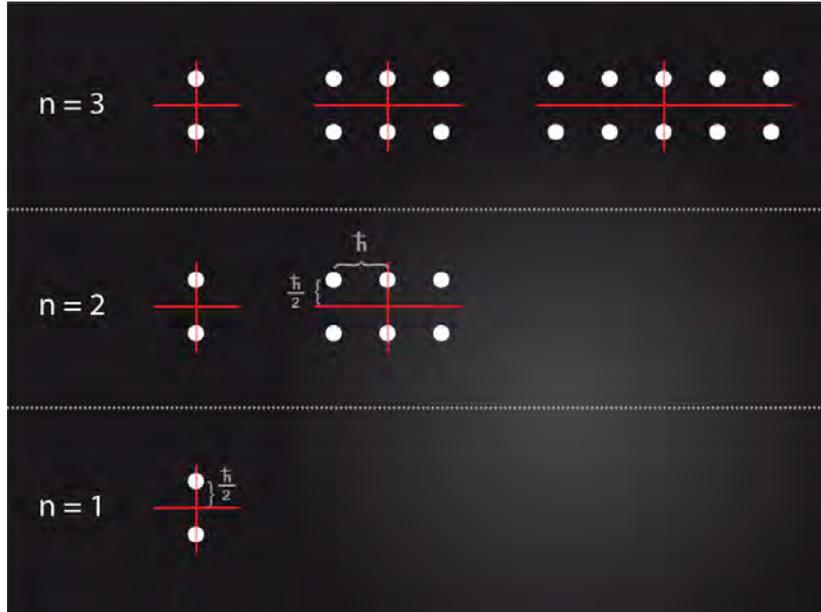


Abbildung 4.6: Das Produkt aus Bahndrehimpuls und Spin  $Y_{lm}\chi_s$  wird durch die Quantenzahlen  $\{l, m, s = \pm 1/2\}$  beschrieben. Zu jeder Hauptquantenzahl  $n$  gibt es  $l = 0, 1, \dots, (n - 1)$  Lösungen im Wasserstoffproblem. Durch die Visualisierung der Symmetrien dieser Zustände durch 'gekreuzte Spiegel' kann die Gesamtanzahl  $2n^2$  von Basiszuständen für gegebenes  $n$  durch Abzählen leicht verifiziert werden.

entscheidend für die Energie des Elektrons ist die radiale Wellenfunktion  $R_{nl}(r)$ . Auch hier ist das Abzählen von Knotenlinien hilfreich für die Vorstellung. Je mehr Knotenlinien die radiale Wellenfunktion  $R_{nl}(r)$  hat, desto weiter ist das Elektron im Mittel vom Atomkern entfernt, desto weniger stark gebunden ist das Elektron. Der Grundzustand  $\psi_0 \equiv R_{10}Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp[-r/a]$  ist der radialsymmetrische Zustand ( $n = 1, l = 0$ ) mit gar keinen Knotenlinien. Hierbei bezeichnet  $a$  den Bohr'schen Radius. Der Grundzustand ist der einzige Fall, bei dem auch für  $r = 0$  eine nichtverschwindende Amplitude auftritt,  $\psi_0(0) \neq 0$ . Eine schultaugliche Variante, die Grundzustandsenergie ohne das Bohr'sche Atommodell zu berechnen, gelingt wie folgt. Betrachten wir die klassische Energiefunktion (4.1) für das Elektron im Coulomb-Potential,

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|}. \quad (4.38)$$

Der Übergang zur Quantenmechanik gelingt durch die Interpretation der Energie als Erwartungswert des Hamiltonoperators im Grundzustand,

$$E_0(p, x) = \langle \psi_0 | \mathbf{H} | \psi_0 \rangle.$$

Die Kernaussage aus der Betrachtung der Drehimpulsalgebra ist die Tatsache, dass der kleinstmögliche Abstand zwischen den Drehimpulsquantenzahlen  $\hbar$  ist. Daher können auch Ort  $x$  und Impuls  $p$  nicht beliebig genau gemessen werden, da dies auch eine genaue Messung vom Drehimpuls ermöglichen würde. Das Produkt der Unsicherheiten bei der Messung von Ort und Impuls kann also von der Größenordnung niemals kleiner als  $\hbar$  sein. Dies wird durch die Heisenberg'sche Unschärferelation ausgedrückt, [107]<sup>7</sup>

$$\Delta x \Delta p \simeq \hbar. \quad (4.39)$$

Für den Grundzustand wird die Energie unter der Nebenbedingung (4.39) minimiert, es gilt also

$$\frac{dE_0}{d\Delta p} = \frac{d}{d\Delta p} \left( \frac{(\Delta p)^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta p}{\hbar} \right) = 0 \quad (4.40)$$

und somit für die minimale Schwankung

$$\Delta p_M = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{\hbar}. \quad (4.41)$$

Setzen wir die minimalen Schwankungen  $\Delta p_M, \Delta x_M = \frac{\hbar}{\Delta p_M}$  in die Energiefunktion ein, ergibt sich

$$E_0 = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{\hbar^2} - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{\hbar^2} = -\frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \equiv -Ry. \quad (4.42)$$

Durch diese Rechnung wird nebenbei auch das Virialtheorem  $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle$  für das Zentralpotential bestätigt, vor allem aber die Rydberg-Konstante  $13.59eV$  hergeleitet. Da der Grundzustand gar keine Knotenlinien hat, gibt es keine weiteren möglichen Kombinationen mit einer anderen Kugelflächenfunktionen, und lediglich aufgrund des Spins ergibt sich eine zweifache Entartung. Alle Zustände mit  $n = 1$  werden somit durch  $\{l = 0, s = \pm 1/2\}$  in Abb.4.6 repräsentiert.

Dasselbe Ergebnis für die Grundzustandsenergie ergibt sich durch explizite Berechnung des Eigenwertes der stationären Schrödingergleichung mit dem Hamiltonian (4.25) im Coulomb-Potential,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\psi_0 &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right] \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp[-r/a] \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a^2} + \frac{\hbar^2}{mr} \frac{1}{a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right] \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp[-r/a] \\ &= E_0 \psi_0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

---

<sup>7</sup>Der Faktor 1/2 in der genaueren Variante  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$  folgt nicht aus unserer elementarisierten Argumentation über den kleinstmöglichen messbaren Drehimpuls und kann in der Schule auch vereinfachend weggelassen werden. Heisenberg selber hat zunächst die Variante  $\Delta x \Delta p \simeq \hbar$  der Unschärferelation veröffentlicht, die er erst später weiter verfeinert hatte.

Der Wert für den Bohr'schen Radius ergibt sich aus der Bedingung, dass die  $1/r$ -abhängigen Terme sich wegheben,

$$\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{r} \frac{1}{a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = 0. \quad (4.44)$$

Es folgt das bekannte Resultat  $a = \frac{\hbar^2}{me^2}(4\pi\epsilon_0)$  für den Bohr'schen Radius, und für die Grundzustandsenergie in Abhängigkeit vom Bohr'schen Radius

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a^2} = -\frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2(4\pi\epsilon_0)^2} = -Ry \quad (4.45)$$

Der hier gezeigte Rechenweg für die Grundzustandsenergie wird im Anhang 7.3 für den Fall des Helium-Atoms verallgemeinert.

## Der Zusammenhang zwischen dem Energiespektrum $E_n$ und der Gesamtanzahl von $(n-1)$ Knotenlinien in $R_{nl}Y_{lm}$

Die Energieabhängigkeit  $E_n \propto -\frac{1}{n^2}$  des  $n$ -ten angeregten Zustands kann auch ohne Rückgriff auf das Bohr'sche Atommodell in der Schule mit einfachen Annahmen halbquantitativ hergeleitet werden [131]. Wesentlicher als diese Herleitung sind aber die zugrundeliegenden Konzepte. Für  $n = 2$  ist der mittlere Abstand des Elektrons vom Atomkern größer. Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 100% betragen muss, wird durch jede weitere Knotenlinie zwangsläufig mehr Anteil der Aufenthaltswahrscheinlichkeit weiter vom Atomkern entfernt sein und die Bindung zum Atomkern daher schwächer. Dies kann auf zwei Weisen gelingen: Entweder durch eine Radialwellenfunktion mit einer zusätzlichen Knotenlinie, oder durch eine zusätzliche Knotenlinie in der Kugelflächenfunktion. Diese Möglichkeiten werden für  $n = 2$  durch  $\psi_{2,0,0} = R_{20}Y_{00}$  und  $\psi_{2,1,m} = R_{21}Y_{1m}$  beschrieben. Daraus wird ersichtlich, warum die Drehimpulsabhängigkeit der Energie gering ist: Entscheidend für die Energie ist die Gesamtanzahl von Knotenlinien der Kombination  $R_{nl}Y_{lm}$ , und nicht allein in  $Y_{lm}$ . Ob sich die Knotenlinien in radialer Richtung oder senkrecht dazu befinden, ist von untergeordneter Bedeutung. Diese Abschätzung wird durch die explizite Rechnung in dieser Näherung bestätigt. Die Gesamtzahl von Knotenlinien im Zustand  $R_{nl}Y_{lm}$  beträgt gemäß der nichtrelativistischen Schrödingertheorie im Wasserstoffatom  $(n - 1)$ . Es entfallen  $l$  Knotenlinien auf die Kugelflächenfunktionen, und  $(n - l - 1)$  auf die Radialfunktion  $R_{nl}$ . Da der Grundzustand mit  $n = 1$  keine Knotenlinien hat, gilt hier  $l = (n - 1)$ , was auch allgemein der maximalen Anzahl von Knotenlinien in  $Y_{lm}$  zu festem  $n$  entspricht. Wenn alle  $(n - 1)$  Knotenlinien auf  $Y_{n-1,m}$  fallen, bleibt für den Radialteil keine übrig; in der Tat gilt  $R_{n,n-1}(r) \propto r^{n-1}e^{-r/(na)}$ , was einer Radialwelle ohne Knotenlinien entspricht. Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ist  $\rho(r)dr = 4\pi^2r^2R_{n,n-1}^2dr$ . Das Maximum ergibt sich durch Differentiation  $d\rho(r)/dr = 0$  und liegt bei  $r_n = n^2a$ . Dieses Resultat ist identisch mit der  $n$ -ten Kreisbahn des Bohr'schen Atommodells und bestätigt den Schalenbau der Elektronenhülle.

## Visualisierung von Wahrscheinlichkeiten und Amplituden

Um ein Verständnis für die Wahrscheinlichkeitsdichten  $|R_{nl}Y_{lm}|^2 d\Omega r^2 dr$  zu erhalten<sup>8</sup> schlagen wir vor, wie in Abb. 4.4 zunächst nur die Schwingungen auf *einer* Kugeloberfläche  $Y_{lm}$  alleine zu betrachten, und dann erst die Kombination mit der Radialwellenfunktion  $R_{nl}$ . Durch diesen Zugang wird die Anzahl  $(2l + 1)$  möglicher Zustände und die Symmetrie-Beziehung zwischen den Zuständen einsichtig. Weiterhin kann durch die abstrakte Visualisierung Abb. 4.5 der Spin-Freiheitsgrad eingeführt werden. Weiterhin schlagen wir vor, Amplituden und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gemäß dem Vier-Quadranten Schema (Abb. 3.4) voneinander getrennt zu visualisieren. Dadurch können zusätzlich zwei entscheidende Eigenschaften der Quantenphysik dargestellt werden: (1) Interferenzfähigkeit, z.B. bei Hybridisierungen (2) Korrelationen und Verschränkung bei Mehr-Elektron Systemen.

Zur Visualisierung des gesamten Spektrums möglicher Zustände des Wasserstoffatoms schlagen wir die Analogie zu einer Orgel mit verschiedenen Manualen vor, siehe Abb. 4.7. Auf dem untersten Manual ( $n = 1$ ) gibt es zwei Tasten, auf dem zweiten Manual ( $n = 2$ ) acht, auf dem dritten ( $n = 3$ ) achtzehn. Jede Taste entspricht einem möglichen Eigenzustand. Ist die Taste gedrückt, entspricht dies einem besetzten Zustand. Hier wird deutlich, dass mehrere Tasten gleichzeitig gedrückt sein können - dass der Zustand des Elektrons sich also nicht immer durch Eigenzustände bezüglich des Drehimpuls- bzw. Hamiltonoperators beschreiben lässt, sondern dass die 'Orgeltasten' lediglich die Basisschwingungen beschreiben. Analog zu Schallwellen sind auch die Amplituden interferenzfähig und können Mischformen - Hybridisierungen - der einzelnen Schwingungen annehmen.

Die Auswahlregeln  $\Delta l = \pm 1$  und  $-1 \leq \Delta m \leq +1$  beim Übergang mit Energiedifferenz  $E_n - E_m = \hbar\omega$  kann wie folgt elementar gedeutet werden. Das emittierte (absorbierte) Photon hat Drehimpulsquantenzahl  $l = +1$ , was in der Visualisierung als eine Schwingung mit einer Knotenlinie in der Polarisation gedeutet werden kann, siehe Abb. 7.3. Bei einem Übergang mit  $\Delta m = 0$  rotiert die Knotenlinie nicht, das emittierte Licht ist linear polarisiert. Bei einem Übergang mit  $\Delta m = \pm 1$  rotiert die Knotenlinie rechts- bzw. linksherum, das emittierte Licht ist rechtszirkular bzw. linkszirkular polarisiert. In jedem Fall wird beim Übergang eine Knotenlinie aus dem Anteil  $Y_{lm}$  der Wellenfunktion des Elektrons auf das emittierte (absorbierte) Photon übertragen. Die Drehimpulserhaltung kann im Fall von atomaren Übergängen vereinfacht gesprochen mit der Übertragung von Knotenlinien vom Anteil  $Y_{lm}$  der Wellenfunktion des Elektrons auf die Polarisation des Photons gedeutet werden. Auch für den Zwei-Photon Übergang, der bei der Entstehung von polarisationsverschränkten Photonen im BBO-Kristall auftritt, ist diese Interpretation möglich. Dies ist nicht als strenges Naturgesetz zu verstehen, sondern als eine schultaugliche Hilfestellung, um soweit wie möglich den abstrakten Begriffen eine Anschauung zu verleihen.

---

<sup>8</sup> $d\Omega = d \cos \theta d\phi$  ist der Raumwinkel.

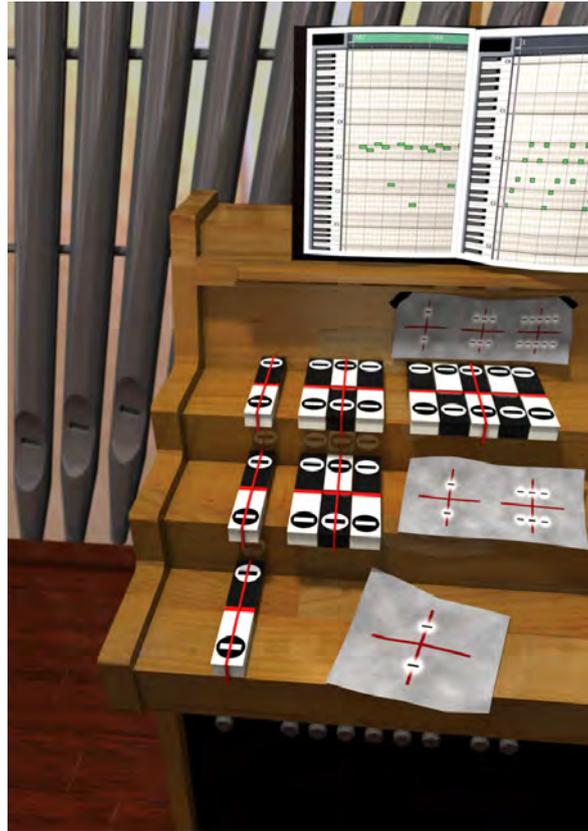


Abbildung 4.7: Die Quanten-Orgel: Visualisierung der möglichen Basiszustände  $R_{nl}Y_{lm}\chi_s$  zu den Hauptquantenzahlen  $n = 1, 2, 3$  als Orgelmanuale. Hybridisierungen entsprechen der Kombinationen mehrerer Tasten, die unterschiedlich stark gedrückt werden.

## 4.5 Aufbau des Periodensystems

Ausgehend von Schrödingers Grundidee, Messungen in der Quantenphysik mathematisch durch Eigenwertprobleme darzustellen, ist es gelungen, die grundlegenden Eigenschaften der Wellenfunktion  $\Psi = R_{nl}Y_{lm}\chi_s$  des Wasserstoffatoms zu visualisieren. Bei der Verallgemeinerung vom Wasserstoffatom auf kompliziertere Atome stoßen wir wie im dritten Kapitel auf das Thema Vielteilchenquantenphysik. Die vier Bell-Zustände, Nichtlokalität, und alle Konzepte, die beim Thema Verschränkung von Photonenpaaren eine Rolle spielen, treten hier in einem deutlich komplizierteren Zusammenhang wieder auf. Zumindest für die Hochschuldidaktik - nicht zuletzt auch für das Molekülorbitalmodell der Chemie - scheint es gerechtfertigt, auch dieses Thema in einfachen Bildern darzustellen.

Wir betrachten zur Illustration das Helium-Atom mit zwei Elektronen. Wir bezeichnen den Quantenzustand des ersten Elektrons mit  $A$ , und den des zweiten mit  $B$ . Beschreibt  $A$  die Wellenfunktion im Grundzustand ( $n = 1, l = 0, m = 0$ ) und  $B$  einen angeregten

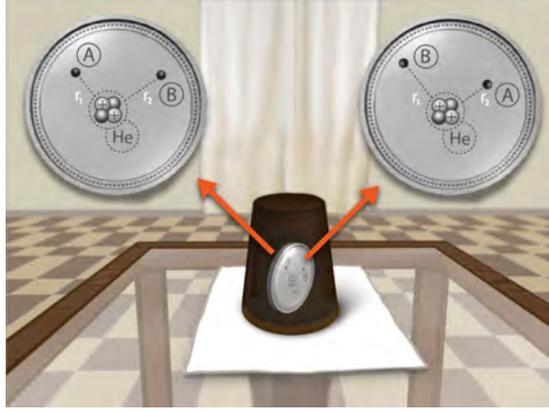


Abbildung 4.8: Die beiden Elektronen im Helium sind aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Zuordnung der Wellenfunktionen  $A$  und  $B$  zu Elektron 1 und 2 miteinander verschränkt. Beide Elektronen werden durch *eine* gemeinsame Wellenfunktion beschrieben. Die Superposition wird durch eine rotierende Münze visualisiert.

Zustand ( $n > 1, l', m'$ ), so könnten wir versuchen, für die Ortswellenfunktion der Elektronen bei  $\vec{x}_1$  bzw.  $\vec{x}_2$  den Ansatz  $\phi^A(\vec{x}_1)\phi^B(\vec{x}_2)$  zu wählen, wobei  $\phi^A(\vec{x}_1)$  und  $\phi^B(\vec{x}_2)$  jeweils die Wellenfunktion des einzelnen Elektrons beschreibt. Entscheidend ist nun die Ununterscheidbarkeit der Elektronen. Es ist nicht möglich, zwischen der Kombination 'Elektronzustand  $A$  am Ort 1 und  $B$  am Ort 2' von der Kombination ' $B$  am Ort 1 und  $A$  am Ort 2' zu unterscheiden. Es ergibt sich genau wie im Fall der Polarisation eines Photonenpaares ein verschränkter Zustand, der mit einer rotierenden Münze verglichen werden kann, siehe Abb. 4.8. Der Ortsanteil der gemeinsamen, verschränkten Wellenfunktion lautet also

$$\psi_{A,B}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^A(\vec{x}_1)\phi^B(\vec{x}_2) \pm \phi^B(\vec{x}_1)\phi^A(\vec{x}_2)]. \quad (4.46)$$

Dieser Ausdruck entspricht den Bell-Zuständen (3.31). Im Gegensatz zum Fall der polarisationsverschränkten Photonen, bei denen die Zustände  $A$  und  $B$  lediglich durch die Polarisation beschrieben werden, wird in diesem Fall  $A$  und  $B$  jeweils durch die Kombination der Quantenzahlen  $(n, l, m)$  definiert. Das zugrundeliegende Bild einer rotierenden Münze, die die Ununterscheidbarkeit verschiedener Kombinationen darstellt, gilt allerdings auch für diesen Fall. Beide Elektronen müssen als *ein* Objekt betrachtet werden, da keinem Elektron ein spezieller Punkt zugeordnet werden kann. Die Ortswellenfunktion  $\psi_{A,B}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  kann symmetrisch oder antisymmetrisch unter Vertauschung der beiden Elektronen sein. Zur Visualisierung ist es unabdingbar, Amplituden darzustellen, da allein die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in diesem Fall nicht die Verschränkung abbilden kann, vergleiche hierzu auch Abb. 3.14. Durch die Symmetrie der Ortswellenfunktion wird auch die Symmetrie des Spinanteils vorgegeben. Wenn der Ortsanteil symmetrisch ist, muss der Spin-Anteil antisymmetrisch sein. Die Kombination von zwei

Spins ergibt nur in einer einzigen Kombination eine antisymmetrische Wellenfunktion, die dem antisymmetrischen Bell-Zustand in (3.16) entspricht. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{SA} &= \psi_{A,B}^S(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \times \xi^A(s_A, s_B) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^A(\vec{x}_1)\phi^B(\vec{x}_2) + \phi^B(\vec{x}_1)\phi^A(\vec{x}_2)] \times \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{+1/2}^A\chi_{-1/2}^B - \chi_{+1/2}^B\chi_{-1/2}^A]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Gesamtwellenfunktion des Elektronenpaares ist antisymmetrisch; es gilt  $\Psi_{A,B} = -\Psi_{B,A}$ . Sowohl der Ortsanteil als auch der Spinanteil sind verschränkt. Für den Fall, dass sich beide Elektronen im Grundzustand befinden ( $A = B$ ), muss der Spinanteil antisymmetrisch sein, da der Ortswellenanteil  $\phi^A(\vec{x}_1)\phi^A(\vec{x}_2)$  symmetrisch sein muss.

Ist ein Elektron im angeregten Zustand, das andere im Grundzustand, kann auch die Ortswellenfunktion antisymmetrisch sein. Daher gibt es neben (4.47) noch eine zweite mögliche Kombination der Zustände,

$$\begin{aligned} \Psi_{A,B}^{AS} &= \psi_{A,B}^S(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \times \xi^A(s_A, s_B) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^A(\vec{x}_1)\phi^B(\vec{x}_2) - \phi^B(\vec{x}_1)\phi^A(\vec{x}_2)] \times \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{+1/2}^A\chi_{-1/2}^B + \chi_{+1/2}^B\chi_{-1/2}^A]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Beide Kombinationen entsprechen unterschiedlichen Energien, die sich im Spektrum des Heliums wiederfinden. Für weitere explizite Rechnungen zum Helium-Atom verweisen wir auf den mathematischen Anhang 7.3. Wichtig ist es uns hier zu erkennen, dass die Elektronen in Mehr-Elektronen-Systemen wie Atome und Moleküle miteinander verschränkt sein können, und dass grundlegende Eigenschaften des Spektrums durch die Anwendung von Symmetrieprinzipien, Ununterscheidbarkeit und dem Superpositionsprinzip zugänglich gemacht werden können.

## 4.6 Ausblick: Verschränkung und chemische Bindungen

Es gibt in der Chemieliteratur hochentwickelte Visualisierungssoftware für Proteine und Makromoleküle in der Biochemie, aber auch für die Orbitale in einfachen Molekülen wie  $C_6H_6$  [128]. Stereographische Darstellungen von chemischen Reaktionen mit Hilfe solcher Repräsentationen gehören mittlerweile zum Standard in der Ausbildung in der Chemie. Die Visualisierungen - und auch solche in der Physiklehrerausbildung [23] - zeigen allerdings bislang nur Darstellungen, die in unserem Vier-Quadranten Schema Abb. 3.4 dem III. Quadranten entsprechen. Wenn nur die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten visualisiert werden, ist es nicht verständlich, wie es zu Hybridisierung und Verschränkung kommen kann. Wesentlich sind hierfür Interferenzfähigkeit und Ununterscheidbarkeit. Erst in der Darstellung von Amplituden (IV. Quadrant) lassen sich die chemischen Bindungen vollständig visualisieren. Für die kovalente Bindung im Wasserstoff-Molekül kann ähnlich wie im Fall des Heliumatoms die Kombination von zwei verschränkten Wellenfunktionen für den Orts- und den Spinanteil angesetzt werden, siehe Abb. 4.9.

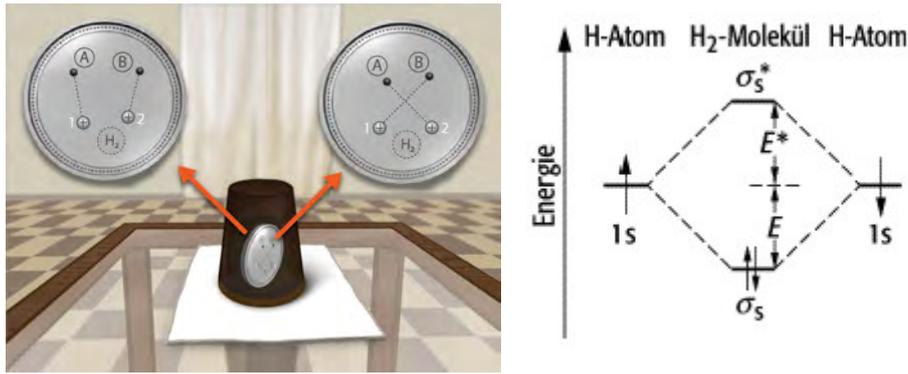


Abbildung 4.9: Links: Die beiden Elektronen im Wasserstoff-Molekül sind aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Zuordnung der Wellenfunktionen  $A$  und  $B$  zu Atomkern 1 und 2 miteinander verschränkt. Rechts: Molekülorbital-Modell von Wasserstoff  $H_2$  [107].

Das 'bindende' und das 'antibindende' Molekülorbital ( $\sigma_s$  und  $\sigma_s^*$  in Abb. 4.9) entsprechen in diesem Fall der symmetrischen und der antisymmetrischen verschränkten Ortswellenfunktion. Die Symmetrisierung folgt aus dem Superpositionsprinzip ununterscheidbarer Kombinationen der Zuordnung der Elektronen zu Atomkernen, die hier als zwei Seiten einer Medaille visualisiert werden. Das Konzept der Verschränkung wird bislang in der Chemiedidaktik kaum beachtet. Hier wäre eine Kooperation sinnvoll, um Molekülorbitaltheorie stärker aus der Sicht von Quantenphysik didaktisch aufzuarbeiten. Bei der Visualisierung der Kopplung von Elektron und Photon gibt es ebenfalls noch viel Potential für die Zukunft. Wie im mathematischen Anhang 7.6 skizziert, wäre es hier möglich, das Eichprinzip zu visualisieren und schultauglich darzustellen.

Auf dem geplanten zweiten Teil der DVD-ROM *Quantendimensionen* werden die hier beschriebenen Visualisierungen zur Atom- und Molekülphysik im Vier-Quadranten Schema strukturiert und in einzelnen Slides in Text- und Animationssequenzen Schritt für Schritt nachvollziehbar aufgearbeitet.

# 5 Evaluation und Diskussion

Parallel zur DVD-ROM Produktion wurden regelmäßig Tests an Schulen durchgeführt, um den aufwändigen Produktionsprozess zu optimieren. Die ersten Schultests wurden mit insgesamt 76 Schülern im April 2008 durchgeführt, eine weitere Studie wurde im Zeitraum März-Mai 2009 mit 232 Schülern durchgeführt. Im Herbst 2010 wurde noch eine online-Umfrage mit etwa 100 Teilnehmern vorgenommen, bevor die DVD-ROM 'Quantendimensionen - Doppelspalt, Verschränkung, Quantencomputer' im November 2010 im KLETT-Verlag und bei Sciencemotion veröffentlicht wurde.

Die Grundidee, das Spektrum der Physikdidaktik durch die Kooperation mit Designern und Filmproduzenten zu erweitern, ist in den Möglichkeiten sehr weit gefächert. Die Aufteilung der Produktion in einen Spielfilm und erklärende bzw. ergänzende Elemente war schnell gefunden. Auch das zentrale Thema Verschränkung war schnell identifiziert, da es einerseits in der Schule noch so gut wie gar nicht behandelt wird, andererseits für viele aktuelle Themen relevant ist. Nach Projektbeginn im Frühjahr 2007 haben wir zunächst das Drehbuch des Films geschrieben und die Vorbereitungen für die Filmproduktion begonnen. Parallel dazu sind Storyboards zu erklärenden Zeichentrick-Animationen entstanden. Ende Februar 2008 waren die Dreharbeiten zum Spielfilm abgeschlossen und das Animatic zu den Zeichentricksequenzen fertiggestellt. Filmdrehbuch und Zeichentrick-Storyboard liegen dieser Arbeit in elektronischer Form bei.

## 5.1 Resultate der ersten Pilotstudie (April 2008)

Zum Zeitpunkt dieser Tests war der Rohschnitt des Spielfilms und die Animatics zu den erklärenden Zeichentricksequenzen fertiggestellt. Insgesamt haben wir an vier Gymnasien in je einer Doppelstunde im Physik Grund- bzw. Leistungskurs die Thematik des Films vorgestellt, das Grundprinzip von Verschränkung erläutert und die winkelabhängige Korrelationsfunktion  $C(\alpha, \beta) = \cos[2(\alpha - \beta)]$  des Bell-Zustandes

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|HH\rangle + |VV\rangle$$

durch die Methode der Schachbrett-Überlagerung berechnet, und den Rohschnitt des Spielfilms gezeigt. Der Unterricht entspricht im wesentlichen dem auf der DVD-ROM veröffentlichten Unterrichtsverlaufsvorschlag. Am Ende der Stunde haben die Schüler einen Fragebogen mit acht Fragen beantwortet und allgemeine Kommentare zum Rohschnitt des Spielfilms 'Schattenwelten' schriftlich gegeben. Ziel der Untersuchung war es festzustellen, ob

- (1) das Thema 'Nichtlokalität und Verschränkung' auf Interesse stößt,
- (2) die Visualisierungstechniken angenommen werden,
- (3) der Spielfilm Interesse weckt,
- (4) die erklärenden Zeichentricksequenzen angenommen werden.

Die Aussage (1) 'Die Thematik Nichtlokalität und Verschränkung hat mich interessiert' konnte auf einer Skala von 1 (Trifft vollkommen zu) bis 5 (Trifft nicht zu) bewertet werden. Die Resultate sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

Skala (1=Zustimmung, 5= Ablehnung)	1	2	3	4	5
Geschwister Scholl Gymnasium	14	9	3	0	0
Gymnasium St. Mauritz	6	4	1	0	0
Gymnasium Paulinum	10	11	3	0	0
Loburg	6	4	3	2	0
<b>Summe</b>	<b>36</b>	<b>28</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>0</b>
<b>Prozent</b>	<b>47%</b>	<b>37%</b>	<b>13%</b>	<b>3%</b>	<b>0%</b>

Von 76 Schülern haben 64 (entsprechend 84 Prozent) sehr großes oder großes Interesse am Thema Nichtlokalität in der Quantenphysik gezeigt. Die Aussage (2) 'Die Berechnung der Korrelationsfunktion mit Schwarz-Weiß Feldern hat mir gefallen' wurde wie folgt bewertet:

Skala (1=Zustimmung, 5= Ablehnung)	1	2	3	4	5
Geschwister Scholl Gymnasium	6	13	4	2	0
Gymnasium St. Mauritz	5	3	3	2	0
Gymnasium Paulinum	7	11	4	1	0
Loburg	3	9	2	0	1
<b>Summe</b>	<b>21</b>	<b>36</b>	<b>13</b>	<b>5</b>	<b>1</b>
<b>Prozent</b>	<b>28%</b>	<b>47%</b>	<b>17%</b>	<b>7%</b>	<b>1%</b>

Von 76 Schülern haben 67 (entsprechend 88 Prozent) sehr große oder große Zustimmung zur Visualisierungstechnik der Korrelationsfunktion gegeben. Zusammenfassend können wir feststellen, dass sowohl die Themenwahl als auch die Visualisierungstechnik auf Zustimmung gestoßen ist. Der tatsächliche Lernerfolg konnte und sollte an dieser Stelle noch nicht gemessen werden. Für uns war lediglich wichtig zu entscheiden, ob wir mit unserer Arbeit auf dem richtigen Weg sind.

(3) Der Rohschnitt des Spielfilms konnte in freiem Fließtext kommentiert werden. Hier ergab sich ein gemischtes Bild von großer Zustimmung bis zu Unverständnis und Ablehnung. Für Laien in der Filmproduktion ist es mitunter schwierig, vom Rohschnitt auf das fertige Werk zu schließen. Andererseits bietet ein frühes Feedback zur Filmproduktion noch Möglichkeiten zu Verbesserungen. Exemplarisch zitieren wir hier einige Kommentare:

'Der Film weckt in starken Maße die Neugier! Gibt es unbekannte Phänomene, die dem Zuschauer nähergebracht werden sollen? Wie bei der Zauberei entsteht ein Verlangen,

Alice: "Ok. Du schießt mit der Photonenkanone auf diesen Schirm. Bei jedem Treffer mit einem Photon hier auf dem Schirm fällt eine Kugel von oben in eine entsprechende Röhre."

"Versuch mal, auf diese Stelle des Schirms zu zielen. Du hast 500 Schuss."



Abbildung 5.1: Links: Ausschnitt aus dem Storyboard zu U1-05 'Doppelspalt' mit Dialog zwischen Alice und Bob. Rechts: Szenenbild aus der fertigen Zeichentricksequenz. Der Zugang zu Erklärungen über Zeichentrickanimationen und Dialoge wurde im späteren Verlauf des Projektes durch eine interaktive DVD-ROM ersetzt, wie in Abb. 3.9 gezeigt.

Hintergründe zu begreifen, Unbekanntes zu entdecken. (...) Ich würde mir im gezeigten Ausschnitt etwas nähere Hinweise auf das Phänomen wünschen. Der Film dient der Motivation, ist ganz spannend, aber vielleicht zu verworren!

'Der Film ist gut, wenn auch ein bisschen länglich. Er enthält schöne visuelle Effekte. Manche Szenen habe ich allerdings nicht verstanden wie z.B. die aufgetürmten Eimer und die selbstspiegelnde Gitarre. Die Schauspieler machen ihre Sache gut.'

'Die Anfangsmotivation für die Suche nach Professor Omega kommt zu schwach rüber.'

'Die Dialoge gefallen mir sehr gut, nur Bob wird auffällig schlechter gespielt als Alice. Besonders gut sind alle Szenen, in denen die Schachbretter eine Rolle spielen.'

Verbesserungen, die nach dem Rohschnitt noch umgesetzt wurden, sind Kürzungen und bessere Schnitte. Durch die Rückmeldungen konnte auch eine noch stärkere Vernetzung mit dem erklärenden DVD-ROM Teil realisiert werden.

(4) Im Zeichentrickteil werden in dem ursprünglichen Konzept die einzelnen physikalischen Themen von den Charakteren Alice und Bob im Experiment durchgeführt und in Dialogform diskutiert. Als Beispiel sei hier ein Ausschnitt aus dem Storybord zum Thema Doppelspalt zitiert, siehe auch Abb. 5.1.

#### *Zeichentrick-Storyboard, Lernstation U1-5*

*Sie schauen sich das Ergebnis an. Die Kugeln bilden in der Reihe ein Wellenmuster, mit den meisten Kugeln in der Mitte.*

Bob: Mh... die Anordnung der Kugeln kommt mir doch bekannt vor. Hat dieses Photonexperiment auch was mit Wahrscheinlichkeiten zu tun? Oder was mit Wellen, ich meine ...

Alice: ...wenn du damit meinst, dass du ein miserabler Photonenlaser-Schütze bist,

lautet die Antwort definitiv ja.

*Bob geht mürrisch zum Einfachspalt und öffnet einen einen weiteren Schlitz.*

Bob: Pah. Meinst du, ich hätte bei dem Pyramiden-Schieß-Spiel nix gelernt?

\* \* \*

Bis Anfang 2009 war die Postproduktion des Spielfilms inklusive Vertonung fertig, sowie alle Storyboards und Animatics für die U-Bahnlinie U1<sup>1</sup>. Die Zeichentricksequenz U1-05 zum Doppelspaltexperiment war fertig produziert. Parallel zur diesen Arbeiten wurden auch eine Vielzahl von Computeranimationen erstellt, die vor allem zum Themenkreis Atom- und Molekülphysik gehören (U-Bahnlinien U2 und U3)<sup>2</sup>.

Einige der erklärenden Zeichentricksequenzen wurden in zwei Schulklassen gezeigt und auch online getestet. Rückblickend hätte schon zu diesem Zeitpunkt auffallen müssen, was an diesem Ansatz nicht funktioniert. Die Kommentare der Schüler waren größtenteils neutral bis negativ, allerdings nicht differenziert. Zu diesem Zeitpunkt hatten wir auch selber noch nicht verstanden, worin das tatsächliche Problem liegt. Unsere Vermutung war, dass die holzschnittartige Darstellung im Animatic für Medien-Laien nicht ausreicht, um auf das fertige Produkt zu schließen. Lerntheoretisch gibt es hier zwei sich widersprechende Zielsetzungen, zum einen den Kontextbezug, zum anderen die Forderung nach minimaler extrinsischer kognitiver Belastung, siehe Abb. 1.3. Uns war zu diesem Zeitpunkt nicht klar, welchem Ziel wir Priorität einräumen sollten. Es lagen auch keine empirischen Untersuchungsergebnisse vor, die uns eine klare Richtung hätten vorgeben können.

Weiterhin hatten wir den zeitlichen Aufwand für die Produktion einer Zeichentricksequenz unterschätzt. Die ursprüngliche Projektlaufzeit von zwei Jahren konnte nicht eingehalten werden. Vor allem stand aber die Frage im Raum, ob die Produktion von Zeichentricksequenzen überhaupt zielführend war. Von dem ursprünglich beantragten Finanzierungsvolumen hatten wir bis Ende 2008 gut 60 Prozent verausgabt. Zu diesem Zeitpunkt hat der Geldgeber die weitere Finanzierung des Projektes mit der Begründung eingestellt, dass das 'Projektziel nicht erreicht' wurde.

## 5.2 Resultate der zweiten Pilotstudie (März-Mai 2009)

Das Ende der Finanzierung und die harte Kritik am Konzept der geplanten DVD-ROM war für das gesamte Produktionsteam eine große Herausforderung. Die Resultate der ersten Pilotstudie hatten gezeigt, dass die Thematik und Visualisierungen nicht so schlecht bewertet wurden, wie von den Geldgebern behauptet. Allerdings stand die Frage im Raum, wie die Erklärungen auf der DVD-ROM aufgearbeitet werden sollen. In der zweiten Pilotstudie mit 232 Schülern haben wir nochmal genauere Resultate zu denselben Fragen (1)-(4) erzielt. Zu den Fragen (1) und (2), also Themenwahl und Visualisierungs-

---

<sup>1</sup>Ein Animatic ist ein animiertes Storyboard, mit dem Text- und Bildrhythmus festgelegt werden.

<sup>2</sup>Die Animationen zu U2 und U3 sind auf der ersten DVD-ROM noch nicht veröffentlicht.

technik, haben wir wie schon in der ersten Studie sehr positive Resultate gefunden. Hier waren wir also von Anfang an auf der richtigen Fährte. Zum Spielfilm, Frage (3), haben wir noch einige genauere Werte ermittelt, die wir hier auflisten (Angaben in Prozent und Anzahl von abgegebenen Stimmen):

Skala (1=Positiv, 5= Negativ)	1	2	3	4	5
1. Film weckt Neugier auf Q.M.	<b>14%</b> (34)	<b>47%</b> (108)	<b>26%</b> (60)	<b>11%</b> (25)	<b>2%</b> (5)
2. Film macht Lust auf mehr	<b>19%</b> (43)	<b>43%</b> (99)	<b>26%</b> (59)	<b>9%</b> (21)	<b>3%</b> (8)
3. Qualität der visuellen Effekte	<b>30%</b> (69)	<b>47%</b> (109)	<b>17%</b> (40)	<b>5%</b> (13)	<b>1%</b> (2)
4. Schauspielerische Qualität	<b>11%</b> (25)	<b>30%</b> (70)	<b>35%</b> (82)	<b>16%</b> (37)	<b>8%</b> (18)

Zum Spielfilm wurden unter anderem folgende Kommentare gemacht (die komplette Dokumentation aller Kommentare zum Spielfilm im Rahmen der zweiten Pilotstudie ist im elektronischen Anhang zur Arbeit zu finden):

‘Aufmachung ist sehr nah an den Interessen der Jugendlichen. Gute musikalische Begleitung. Tolle Effekte.’

‘Die Handlung müsste man nochmal überarbeiten. Das vorher Erklärte war sehr interessant, der Film etwas ... wie soll man sagen ... spröde. Doch die einzelnen Videos zu den einzelnen Phänomenen sind sehr gut.’

‘Ich war überrascht, dass es einen Film dazu gibt, um das Thema besser zu vermitteln. Ich konnte mir erst nichts darunter vorstellen. Interessant!, kreativ!’

‘Der Film ist extrem motivierend und macht Lust auf mehr. Ein ganz tolles Projekt. Ich werde mich mehr mit dem Thema befassen.’

‘Sehr schön und interessant gestalteter Film. Manchmal etwas zu verwirrend.’

Eine wesentliche Verbesserung, die nach dieser Umfrage realisiert wurde, war die Produktion einer Einführungssequenz zum Spielfilm, in der die *physikalische* Thematik im Klartext zu Sprache kommt. Damit ist eine stärkere Vernetzung mit dem erklärenden Teil gewährleistet, und die physikalische Bedeutung bzw. die Doppelfunktion von *Alice* und *Bob*, einerseits als Charaktere im Spielfilm, andererseits als Photon-Detektoren, wurde noch stärker betont.

Das Hauptproblem waren allerdings nach wie vor die erklärenden Sequenzen, also Punkt (4). Durch den Zwang einer kostengünstigen Alternative sind wir zu einer Lösung gekommen, die im Nachhinein sehr naheliegend erscheint: Dialoge und Charaktere lenken vom eigentlichen Sachthema ab. Kontextbezug ist weitaus weniger bedeutsam zu bewerten als das Ziel, bei Erklärungen die extrinsische kognitiver Belastung zu minimieren. Die Entwicklung von Charakteren und Dialogen kann zwar Spannung und Emotionen erzeugen, aber Erklärungen werden dadurch verwässert. Weiterhin ergibt sich bei Zeichentricksequenzen das Problem mangelnder Interaktivität. Die Inhalte werden in der vom Zeichentrickfilm vorgegebenen Geschwindigkeit präsentiert, und können nicht vom Nutzer zeitlich gesteuert werden. Intuition und vernetzende Bilderwelten sind nur *ein*

Baustein im Lernprozess. Der andere ergibt sich aus Abstraktion und Konzentration auf den physikalischen Inhalt. Dadurch ergibt sich eine Zweiteilung in den Spielfilm einerseits und den DVD-ROM Teil andererseits. Im erklärenden DVD-ROM Teil haben Dialoge zwischen fiktiven Charakteren und eine Rahmenhandlung keinen Platz mehr, siehe auch Abb. 1.4.

### 5.3 Resultate der dritten Pilotstudie (August 2010)

Die jetzt vorliegende Lösung für den DVD-ROM Teil mit horizontaler (vier Quadranten) und vertikaler Vernetzung (vom Spielfilm über den U-Bahnplan bis zur Text- und Animationssequenz, Abb. 3.8) von insgesamt mehreren hundert einzeln ansteuerbaren kurzen Text- und Animationssequenzen erfüllt viele lerntheoretische Voraussetzungen, wie im ersten Kapitel erläutert wurde. Im Kern sind dies das Multimedia-Prinzip, minimale Interaktivität, und Minimierung von extrinsischer kognitiver Belastung. Weiterhin entscheidend ist unsere Erweiterung von Feynmans Zeigerformalismus und die Strukturierung der Lerninhalte im Vier-Quadranten-Modell, Abb. 3.4. Im Gegensatz zur ersten Umfrage im April 2008 zu den Zeichentricksequenzen haben wir bei der online-Umfrage im August 2010 zu dem neuen Konzept deutlich mehr Rückmeldungen erhalten, die zudem überwiegend zustimmend waren. Hier einige Beispiele:

'Mir gefallen besonders die Animationen zu den Texten. Diese sind passend und es ist die Möglichkeit geboten gleichzeitig mitzulesen.'

'Die Inhalte werden anschaulich erklärt und man kommt mit. Zwar lerne ich persönlich lieber aus Büchern (...). Mich persönlich hat überrascht, wie einem Grafiken und Animationen sowie Objektbezüge durchaus beim Lernen helfen können.'

'Dass alles Schritt für Schritt sehr gut erklärt wird und es auch bildlich dargestellt wird gefällt mit gut. Somit kann man alles super verfolgen und was in der Regel nur schwer verständlich ist, wurde so näher beigebracht!'

'Langsam aufbauend und jeder einzelne Schritt ist leicht zu verstehen. Sofern man von Schritt zu Schritt geht und alles einzelne versteht, kommt es nicht zur Überforderung und Frustration. Außerdem leicht zu handhaben.'

'Anschauliche Darstellung, Kombination von Film/Animation und vorgelesenem Text'

'Die Grundlagen der Quantenmechanik werden hier anschaulich deutlich gemacht, ohne die Theorie zu vernachlässigen. Dort, wo viele Physikbücher mit offenen Fragen, Geschwafel und allgemeinen Aussagen aufhören, fängt dieser Lehrpfad erst an. Er gibt tiefere Einblicke nicht nur in die Quantenmechanik, sondern auch (logischer Weise) in die Wellentheorie von Licht. Alleine dafür würde sich der Kauf schon lohnen....'

# 6 Physikdidaktik und moderne Medien

## 6.1 Neue Medien im Spannungsfeld von Unterricht und Unterhaltung

Naturwissenschaftlicher Unterricht in der Schule in Kombination mit Lehrbüchern der Schulbuchverlage hat seine Monopolstellung bei der Wissensvermittlung schon lange verloren. Naturwissenschaftliche Themen werden in verschiedenen Medien und Formaten thematisiert, die wir in die Kategorien Kino, Internet, Fernsehen/Lehrfilme und Lernsoftware einteilen, siehe Abb. 6.1. Die Möglichkeiten, sich auf unterschiedlichem Niveau in verschiedenen Quellen zu informieren, sind größer denn je. Die Produktionen stehen im Spannungsfeld zwischen den Polen Unterricht und Unterhaltung. Nicht nur im öffentlich-rechtlichen Bereich, sondern auch private Fernsehsender produzieren verschiedene Magazine, die naturwissenschaftliche Themen aufgreifen. Für Lehrer stellt sich nicht selten das Problem, dass Schulexperimente von den Schülern bereits in einer weitaus spektakuläreren Aufmachung im Fernsehen gesehen wurden, wenn auch ohne tiefergehende Erklärungen. Animationen und applets zu allen Themen der Schulphysik sind auf Internetseiten wie z.B. [www.schulphysik.de](http://www.schulphysik.de) oder [www.leifiphysik.de](http://www.leifiphysik.de) abrufbar, die von Schülern und Lehrern sehr intensiv genutzt werden.

Allerdings funktioniert Lernen auch in der postmodernen Mediengesellschaft nach wie vor nur in kleinen, persönlichen Schritten. Wenn ein Schüler z.B. eine quadratische Gleichung nicht lösen kann, hilft es nichts, dass ein Computer das Problem Millionen mal schneller erledigt. Wissen ist nach wie vor individuell, und hängt von der persönlichen Vorerfahrung und dem Training ab. Denken, Lernen und Vergessen sind komplexe Vorgänge, die neuronal und hormonell gesteuert werden [127], und noch weit von einem grundlegenden Verständnis entfernt sind. Unterricht ist ein komplizierter Vorgang, bei dem es keine eindeutige Lösung geben kann, wie ein konkretes Thema optimal behandelt werden kann, und das ist gut so: Lernen ist so individuell wie jeder einzelne Mensch.

Trotzdem gibt es Fragen, die allgemein gestellt werden und auch beantwortet werden können. Ein wichtiger Aspekt von Lernen ist die Fähigkeit, Repräsentationen zu erzeugen, und zwischen Repräsentationsebenen zu wechseln [73]. Das Beispiel der Musik haben wir in Kapitel 2.2 behandelt. Als Klangbild erreicht Musik ein Millionenpublikum, als geschriebene Partitur nur ausgebildete Musiker. Mir stellt sich die Frage, welches 'Klangbild' der Physik eine geeignete Repräsentation ist, um ebenfalls ein breites Publikum zu erreichen. Die 'geschriebene Partitur' in Form von Theorie und Experiment erreicht nur ausgebildete Physiker, und wird in seiner Bedeutung durch die Übersetzung in eine zusätzliche Repräsentationsebene nicht vermindert. Wie in Abb. 6.2 exemplarisch

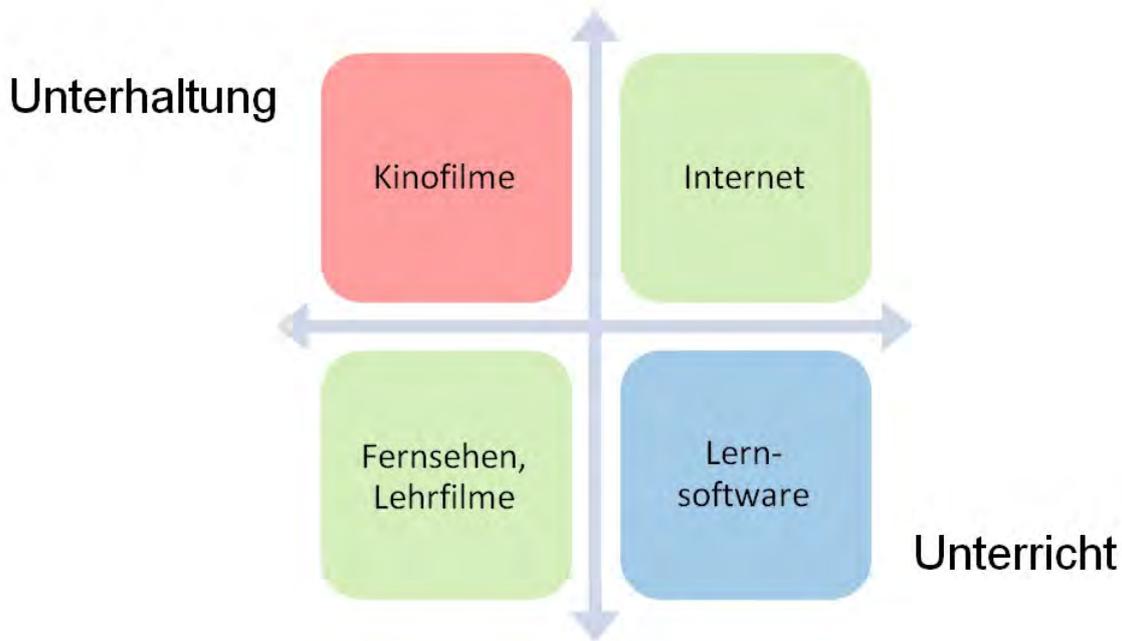


Abbildung 6.1: Das Medienangebot zur Physik im Spannungsfeld zwischen Unterhaltung und Unterricht: Kinofilme dienen primär der Unterhaltung; Lernsoftware primär dem Unterricht. Vor allem im Bereich Fernsehen und Internet gibt es viele Mischformen des Edutainments, die sich zwischen beiden Polen befinden.

gezeigt, erweitern wir das Spektrum von Repräsentationen um mathematisch fundierte Visualisierungen, und intuitive Bilder.

Der Ansatz, Physik durch Bilder zu elementarisieren und popularisieren, ist keinesfalls neu: Auf dem Gebiet der Dokumentarfilme gibt es eine Reihe von Produktionen, die sich um die Vermittlung von physikalischen Themen bemühen. So hat z.B. Brian Green im Jahre 2003 seinen Bestseller 'Das elegante Universum' verfilmt, und dabei das ganze Spektrum moderner Filmproduktion zum Einsatz gebracht [38]. Hauptschwerpunkt des Filmes ist die rasante Entwicklung der Stringtheorie. Der Schritt vom hochprofessionellen, modernen Infotainment zu einer tieferliegenden DVD-ROM ist hier aber noch nicht vollzogen. Die Bilder geben die historische Entwicklung der String-Theorie sehr gut wieder, helfen aber nur bedingt, den tatsächlichen Formalismus der Theorie zu verstehen. Ähnlich wie bei dem Thema Verschränkung wäre es auch hier möglich, grundlegende Ideen der Theorie mathematisch fundiert in Bilder zu übersetzen, mit denen auch *quantitativ* interessante Ideen der Stringtheorie erläutert werden könnten, wie z.B. das holographische Prinzip. Bekannte Visualisierungen zu diesem Thema sind allenfalls Illustrationen, aber keine genaue Übersetzungen. Hier ist noch viel Potential für weitere Arbeit.

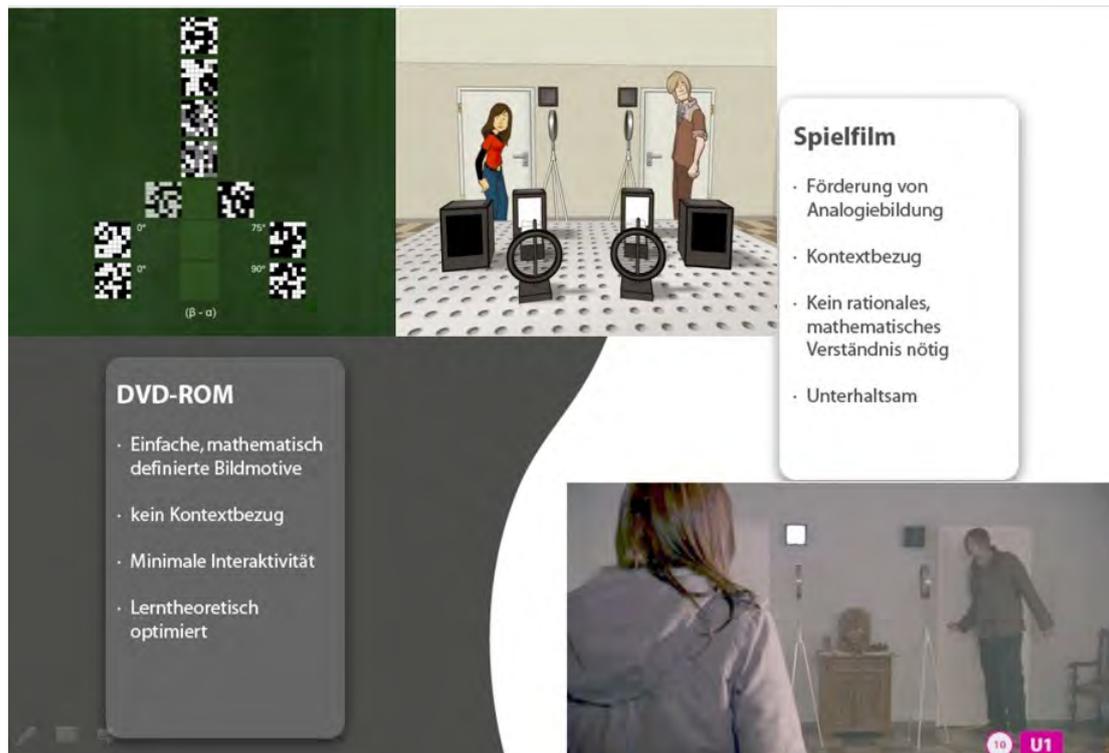


Abbildung 6.2: Die künstlerisch-kreative und streng mathematische Seite von Visualisierungen, die wir in unserem Ansatz kombinieren, am Beispiel der Thematik *Korrelation*. Links: Visualisierung der Korrelationsfunktion gemäß Gleichung (3.32). Rechts: Spielerische Umsetzung der Thematik mit korrelierten Türschlössern im Rahmen einer Spielfilmhandlung. Wesentlich ist die einheitliche Nutzung von Bildmotiven, in diesem Fall der Symbolik der Farben schwarz und weiß (definiert durch Abb. 3.4). Im Spielfilm wird rechts unten im Bild die zugehörige Lernstation eingeblendet, in diesem Fall U1-10.

Eine weitere Kategorie von Dokumentarfilmen beschreibt Leben und Werk bedeutender Wissenschaftler, wie z.B. der Filmklassiker 'Madame Curie' (1943) [25]. Von den vielen biographischen Filmen zeichnet sich dieser durch die gelungene Mischung aus persönlichem Schicksal und Bezug zum physikalischen Sachthema aus. Dadurch gelingt die Einbettung von Wissenschaft in Zeitgeschichte. Mit den jetzigen Techniken wäre es möglich, in einem ergänzenden interaktiven DVD-ROM Teil Visualisierungen von Theorie und Experiment zu erarbeiten, in diesem Beispiel zur Kernphysik. Zum Thema Atomphysik haben wir in Kapitel 4 erläutert, welche Visualisierungen einen gangbaren Weg weg vom Bohr'schen Atommodell hin zu dem vom Schrödinger vorgegebenen Zugang über Operatoren und Zustände ebnet könnten, siehe Abb. 4.6 und Abb. 4.7. Die Frage nach der Stabilität von Atomkernen könnte ebenfalls im Sinne einer Übersetzungsarbeit in mathematischen Visualisierungen schulgerecht dargestellt werden.

## 6.2 Mathematische Visualisierungen im Kontext

Bei guten Visualisierungen besteht die Herausforderung darin, genaue Übersetzungen von Theorie und Experiment zu finden, die sich auch für quantitative Analysen eignen. Dieser Ansatz ist anspruchsvoll, weil es keine allgemein gültige Lösung geben kann: Für jedes Thema muss von Neuem erkannt werden, welche Visualisierungen für die Schule am Besten geeignet sind.

Die Grenzen zwischen Medien werden sich in naher Zukunft immer weniger scharf ziehen lassen. Das eBook wird früher oder später auch in der Schule Einzug halten, und neben dem Buch eine ergänzende Rolle spielen<sup>1</sup>. Die Einbindung von Animationen in Lehrtexten wird dann kein technisches Problem mehr darstellen. Der Bedarf an guten Visualisierungen wird daher weiter steigen. Eine große Vielzahl von Lernmedien für alle Altersstufen sind bereits entwickelt worden bzw. werden entwickelt (z.B. [74], [37]). Anbindung an die Fachdidaktik ist dabei eher die Ausnahme als die Regel. De facto ist die 'praxeologisch orientierte, nicht theoriegeleitete Anwendungsforschung [72], hier also die Entwickler von Lernsoftware, weitgehend entkoppelt von der universitären Grundlagenforschung<sup>2</sup>. Hier sehe ich es als Aufgabe der Fachdidaktik, stärker und offensiv Position zu beziehen. Eine wesentlich Grundlage dafür ist eine Steigerung der Medienkompetenz in der Fachdidaktik selber, was unter anderem die Fähigkeit und praktische Kenntnis bei der Entwicklung von Lernsoftware und Multimedia-Produktionen mit einbezieht. Weiterhin wäre eine intensivere Kooperation mit Design- und Filmhochschulen erstrebenswert. Zum einen können so lerntheoretische Erkenntnisse in einem breiteren Umfeld Früchte tragen, zum anderen ist im Rahmen der weniger stark kommerziell in Zugzwang stehenden Hochschulen die Möglichkeit gegeben, Lernsoftware zu entwickeln, die inhaltlich auf hohem Niveau steht und z.B. speziell für den Bereich der Physik-Oberstufe konzipiert ist, wo also die Auflagenzahlen gering sein dürfen. Dieses Marktsegment würde sonst kaum Beachtung finden. Wenn die Fachdidaktik nicht aktiv wird, könnte die paradoxe Situation entstehen, dass in naher Zukunft für den Bereich der Grundschule bis zur Sekundarstufe I ein breites Spektrum von interaktiven, kommerziell ausgerichteten Lernumgebungen zur Verfügung steht, für den Bereich Oberstufe und Hochschule aber so gut wie keine innovativen Projekte realisiert sind.

In Wissenschaftsmagazinen wird bereits seit langem die Kombination von Kontextbezug bzw. szenischen Inszenierungen mit Sachbezug in verschiedenen Formaten umgesetzt. Auch im Bereich von Wissenschaftsshows werden Konzepte entwickelt, die über reines Infotainment hinausgehen. Unser Ansatz der Kombination von Kontextbezug und Sachbezug durch Spielfilm und DVD-ROM, die beide dieselbe Bildsymbolik nutzen (Abb. 1.4), kann in diesem Sinne variiert werden. Anstelle der Kombination eines Spielfilms mit einer DVD-ROM kann auch eine Physikshow, ein Musical oder eine andere szenische Darbietung anstelle des Spielfilms gesetzt werden. Der sachbezogene Teil als DVD-ROM würde dann auf diese Produktion abgestimmt werden. Im Bereich Kino ist zwar die Weiterverwertung von erfolgreichen Produktionen z.B. in Form von Computerspielen

---

<sup>1</sup>Zur Zeit sind weniger die technischen Probleme der Umsetzung, sondern vor allem rechtliche Hürden eine Ursache dafür, dass eBooks noch nicht in Schulen eingeführt worden sind.

<sup>2</sup>Siehe auch Abschnitt 1.1

üblich geworden, so dass von dieser Seite die aktivste Rolle bei der Vernetzung von Medien betrieben wird. Allerdings hat es noch kein wissenschaftliches Thema geschafft, die Hauptrolle im Drehbuch einer Kinohandlung zu bekommen.

Die Universität, und hier insbesondere die Fachdidaktik, steht vor der Herausforderung, einen aktiven Beitrag im Bereich der Erforschung des Potentials Neuer Medien für die Ausbildung an Schulen und auch der Universität zu leisten. In der Forschungsarbeit der Universität steht der wirtschaftliche Nutzen nicht unmittelbar im Fokus. Hier ergibt sich die Chance, eine Vermittlerrolle zwischen Lerntheorie einerseits, und der Praxis andererseits einzunehmen, wie schon im einleitenden Abschnitt 1.1 formuliert. Erst durch die tatsächliche Umsetzung von Erkenntnissen der Lehr- Lernforschung durch Projekte, die nicht nur wenige hundert, sondern weit größere Gruppen von Schülern erreichen, kann der Zyklus von Evaluation und Realisation auch tatsächlich spürbaren Einfluss auf den Schulunterricht haben. Speziell für das Fach Physik sehe ich in mathematisch fundierten Visualisierungen als Repräsentationsform für die Physik in Theorie und Experiment ein großes Potential, wenn diese in Bezug zu einem für die Schüler relevanten Kontext stehen.

# 7 Mathematischer Anhang

In diesem mathematischen Anhang werden einige der im Haupttext vorgestellten elementaren Herleitungen und Visualisierungen vertieft und verallgemeinert. Hierbei werden mathematische Methoden verwendet, die nicht für die Schule geeignet sind, allerdings können viele der Resultate in Form von Visualisierungen zugänglich gemacht werden. Es wird sozusagen die 'Partitur' beschrieben, die als Grundlage für die Interpretation in Bildern und elementarisierten Herleitungen dient, wie in Abb. 2.4 illustriert.

## 7.1 Quantentheorie von Licht

In Kapitel 3 wird in einer stark vereinfachten Form eine Motivation für die Born'sche Interpretation der quantenmechanischen Wellenfunktion gegeben. Die Argumentation nutzt zwei verschiedene Formeln zur Berechnung der Lichtintensität, siehe Gleichung (3.14),

$$I_1 \propto N p_1 \propto |E_1|^2 \quad (7.1)$$

Das makroskopische elektromagnetische Feld steht also mit dem stochastischen Verhalten des einzelnen Photons über

$$E_1 \propto \sqrt{N}(\sqrt{p_1}e^{i\phi}) \quad (7.2)$$

in Verbindung. Durch diese Kombination von Wellen- und Teilchenbild kann die komplexe Erweiterung von Wahrscheinlichkeiten  $p_1 \rightarrow \sqrt{p_1}e^{i\phi_1}$  plausibel gemacht werden, wie in der Lernstation U1-6 der DVD *Quantendimensionen* gezeigt. Zentrale Eigenschaften der Quantenphysik wie Verschränkung und Nichtlokalität lassen sich direkt aus dieser komplexen Verallgemeinerung von Amplituden durch eine Dimensionsanalyse herleiten, siehe Gleichung (3.27). In Hinblick auf die Bedeutung des Ergebnisses scheint die gezeigte didaktische Vereinfachung gerechtfertigt. Hier zeigen wir eine genauere Analyse, die in leichten Variationen in Lehrbüchern zur Quantenoptik ebenfalls zu finden ist. Wir versuchen aber aus dem Blickwinkel der Schulphysik zu argumentieren. Die Wahl der Beispiele folgt also in Anlehnung an bereits etablierte Schulversuche. Wir nutzen in unserer Argumentation folgende theoretische Konzepte:

- a.) Elektromagnetische Felder gemäß der Maxwell-Theorie.
- b.) Klassische, elektromagnetische Wellen in Analogie zur harmonischen Feder-schwingung.

- c.) Quantentheorie des harmonischen Oszillators.
- d.) Konstruktion eines Quantenzustandes, der soweit wie möglich analog zum klassischen Oszillator ist.
- e.) Klassische und Quantentheorie elektromagnetischer Wellen in Analogie zum klassischen und quantisierten harmonischen Oszillator.
- f.) Der polarisierende Strahlteilerwürfel.
- g.) Verschränkte Photonen.

Von diesem Programm sind Punkt a.) und b.) bereits in elementarisierter Form fester Bestandteil des Curriculums der Sek. II. Die Erweiterung um c.) bis g.) ergibt zusätzlich zu den Interferenzphänomenen von Licht noch Einblick in das stochastische Verhalten einzelner Photonen und in quantenmechanische Korrelationen bei verschränkten Photonen, wie in Lernstation U1-11 gezeigt [46]. Hier wenden wir uns dem 'theoretischen Unterbau' unseres elementarisierten Zugangs zu.

### a.) Elektromagnetische Felder gemäß der Maxwell-Theorie

Das klassische elektrische und magnetische Feld wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} &= \rho & (7.3) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\
 \vec{\nabla} \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}
 \end{aligned}$$

Eine Testladung  $Q$  koppelt an die Felder über die Kraft  $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ . Für die Vakuumlichtgeschwindigkeit gilt  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ . Das elektrische und magnetische Feld lässt sich mit dem sogenannten Vektorpotential in Verbindung bringen, das wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} & (7.4) \\
 \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.
 \end{aligned}$$

Hier ist  $V$  die potentielle Energie einer Ladung im Coulomb-Feld, und  $\vec{A}$  das magnetische Potential. Diese Beschreibung ist nicht eindeutig: Es ist möglich, aus unendlich viele verschiedene Varianten des Vektorpotentials eine bestimmte (eine 'Eichung') auszuwählen. Durch die 'Umeichung'  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$  ändert sich das Magnetfeld  $\vec{B}$  nicht wegen

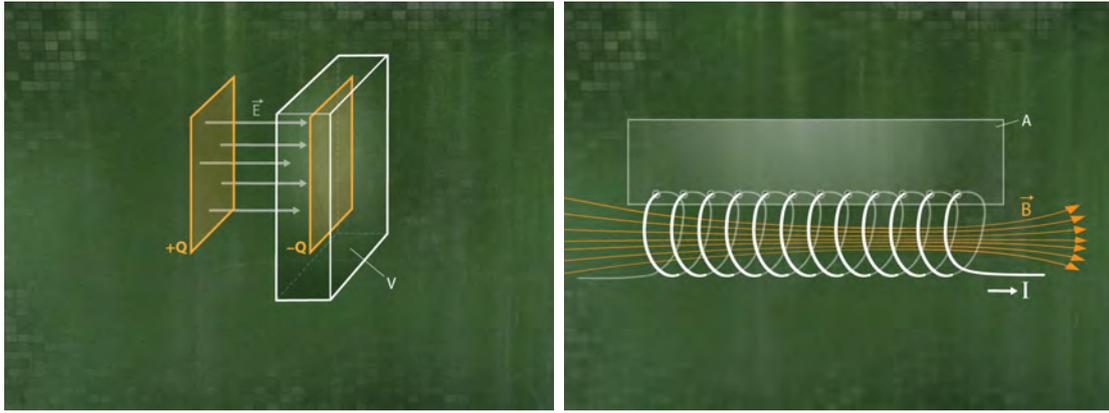


Abbildung 7.1: Links: Zwischen zwei Kondensatorplatten bildet sich ein elektrisches Feld, das durch Integration der Ladungsdichte  $\rho$  über das Volumen  $V$  berechnet werden kann. Rechts: Im Inneren einer stromdurchflossenen Spule bildet sich ein Magnetfeld, das durch Integration des Stroms über die Fläche  $A$  berechnet werden kann.

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda = 0$ . Eine analoge Argumentation kann auch für das elektrische Feld durchgeführt werden, das elektrische Potential ist bis auf eine willkürlich wählbare Konstante definiert. In dieser Beschreibung des Elektromagnetismus aus dem 19. Jahrhundert sind schon viele Weiterentwicklungen der Physik des 20. Jahrhunderts antizipiert: Zum einen ist die Theorie bereits relativistisch invariant. Zum anderen ist die Möglichkeit der Umweichung der Felder bereits der Hinweis auf die Grundeigenschaft der Quantenmechanik, dass die eindeutige Beziehung zwischen beobachtbaren Größen und der mathematischen Beschreibung aufgebrochen wird. In der Tat findet man durch die 'Umweichung' zur sogenannten 'minimalen Kopplung', die die Wechselwirkung von Licht mit Materie beschreibt, wie in Abschnitt 7.6 genauer erläutert.

Wir wollen die Energie des elektrischen und magnetischen Feldes anhand von zwei einfachen Experimenten bestimmen: Dem Entladen eines Kondensators und dem Verhalten einer stromdurchflossenen Spule, wenn die äußere Spannung abgeschaltet wird. Ein Kondensator der Kapazität  $C = Q/U$  sei mit der Ladung  $Q_0$  geladen, wodurch sich die Spannung  $U_0$  zwischen den Platten ergibt. Vor dem Entladen war die Energie im elektrischen Feld  $E_0$  zwischen den Platten gespeichert, die durch die erste Maxwell'sche Gleichung mit der Ladung des Kondensators in Verbindung gebracht werden kann wie

$$\epsilon_0 E_0 A = Q_0. \quad (7.5)$$

Mit  $U_0 = E_0 d$  ergibt sich  $U_0 = Q_0 \frac{d}{\epsilon_0 A}$  und  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ , wobei  $d$  der Abstand zwischen den Kondensatorplatten ist. Nach dem Entladen gemäß  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$  ist die Feldenergie zu Joule'scher Wärme am Widerstand  $R$  übergegangen. Für die ursprüngliche elektrische Feldenergie ergibt sich

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 V. \quad (7.6)$$

Nun betrachten wir das magnetische Feld einer Spule. Die Induktivität  $L$  der Spule kann mit der Maxwell'schen Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  durch Ringintegration berechnet werden, siehe Abb. 7.1. Es gilt

$$\int \int \vec{\nabla} \times \vec{B} dA = \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 NI \quad (7.7)$$

wobei die Ringintegration um den Rand der Fläche  $A$  läuft. Für eine große Fläche  $A$  ergibt sich nur im Inneren der Spule mit Länge  $l$  ein nichtverschwindender Beitrag von Magnetfeld  $B$ , so dass gilt

$$B_0 l = \mu_0 NI_0. \quad (7.8)$$

Bei Auf- bzw. Abbau des magnetischen Feldes wird gemäß der Lenz'schen Regel eine Spannung induziert, die der Induktionsursache entgegenwirkt. Es gilt

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int B dA = -\frac{\partial}{\partial t} NA \left[ \mu_0 \frac{N}{l} I \right] \equiv -L \frac{dI}{dt}.$$

Die so definierte Induktivität  $L$  der Spule kann also aus der Anzahl der Windungen  $N$  und der Geometrie der Spule berechnet werden zu  $L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$ . Für die Energie, die im Magnetfeld  $B_0$  einer Spule steckt, die vom Strom  $I_0$  durchflossen wird, gilt also

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 V. \quad (7.9)$$

Im elektromagnetischen Schwingkreis oszillieren elektrische und magnetische Energie hin- und her. Diese Oszillation wird durch die Differentialgleichung

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (7.10)$$

beschrieben. Die Feldenergie oszilliert zwischen der elektrischen Energie im Kondensator und der in der Spule gespeicherten magnetischen Energie. Die Gesamtenergie lautet

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{mag}} + E_{\text{el}} + W = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 dV + \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \vec{E}^2 dV + W \quad (7.11)$$

Hierbei beschreibt  $W$  die Wärme, die durch den Ohmschen Widerstand entsteht und die die Oszillation im Schwingkreis dämpft.

## b.) Klassische, elektromagnetische Wellen in Analogie zur harmonischen Federschwingung

Die Zeitabhängigkeit der Ladung  $Q(t)$  im Schwingkreis entspricht der Zeitabhängigkeit  $x(t)$  eines gedämpften harmonischen Oszillators, wie zum Beispiel einer klassischen Federschwingung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Dx + \kappa \frac{dx}{dt} = 0. \quad (7.12)$$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus

$$E_{ges.} = E_{kin} + E_{pot} + W = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + W \quad (7.13)$$

wobei  $W$  die Wärmeenergie aus der mechanischen Reibung ist und  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$  die Resonanzfrequenz des Oszillators. Die Oszillation zwischen potentieller  $E_{pot}$  und kinetischer Energie  $E_{kin}$  entspricht im Falle des Schwingkreises der Oszillation zwischen der Energie  $E_{el}$  und  $E_{mag}$ , die im elektrischen bzw. magnetischen Feld gespeichert ist. Im Phasenraum überstreicht der Massepunkt eine Spirale, die durch

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_\kappa t) e^{-\frac{\kappa}{2m}t} \\ p(t) &= Am \frac{\partial}{\partial t} x(t) \end{aligned} \quad (7.14)$$

beschrieben wird, wobei  $\omega_\kappa = \sqrt{\omega^2 - (\frac{\kappa}{2m})^2}$  die durch die Dämpfung 'verstimmte' Eigenfrequenz des Oszillators und  $A$  die Ausgangsamplitude darstellt. Diese klassische Analogie zwischen oszillierender elektrischer und magnetischer Feldenergie und einem klassischen Oszillator besteht auch in der Quantenphysik weiter. Diese Erkenntnis führt von der klassischen Maxwell-Theorie zur Quantentheorie von Licht.

## c.) Quantentheorie des harmonischen Oszillators

Betrachten wir zunächst die Quantisierung des eindimensionalen, harmonischen Oszillators. Wir vernachlässigen die Dämpfung bzw. Kopplung an ein Wärmebad ( $\kappa \rightarrow 0$ ), um die Rechnung zu vereinfachen. Anstelle eines Punktteilchens, das im Phasenraum die Ellipse  $x(t) = A \cos(\omega t)$ ,  $p(t) = -Am\omega \sin(\omega t)$  überstreicht, ergibt sich in der Quantenphysik ein neues Bild: Das von Operatoren und Zuständen. Aus der klassischen Energie wird der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right) + m\omega^2 \mathbf{x}^2 \quad (7.15)$$

der auf den Zustand  $|\psi\rangle$  wirkt. Die Amplitude  $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$  am Ort  $x$  wird als komplexe Verallgemeinerung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte interpretiert. Durch die Quantisierungsbedingung

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar \quad (7.16)$$

ergibt sich ein diskretes Spektrum von Eigenwerten gemäß

$$\mathbf{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle. \quad (7.17)$$

Die Grundzustandsenergie kann ähnlich wie in (4.40) durch die Annahme, dass in diesem Fall die Unschärfe  $\Delta x \Delta \simeq \hbar$  minimal wird, aus (7.15) abgeschätzt werden.

$$\frac{d\langle E \rangle}{d\Delta x} = -\frac{\hbar^2}{(\Delta x)^3 m} + m\omega^2(\Delta x) = 0. \quad (7.18)$$

Für die minimalen Unsicherheiten ergibt sich also

$$\Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \Delta p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}. \quad (7.19)$$

Durch diese von der Masse und Frequenz des Oszillators gegebenen Größenordnungen kann der quantenmechanische Oszillator nun beschrieben werden. Der Hamiltonoperator ergibt in den dimensionslosen Orts- und Impulskoordinaten  $\frac{\mathbf{x}}{x_0}, \frac{\mathbf{p}}{p_0}$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left[\left(\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{x}}{x_0}\right)^2\right]. \quad (7.20)$$

Die Nullpunktsenergie kann durch  $\Delta x_0, \Delta p_0$  abgeschätzt werden als  $E_0 \simeq \hbar\omega$ . Der Grundzustand  $|\psi_0\rangle \equiv |0\rangle$  beschreibt also eine Oszillation mit nichtverschwindender Energie. Der zugehörige 'Zustand' ist eine über den Raum verteilte Schwingung, die durch die Gaußverteilung

$$\psi_0(x, t) \propto \exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2}\right] \exp[-i\omega t] \quad (7.21)$$

beschrieben wird. Das Spektrum und die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators lassen sich nach Einführen der Leiteroperatoren

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\mathbf{x}}{x_0} + i\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right], \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\mathbf{x}}{x_0} - i\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right], \quad (7.22)$$

berechnen [107]. Der Kommutator  $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar$  übersetzt sich wegen  $p_0 x_0 = \hbar$  zu

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1 \quad (7.23)$$

Der Hamiltonoperator ist in dieser Darstellung

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}) = \hbar\omega(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}). \quad (7.24)$$

Der Grundzustand erfüllt die Eigenschaft  $\mathbf{a}|0\rangle = 0$ . Durch Anwenden des Operators  $\mathbf{a}^\dagger$  auf den Grundzustand erhöht sich die Energie um  $\hbar\omega$ , denn es gilt

$$\mathbf{H}\mathbf{a}^\dagger|0\rangle = \hbar\omega(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2})\mathbf{a}^\dagger|0\rangle = \hbar\omega(1 + \frac{1}{2})\mathbf{a}^\dagger|0\rangle. \quad (7.25)$$

Der Zustand mit Energie  $n\hbar\omega$  ergibt sich durch n-faches Anwenden des Aufsteigeoperators,  $|\psi_n\rangle \propto (\mathbf{a}^\dagger)^n|0\rangle$ . Ist das Vakuum normiert gemäß  $\langle 0|0\rangle = 1$ , gilt

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\mathbf{a}^\dagger)^n|0\rangle, \quad \mathbf{H}|\psi_n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\mathbf{a}^\dagger|\psi_n\rangle. \quad (7.26)$$

Die Sichtweise von Operatoren und Zuständen hat zunächst nichts mit der klassischen Beschreibung von Punktteilchen zu tun. Zustände sind über den Raum delokalisierte Amplituden, von denen je nach angewendetem Operator beobachtbare Eigenschaften ausgelesen werden können. Operatoren, die nicht kommutieren, können nicht zeitgleich exakt gemessen werden.

## d.) Kohärente Zustände

Wir können uns die Frage stellen, welcher quantenmechanische Zustand  $|\alpha\rangle$  der klassischen Beschreibung der Oszillation im Phasenraum am nächsten kommt. Diese Frage können wir sowohl für die klassische Federschwingung als auch für den elektromagnetischen Schwingkreis stellen, und in Verallgemeinerung des Schwingkreises auch auf elektromagnetische Wellen, die z.B. von einer Antenne abgestrahlt werden. Die Antwort auf diese Frage wurde erstmals von Schrödinger gegeben [107], der zu diesem Zweck die sogenannten kohärenten Zustände eingeführt hat. Beginnen wir mit der klassischen, ungedämpften Federschwingung und fragen uns, wie diese mit dem Quanten-Oszillator in Beziehung steht. Die klassischen Variablen Ort  $x$  und Impuls  $p$  werden in der Quantenphysik zu Operatoren, deren Erwartungswerte

$$\bar{x} = \langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle, \quad \bar{p} = \langle\psi|\mathbf{p}|\psi\rangle \quad (7.27)$$

an die Stelle von eindeutigen Zuschreibungen von Ort und Impuls treten. Aufgrund des stochastischen Verhaltens treten bei Messungen Schwankungen auf, deren Breite jeweils durch

$$\sigma_x^2 = \langle\psi|(\mathbf{x} - \bar{x})^2|\psi\rangle, \quad \sigma_p^2 = \langle\psi|(\mathbf{p} - \bar{p})^2|\psi\rangle \quad (7.28)$$

definiert ist. Der gesuchte Zustand wird durch kleinstmögliche Schwankungen  $\sigma_x, \sigma_p$  beschrieben und (bei passenden Randbedingungen) durch die 'klassische' Bewegung des Erwartungswertes

$$\bar{x} = A \cos(\omega t), \quad \bar{p} = -Am\omega \sin(\omega t) \quad (7.29)$$

von Ort und Impuls. Der so charakterisierte Zustand ergibt sich aus der Überlagerung unendlich vieler Oszillatoren, die jeweils in einem Vielfachen der Grundfrequenz schwingen,

$$|\alpha\rangle := e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \mathbf{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle. \quad (7.30)$$

Hier ist  $\alpha$  eine komplexe Zahl, die mit der Amplitude der klassischen Schwingung in Verbindung steht. Die zeitliche Abhängigkeit des Zustands ergibt sich aus der Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= \exp[-i\mathbf{H}t/\hbar] |\alpha(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{it}{\hbar}[\hbar\omega(1/2+n)]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\omega t} \alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle = e^{\frac{i}{2}\omega t} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Die Erwartungswerte von Ort und Impuls sind wegen  $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$  gegeben durch

$$\bar{x} = \langle \alpha | \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)) = \sqrt{2} x_0 |\alpha| \cos(\omega t - \delta) \quad (7.32)$$

und

$$\bar{p} = \langle \alpha | \frac{p_0}{i\sqrt{2}} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}i} (\alpha(t) - \alpha^*(t)) = -\sqrt{2} p_0 |\alpha| \sin(\omega t - \delta) \quad (7.33)$$

Dies entspricht (bei passender Anfangsbedingung für die Phase  $\delta$ ) der klassischen Bewegung. Wir erhalten durch Vergleich mit Gleichung (7.29) die Identifikation  $\sqrt{2}x_0|\alpha| \simeq A$  zwischen der Quantenamplitude und der klassischen Amplitude. Der Erwartungswert der Energie im kohärenten Zustand ist

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle \alpha | \mathbf{H} | \alpha \rangle \\ &= \hbar\omega \left( |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \left( \frac{A}{\sqrt{2}x_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 + \frac{1}{2} \hbar\omega. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Die Nullpunktschwingung hat keine Analogie zur klassischen Energie  $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$  (7.13) einer harmonischen Federschwingung mit Amplitude  $A$ . Dies liegt daran, dass es in der Quantenphysik keine absolute Ruhe geben kann, was in der klassischen Beschreibung aber vernachlässigt wird. Die Amplitude  $A$  kann als Überlagerung von vielen Quantenschwingungen betrachtet werden. Wieviele solche einzelne Quanten müssen im Mittel überlagert werden? Der Erwartungswert vom Anzahloperator  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  im kohärenten Zustand ergibt  $\langle \alpha | \mathbf{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \simeq A^2 / (2x_0^2)$ . Dieser Ausdruck beschreibt die Anzahl von Quanten als Quadrat des Verhältnisses  $A/x_0$  der charakteristischen Länge  $x_0$  der minimalen Oszillation (7.19) und der Amplitude  $A$ . Beträgt die Amplitude z.B. den zehnfachen Wert von  $x_0$ ,  $A \simeq 10x_0$ , müssen etwa  $100/2$  Quanten im kohärenten Zustand überlagert werden. Für eine makroskopische Federschwingung geht die Zahl von Quanten ins Unermessliche, z.B. ergibt sich bei der Masse  $m = 1\text{kg}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 10\text{rad/s}$  für die Amplitude  $A = 0.1\text{m}$  die Anzahl  $n = m\omega A^2 / (2\hbar) \simeq 10^{32}$  von Quanten, aus denen die Superposition kohärent zusammengesetzt ist, was für den Fall einer Federschwingung allerdings eine zu vereinfachte Vorstellung wäre, da diese mikroskopisch nicht aus Freiheitsgraden besteht, die durch einen einzelnen harmonischen Oszillator beschrieben werden könnte. Hier ist eine solche Rechnung also nur eine grobe Analogie, während sich für die Quantentheorie von Licht eine gute Beschreibung der makroskopischen Schwingung durch die kohärente Superposition von Photonen ergibt, wie wir im folgenden Abschnitt zeigen.

## e.) Klassische und Quantentheorie elektromagnetischer Wellen

Wir betrachten nun eine stehende elektromagnetische Welle in einer Kavität der Länge  $L$ , siehe Abb. 7.2. Zunächst beschreiben wir das Feld gemäß der Maxwell-Theorie, und führen anschliessend die Quantisierung durch. Das elektrische Feld kann klassisch als stehende Welle zwischen den Wänden der Kavität beschrieben werden. Es gilt  $k_n L = n\pi$  für die  $n$ -te Mode. Die zeitliche Oszillation der stehenden Welle wird beschrieben durch

$$E_z^n(y, t) = E_0 \sin(k_n y) \cos(\omega_n t + \phi) = \text{Re}[E_0 \sin(k_n y) e^{-i(\omega_n t + \phi)}] \quad (7.35)$$

Am Ort  $y$  kann das elektrische Feld gemäß dem Zeigerformalismus von Feynman durch ein drehendes Rad mit Radius  $E_0 \sin(k_n y)$  und Umdrehungsfrequenz  $\omega$  visualisiert werden. Das magnetische Feld erfüllt die Maxwell-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z(y, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_x(y, t) \quad (7.36)$$

also

$$B_x(y, t) = -\frac{k}{\omega} E_0 \cos(ky) \sin(\omega t + \phi) = \text{Im}[B_0 \cos(ky) e^{-i(\omega t + \phi)}] \quad (7.37)$$

Es gilt  $B_0 = E_0/c$ . Die elektrische Energie jeder Mode ergibt wegen (7.6)

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} A \epsilon_0 \int_0^L E_0^2 \sin^2(ky) \cos^2(\omega t + \phi) dy = \frac{1}{4} \epsilon_0 V E_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (7.38)$$

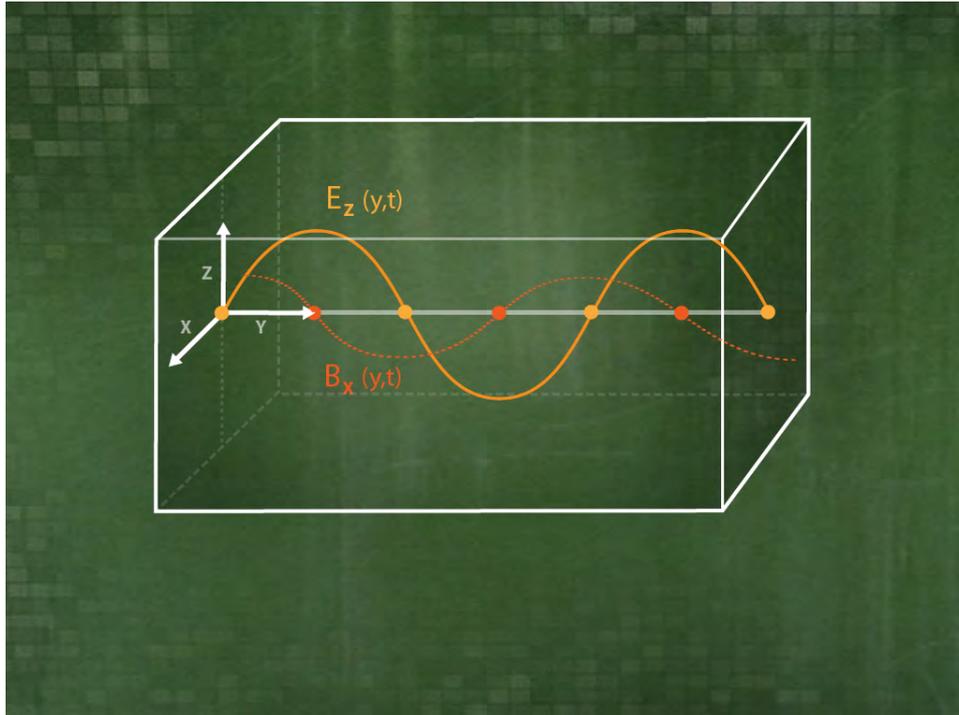


Abbildung 7.2: Eine stehende elektromagnetische Welle in einer Kavität hat Knotenpunkte des elektrischen Feldes an beiden Rändern.

Hier bezeichnet  $A$  die Fläche und  $AL = V$  das Volumen der Kavität. Das Ergebnis ist unabhängig von der Anzahl von Knotenpunkten der stehenden Welle. Für die magnetische Energie ergibt sich nach (7.9)

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \int_0^L B_0^2 \cos^2(k_n y) \sin^2(\omega t + \phi) A dy = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} V B_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (7.39)$$

Die Energie oszilliert zwischen der elektrischen und magnetischen Feldstärke. Die Gesamtenergie (ohne Dissipation) ist

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_{\text{mag}} + E_{\text{el}} & (7.40) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} V B_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{4} \epsilon_0 V E_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_0 V E_0^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$  und  $B_0 = E_0/c$  genutzt. Licht besteht aus einzelnen, abzählbaren Energieportionen der Energie  $\hbar\omega$ . In diesem klassischen Ausdruck für die Energie einer elektromagnetischen stehenden Welle kommt dies nicht zum Ausdruck.

Ähnlich wie beim klassischen Oszillator haben wir es mit einer Näherung zu tun, die sich aus der kohärenten Überlagerung vieler einzelner Photonen ergibt. Orts- und Impulskoordinate des harmonischen Oszillators entsprechen dem elektrischen und magnetischen Feld. Zur Quantisierung reicht es also aus, diese Analogie zu nutzen. Betrachten wir den Hamiltonoperator (7.20). Wir führen eine Skalierung durch

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} V B_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} \epsilon_0 V E_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \right] \\ &\equiv \hbar\omega [X_1^2 + X_2^2] \end{aligned} \quad (7.41)$$

und führen die dimensionslosen Felder<sup>1</sup>

$$X_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}} E_0 \cos(-\omega t - \phi), \quad X_2 = \sqrt{\frac{V}{4\hbar\mu_0\omega}} B_0 \sin(-\omega t - \phi) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{4\hbar\omega}} E_0 \sin(-\omega t + \phi)$$

ein. Die Quantisierung analog zu (7.24) ergibt

$$E_{\text{ges}} = \hbar\omega [X_1^2 + X_2^2] \rightarrow \frac{1}{2} \hbar\omega (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger) \quad (7.42)$$

und führt von der klassischen elektromagnetischen Welle zu den Feldoperatoren  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  bzw.  $\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger$ . Vergleichen wir die Koordinaten mit (7.20)  $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \hbar\omega [(\frac{\mathbf{p}}{p_0})^2 + (\frac{\mathbf{x}}{x_0})^2]$ , ergibt sich die Identifikation  $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{x}}{x_0} \simeq \mathbf{X}_1$  des dimensionslosen 'Ortsoperators' (elektrisches Feld) und  $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{p}}{p_0} \simeq \mathbf{X}_2$  vom Impulsoperator (magnetisches Feld). Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger), & \mathbf{X}_2 &= \frac{1}{2i} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger), \\ \mathbf{a} &= \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2, & \mathbf{a}^\dagger &= \mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2 \end{aligned} \quad (7.43)$$

und

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = 1, \quad [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \frac{i}{2}. \quad (7.44)$$

Wir interpretieren  $\mathbf{a}^\dagger|0\rangle$  als einen Zustand mit genau einem Photon der Frequenz  $f = \omega/(2\pi)$  in der Kavität. Die Frequenzabhängigkeit schreiben wir nicht explizit aus. Der Zustand mit genau  $n$  Photonen wird durch

$$|n\rangle = \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (7.45)$$

beschrieben. Dieser Zustand ist Eigenzustand des Anzahloperators  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ , es gilt

<sup>1</sup>Das Minuszeichen in der Zeitabhängigkeit ist analog zum harmonischen Oszillator gewählt.

$$\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (7.46)$$

Durch die Quantisierung des Strahlungsfeldes werden Welle- und Teilchenaspekt kombiniert. Hierbei ist entscheidend, dass der *Zustand* des Feldes zunächst vollkommen unabhängig von der Messung bzw. Wechselwirkung ist. Je nach Observable und entsprechendem Operator werden bestimmte Eigenschaften des Zustands abgefragt. Nicht-kommutierende Operatoren können nicht gleichzeitig abgefragt werden: Durch die Messung der Teilchenanzahl  $n$  geht z.B. die Phaseninformation verloren.

Analog zur Argumentation zur Konstruktion des kohärenten Zustandes  $|\alpha\rangle$  (7.30), der die beste Näherung für den klassischen Oszillator (7.29) darstellt, können wir ein klassisches, oszillierendes elektromagnetisches Feldes als Erwartungswert der dimensionslosen Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\mathbf{X}_1|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^+) = +|\alpha| \cos(\omega t + \phi), \\ \langle\alpha|\mathbf{X}_2|\alpha\rangle &= \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^+) = -|\alpha| \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (7.47)$$

beschreiben. Wegen  $\langle\alpha|\mathbf{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \equiv \bar{n}$ , (7.42) und (7.42) können wir nun die Feldenergie auf zwei verschiedene Weisen berechnen: Zum einen als  $E_{\text{ges}} = \hbar\omega[X_1^2 + X_2^2] \simeq \hbar\omega|\alpha|^2$  (Nullpunktenergie wird hier vernachlässigt), zum anderen als  $E_{\text{ges}} = \frac{1}{4}\epsilon_0 V E_0^2$ . Somit besteht zwischen der klassischen elektrischen Amplitude  $E_0$  und dem Erwartungswert  $\bar{n}$  für die Teilchenzahl der Photonen, die dieses klassische Feld durch kohärente Überlagerung aufbauen, der Zusammenhang

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \sqrt{\bar{n}}. \quad (7.48)$$

Diese wichtige Gleichung kann wie folgt interpretiert werden. Ein makroskopisches, oszillierendes elektrisches Feld der Amplitude  $E_0$  im Volumen  $V$  kann als Überlagerung von im Mittel  $\bar{n}$  Photonen aufgefasst werden. Die Amplitude ist proportional zur Wurzel aus  $\bar{n}$ , wie in unserer elementarisierten Herleitung (7.2) bereits gesehen. Durch diese Gleichung werden Welleneigenschaften (Interferenzfähigkeit) und Teilcheneigenschaften (stochastisches Verhalten) für kohärentes Licht kombiniert. Die Gesamtenergie der stehenden elektromagnetischen Welle ergibt

$$E_{\text{ges}} = \langle\alpha|\frac{1}{2}\hbar\omega(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger)|\alpha\rangle = \bar{n}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (7.49)$$

Diese Energie entspricht (bis auf den Vakuumterm  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ ) genau der klassischen Gesamtenergie (7.41), denn es gilt

$$E_{\text{ges}} = \bar{n}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{\epsilon_0 V}{4} E_0^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (7.50)$$

Die Quantisierung, also die Überlagerung von einzelnen Photonen der Energie  $\hbar\omega$ , wird umso weniger auffallen, je mehr Photonen beteiligt sind. Die Fluktuationen in der Teilchenanzahl sind gegeben durch

$$(\Delta n)^2 = \langle \alpha | (\mathbf{n} - \bar{n})^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | \alpha \rangle - |\alpha|^4 = \bar{n}. \quad (7.51)$$

Die relative Schwankung  $(\Delta n)/n = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$  geht ganz analog zur Statistik 'klassischer' Teilchen für großes  $n$  nach Null.

Dasselbe Ergebnis ergibt sich auch über den 'Umweg' einer klassischen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es sei  $P_{\bar{n}}(k)$  die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Photonenzahl genau  $k$  Photonen zu erhalten. Im kohärenten Zustand ergibt sich die Poisson-Statistik,

$$\begin{aligned} P_{\bar{n}}(k) &= |\langle \alpha | k \rangle|^2 = \left| \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-|\alpha|^2} |k\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{k!} |\alpha|^{2k} e^{-|\alpha|^2} \\ &= \frac{1}{k!} \bar{n}^k e^{-\bar{n}}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Der hier gezeigte Rechenschritt entspricht dem Übergang von Amplituden zu Wahrscheinlichkeiten, also vom IV. Quadranten zum III. Quadranten, in Abb. 3.4. Erwartungswert  $\langle k \rangle = \sum k P_{\bar{n}}(k) = \bar{n}$  und Schwankungsbreite

$$(\Delta n)^2 = \langle (k - \bar{n})^2 \rangle = \sum k^2 P_{\bar{n}}(k) - \bar{n}^2 = \bar{n}$$

ergeben sich auch im Rahmen der klassischen Statistik.

## f.) Der polarisierende Strahlteilerwürfel

Das Laserlicht, das im Resonator erzeugt wird, soll ausgekoppelt werden und auf einen polarisierenden Strahlteilerwürfel fallen. Im klassischen Bild mit vielen Photonen, die eine kohärente, makroskopische Lichtwelle mit verschwindender Fluktuation beschreibt, wird das elektrische Feld wie in Gleichung (3.11) in eine horizontale und eine vertikale Feldkomponente aufgeteilt

$$\vec{E} = |\vec{E}| \cos(\theta) \vec{e}_H + |\vec{E}| \sin(\theta) \vec{e}_V. \quad (7.53)$$

Beide Komponenten werden durch den Strahlteiler räumlich getrennt. Im Bild einzelner Photonen ergibt sich für den Erwartungswert  $\bar{n}$  der Photonen

$$\sqrt{\bar{n}} \rightarrow \sqrt{\bar{n}} \cos(\theta) \vec{e}_H + \sqrt{\bar{n}} \sin(\theta) \vec{e}_V \quad (7.54)$$

Es folgt, dass die  $(\sqrt{\bar{n}})^2 \simeq N$  Photonen am polarisierenden Strahlteiler *nicht* in die Anteile

$$N_{\square} = \sqrt{\bar{n}}^2 \cos^2(\theta) = N p_{\square}, \quad N_{\blacksquare} = \sqrt{\bar{n}}^2 \sin^2(\theta) = N p_{\blacksquare}$$

aufgeteilt werden. Gemäß der Quantenphysik befindet sich vor der Wechselwirkung mit den Detektoren eine kohärente Superposition von Photonen an verschiedenen Orten im Raum. Erst wenn das Photon detektiert worden ist (und das Ergebnis  $\square$  bzw.  $\blacksquare$  registriert ist), kann man sagen, dass die Energie sich im Detektor lokalisiert hat. Die Intensität der Lichtwelle, die auf einem Schirm pro Zeiteinheit ankommt, ist proportional zur Energie, also  $I_H \propto \vec{E}^2 \propto N p_{\square}$ . Im Experiment mit vielen Photonen ergibt sich das Gesetz von Malus (I. Quadrant in 3.4 sowie Station U1-8, Slide 3).

Da die Wechselwirkung der Photonen untereinander vernachlässigt werden kann, erwarten wir, dass die Intensitätsverteilung der Summe von  $\bar{n}$  Experimenten mit einzelnen Photonen identisch ist mit der Intensitätsverteilung, die sich durch einen Laserstrahl mit im Mittel  $\bar{n}$  Photonen gleichzeitig ergibt. Betrachten wir also Lichtwellen mit im Mittel nur einem Photon, setzen also  $\bar{n} \rightarrow 1$ . Das Messergebnis zeigt zufällige Ergebnisse mit Wahrscheinlichkeiten  $p_{\square} = \cos^2(\theta)$  bzw.  $p_{\blacksquare} = \sin^2(\theta)$  für Reflexion und Transmission (U1-8, Slide 4, II. Quadrant).

Vor der Wechselwirkung mit dem Detektor muss der Zustand des *einzelnen* Photons als eine Superposition von transmittiertem und reflektiertem Strahl angesehen werden. Eine halbklassische Beschreibung mit elektromagnetischen Feldern gemäß der Maxwell-Theorie macht nun keinen Sinn mehr, stattdessen muss der Zugang über Operatoren und Zustände gesucht werden. Die *Amplituden* der einzelnen Zustände sind die komplexen Verallgemeinerungen  $p \rightarrow \sqrt{p} e^{i\phi}$  der klassischen Wahrscheinlichkeiten (IV Quadrant). Die Zustände geben je nach angewandeter Operation unterschiedliche Eigenschaften des Quantenfeldes preis. Wir bezeichnen die Ein- und Ausgangskanäle des polarisierenden Strahlteilers mit  $a, b, c, d$  wie in Abb. 7.4 gezeigt. Das Photonfeld wird als Produkt einer Orts- und einer Polarisationskomponente beschrieben. Die Polarisation eines einzelnen Photons wird in dem vom polarisierenden Strahlteiler vorgegebenen Koordinatensystem durch die Superposition  $z_0|H\rangle + z_1|V\rangle$  beschrieben. Der Basiszustand  $|V\rangle$  (bzw.  $|H\rangle$ ) selber kann auch als Überlagerung von zwei anderen Polarisierungen aufgefasst werden, die durch die Basisvektoren  $|+\rangle \equiv 1/(\sqrt{2})(|H\rangle + |V\rangle)$  und  $|-\rangle \equiv 1/(\sqrt{2})(|H\rangle - |V\rangle)$  definiert sind. Offensichtlich gilt für diese Basistransformation

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |V\rangle. \quad (7.55)$$

Der Zustand  $|V\rangle$  entspricht nicht einer einzigen Amplitude, sondern beschreibt alle Amplituden in jeder Winkelstellung. Im Zeigerformalismus kann diese Gleichung wie in Abb. 7.3 gezeigt durch elementare Vektoraddition visualisiert werden. Diese Darstellung eignet sich auch für die Verallgemeinerung zu polarisationsverschränkten Wellenfunktionen, wie in Abb. 3.14 gezeigt.

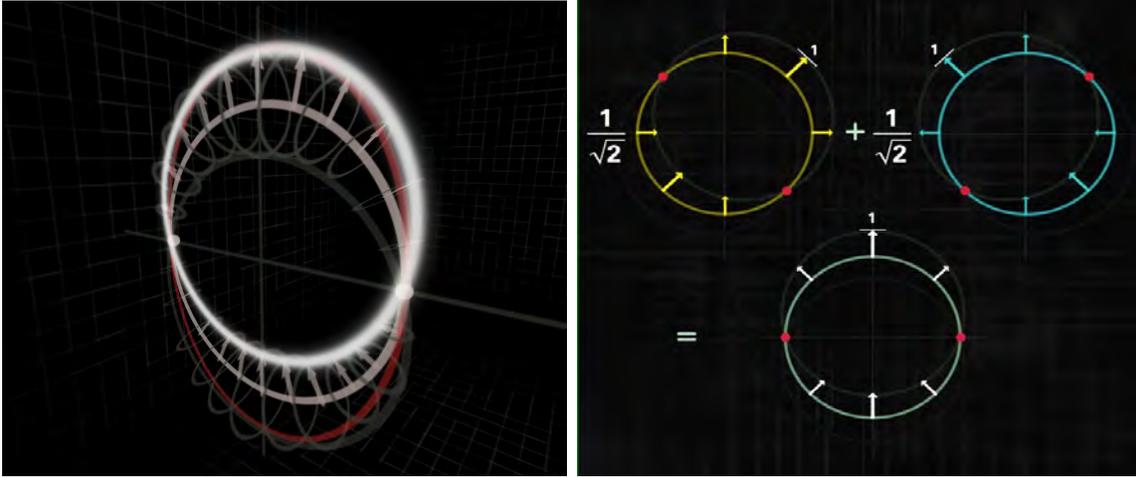


Abbildung 7.3: Links: Visualisierung der komplexen Amplitude  $\cos(\theta)e^{i\omega t}$  eines vertikal polarisierten Photons im Zeigerformalismus in verschiedenen Winkelstellungen. Rechts: Visualisierung der Superposition  $\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle = |V\rangle$  im Zeigerformalismus zu  $t = 0$ . Bei der Projektion auf den Realteil könnte die zeitliche Oszillation der Pfeillängen in diesem Bild durch die stehende Welle  $[1/(\sqrt{2})\cos(\phi - \pi/4) + 1/(\sqrt{2})\cos(\phi + \pi/4)]\cos(\omega t) = \cos(\phi)\cos(\omega t)$  beschrieben werden.

Die Ortswellenfunktion in den betreffenden Kanälen beschreiben wir mit  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$ . Durch den polarisierenden Strahlteiler ergeben sich die Aufteilungen

$$\begin{aligned} (z_0|H\rangle + z_1|V\rangle)|a\rangle &\rightarrow z_0|H\rangle|c\rangle + iz_1|V\rangle|d\rangle \\ (z_0|H\rangle + z_1|V\rangle)|b\rangle &\rightarrow z_0|H\rangle|d\rangle + iz_1|V\rangle|c\rangle. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Wie in der klassischen Optik ergibt sich bei Reflexion am Strahlteiler ein Phasensprung von 90 Grad bzw.  $i$ . Je nach den genauen Eigenschaften der Ortswellenfunktion können mit diesen Gleichungen verschiedene Lichttypen beschrieben werden, vom kohärenten Zustand bis zum  $n$ -Photonenzustand  $|n\rangle$  mit  $(n = 1, 2, \dots)$ .

### e.) Verschränkte Photonen

Neben dem polarisierenden Strahlteilerwürfel wird in der Quantenoptik auch der einfache Strahlteiler eingesetzt, der nicht auf den Polarisationsanteil, sondern auf die Ortswellenfunktion einwirkt wie

$$\begin{aligned} |a\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|c\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle \\ |b\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|d\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|c\rangle. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Sowohl für die polarisierenden Strahlteiler als auch für Strahlteiler, die nur auf die Ortswellenfunktion einwirken, verwenden wir die in Abb. 7.4 definierten Bezeichnungen der Kanäle. Wir haben in Kapitel 3.3 eine Methode vorgestellt, polarisationsverschränkte Photonen am doppelbrechenden BBO-Kristall zu erzeugen. Hier befassen wir uns mit der Möglichkeit, die Ortswellenfunktion zu verschränken. Zur Erzeugung von räumlich verschränkten Photonenpaaren muss erreicht werden, dass Wellenpakete verschiedener Photonen ununterscheidbar werden. Betrachten wir den Fall, dass einzelne Photonen aus Kanal  $a$  (Photon Nr. 1) und Kanal  $b$  (Photon Nr. 2) auf den Strahlteiler fallen. Es ergibt sich der Zweiphotonenzustand

$$\begin{aligned} |a_1\rangle|b_2\rangle \rightarrow |\psi_{12}\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|d_1\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|d_2\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|c_2\rangle\right) \\ &= \frac{i}{2}(|c_1\rangle|c_2\rangle + |d_1\rangle|d_2\rangle) + \frac{1}{2}(|c_1\rangle|d_2\rangle - |d_1\rangle|c_2\rangle). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Der räumliche Anteil des Photonenzustandes kann als ein im Raum ausgedehntes Wellenpaket mit der Kohärenzlänge  $l_{koh}$  interpretiert werden. Sind die Wellenpakete aus Kanal  $a$  und  $b$  beim Eintreffen am Strahlteilerwürfel räumlich um eine Länge getrennt, die größer als die Kohärenzlänge ist ( $ct > l_{koh}$ ), dann sind alle vier möglichen Ereignisse  $|c_1\rangle|c_2\rangle$ ,  $|d_1\rangle|d_2\rangle$ ,  $|c_1\rangle|d_2\rangle$  und  $|d_1\rangle|c_2\rangle$  wegen der zeitlichen Verzögerung zwischen den Photonen 1 und 2 unterscheidbar. Die Indizes 1 und 2 können daher wie in Abb. 7.4 gezeigt mit der Herkunft der Photonen aus Kanal  $a$  und Kanal  $b$  eindeutig in Verbindung gebracht werden. Jedes mögliche Ergebniss hat die Wahrscheinlichkeit  $1/4$ . Wenn der räumliche Abstand zwischen den Wellenpaketen kleiner als die Kohärenzlänge wird ( $ct < l_{koh}$ ), ergibt sich eine Superposition der Wellenpakete, da beide Photonen zu einem Wellenpaket verschmelzen und ununterscheidbar werden, siehe Abb. 7.5. Die Photonen kommen gleichzeitig am Detektor an, und die Zuordnung der Indizes 1, 2 zu den Kanälen  $a, b$  bricht zusammen. Es bildet sich die Superposition der Zuordnungen  $|a_1\rangle|b_2\rangle$  und  $|a_2\rangle|b_1\rangle$  der Photonen zu den Kanälen. Ähnlich wie bei den vier Bell-Zuständen (3.31) ergibt sich eine 'rotierende Münze' bzw. eine Superposition beider Kombinationen. Die Unterscheidung vom Hilbertraum und dem Raum der Wahrscheinlichkeiten (IV. und III. Quadrant in Abb. 3.4) wird nun bedeutsam, da mehrere Wahrscheinlichkeitsaussagen an verschiedenen Orten durch *eine* Wellenfunktion diktiert werden. Nach Durchlaufen des Strahlteilerwürfel ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|b_2\rangle \pm |a_2\rangle|b_1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{12}\rangle \pm |\psi_{21}\rangle). \quad (7.59)$$

Ununterscheidbarkeit findet also mathematisch im Symmetrisieren bzw. Antisymmetrisieren der Wellenfunktion ihren Ausdruck.

Das hier gezeigte Beispiel findet verschiedene Anwendungen, von denen wir zwei zitieren wollen: Die Hong-Ou-Mandel Interferenz und die Teleportation des Polarisationszustands eines Photons. Zunächst zur Hong-Ou-Mandel Interferenz: Werden zwei einzelne Photonen, die nicht polarisationsverschränkt sind, gleichzeitig auf den Strahlteilerwürfel

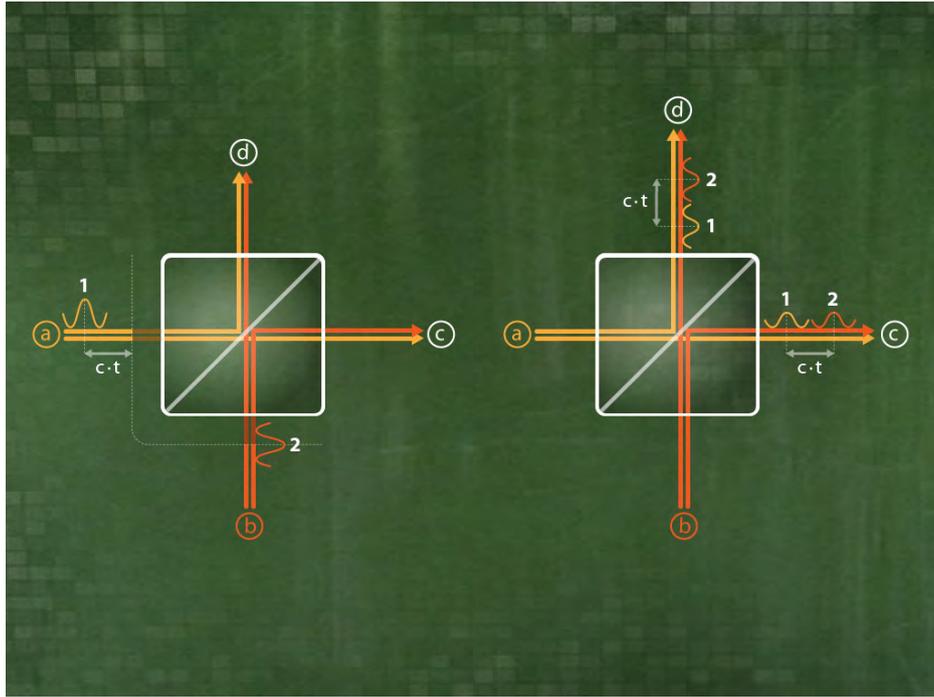


Abbildung 7.4: Die Wellenpakete aus Kanal (a) und (b) sind räumlich weiter als die Kohärenzlänge  $l_k$  getrennt und daher unterscheidbar. Die Indizes 1, 2 können auch nach Durchlaufen des Strahlteilerwürfels eindeutig den Kanälen (a), (b) zugeordnet werden und müssen in Gleichung (7.58) daher *nicht* symmetrisiert werden.

geschickt, treten entweder beide in Kanal (c) oder beide in Kanal (d) in Erscheinung. Der Fall, dass je eines in Kanal (c) und (d) auftritt, ist ausgeschlossen. Die Ursache hierfür ist die Symmetrisierung der Wellenfunktion,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{12}\rangle + |\psi_{21}\rangle) = \frac{i}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle|c_2\rangle) + |d_1\rangle|d_2\rangle. \quad (7.60)$$

Es ergeben sich daher die Wahrscheinlichkeiten  $1/2$  für  $|c_1\rangle|c_2\rangle$  und für  $|d_1\rangle|d_2\rangle$  und Null für  $|c_1\rangle|d_2\rangle$  und  $|d_1\rangle|c_2\rangle$ .

In einem etwas komplizierteren Aufbau kann dieser Mechanismus auch zur Analyse der Polarisation eines verschränkten Photonenpaares verwendet werden. Für den Fall, dass die Symmetrie des Polarisationsanteils des Photonenpaares antisymmetrisch ist (wie im antisymmetrischen Bell-Zustand  $|\psi^-\rangle$ ), ergibt sich genau das umgekehrte Bild: Bezeichnen wir den Polarisationsanteil der Wellenfunktion allgemein mit  $|\Omega_{12}\rangle$ , so kann dieser in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden ( $|\Omega_{12}^S\rangle, |\Omega_{12}^A\rangle$ ),

<sup>2</sup>Das Experiment zur Houg-Ou Mandel Interferenz kann als IBE (interaktives Bildschirmexperiment) unter [www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de) abgerufen und für die Schule genutzt werden.

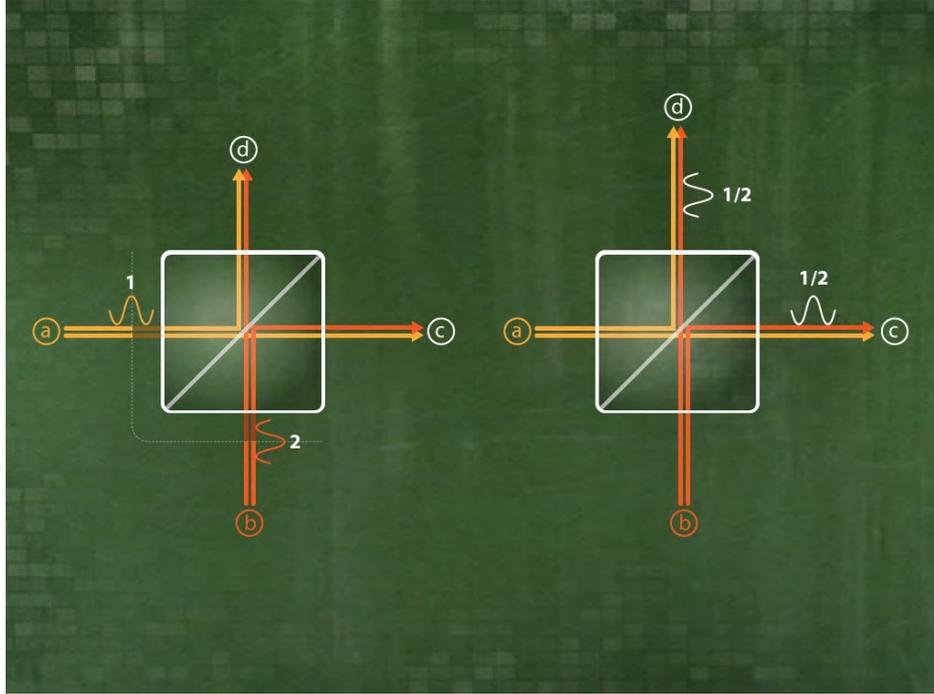


Abbildung 7.5: Die Wellenpakete aus Kanal (a) und (b) treffen zeitgleich am Strahlteilerwürfel ein und sind daher ununterscheidbar. Die Indizes 1, 2 können nach Durchlaufen des Strahlteilerwürfels nicht mehr den Kanälen (a), (b) zugeordnet werden und müssen in der Gleichung (7.59) symmetrisiert bzw. antisymmetrisiert werden, je nach Symmetrie der zugehörigen Polarisationswellenfunktion.

und analog der räumliche Anteil der Wellenfunktion,  $(|\psi_{21}^S\rangle, |\psi_{21}^A\rangle)$ . Die Gesamtwellenfunktion muss symmetrisch sein; dies ist für die Kombinationen  $|\psi_{12}^S\rangle|\Omega_{12}^S\rangle$  und  $|\psi_{12}^A\rangle|\Omega_{12}^A\rangle$  der Fall. Wenn die Polarisation des eintreffenden Photonenpaares sich im antisymmetrischen Bell-Zustand

$$|\Omega_{12}^A\rangle \rightarrow |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1\rangle|V_2\rangle - |H_2\rangle|V_1\rangle) \quad (7.61)$$

befindet, dann ergibt sich die antisymmetrische Ortswellenfunktion

$$|\psi_{21}^A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle|d_2\rangle - |d_1\rangle|c_2\rangle),$$

die sich durch das simultane Anspringen der Detektoren (c) und (d) eindeutig bestimmen lässt. Aus didaktischer Sicht von Bedeutung ist, dass das Verständnis der Grundprinzipien Symmetrie und Verschränkung in leichten Variationen in den verschiedensten physikalischen Anwendungen zu einem beachtlichen Erkenntnisgewinn führt.

## 7.2 Die Drehalgebra und die Drehimpulsalgebra

### Drehungen im Raum

Wir wollen die Visualisierung der Drehimpulsalgebra und die Verallgemeinerung auf kompliziertere Lie-Gruppen hier mathematisch genauer untersuchen. Die Drehimpulsalgebra ist in einer Reihe von Anwendungen von fundamentaler Bedeutung, und wird im zweiten Teil der DVD-ROM *Quantendimensionen* im Zusammenhang mit Atomphysik diskutiert. Die Kombination vom Drehimpuls verschiedener Teilchen führt wieder zum Thema Verschränkung; so ist z.B. der Spin-Singulett Zustand ein verschränkter Bell-Zustand. Die mathematischen Strukturen ergeben sich aber vollkommen ohne Bezug auf physikalische Anwendungen, wie in Abschnitt 4.2 erläutert. Wir beginnen unsere Diskussion daher zunächst rein formal und allgemein, und werden erst in einem zweiten Schritt als Anwendung die Quantenphysik diskutieren. Wir beginnen unsere Untersuchung mit einem Kreis  $S^1$  und der stetigen, differenzierbaren Funktion  $f(\phi_{12})$  auf dem Kreis. Der Kreis ist definiert als  $x_1^2 + x_2^2 = \cos^2(\phi_{12}) + \sin^2(\phi_{12}) = 1$ . Wir wollen das Verhalten der Funktion  $f(\phi_{12})$  bei Drehung um den Winkel  $\alpha_3$  untersuchen. Dazu betrachten wir die Taylorentwicklung von  $f(\phi_{12} + \alpha_3)$ ,

$$\begin{aligned} f(\phi_{12} + \alpha_3) &= f(\phi_{12}) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \phi_{12}} f(\phi_{12}) + \frac{\alpha_3^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial^2 \phi_{12}} f(\phi_{12}) + \dots \\ &= \exp \left[ \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \phi_{12}} \right] f(\phi_{12}) \end{aligned} \quad (7.62)$$

Wir können  $\mathbf{D}_3(\alpha_3) = e^{\alpha_3 \frac{\partial}{\partial \phi_{12}}}$  als Drehoperator einführen, der jede stetige, differenzierbare Funktion um den Winkel  $\alpha_3$  in der 12-Ebene dreht, siehe Abb. 7.6. Der Erzeuger der Drehung ist der Operator  $\mathbf{J}_3 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_{12}}$ . Wegen  $x_1 = \cos(\phi_{12})$  und  $x_2 = \sin(\phi_{12})$  gilt

$$\mathbf{J}_3 \equiv \frac{\partial}{\partial \phi_{12}} = \frac{\partial x_2}{\partial \phi_{12}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \phi_{12}} \frac{\partial}{\partial x_1} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 \quad (7.63)$$

wobei wir die Abkürzung  $\frac{\partial}{\partial x_k} \equiv \partial_k$  genutzt haben. Wir verallgemeinern das Resultat auf drei Dimensionen und führen die Koordinaten  $x_1, x_2$  und  $x_3$  ein. Wir untersuchen Drehungen auf der Kugeloberfläche  $S^2$ , definiert durch  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . In jeder der drei Ebenen (12), (23), (31) können ganz analog zu (7.63) Drehoperatoren eingeführt werden, die durch zyklische Vertauschung der Indizes 123 entstehen:

$$\mathbf{D}_1(\alpha_1) = \exp \left[ \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \phi_{23}} \right], \quad \mathbf{D}_2(\alpha_2) = \exp \left[ \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \phi_{31}} \right], \quad \mathbf{D}_3(\alpha_3) = \exp \left[ \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \phi_{12}} \right]. \quad (7.64)$$

Die Erzeuger  $\mathbf{J}_i = \epsilon_{ijk}(x_j \partial_k - x_k \partial_j)$  der Drehungen erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = -\mathbf{J}_3 \quad (7.65)$$

und zyklisch, also  $[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = -\epsilon_{ijk} \mathbf{J}_k$ . Zu dieser Algebra gibt es unendlich viele verschiedene Darstellungen. Neben der Darstellung durch Differentialoperatoren gibt es

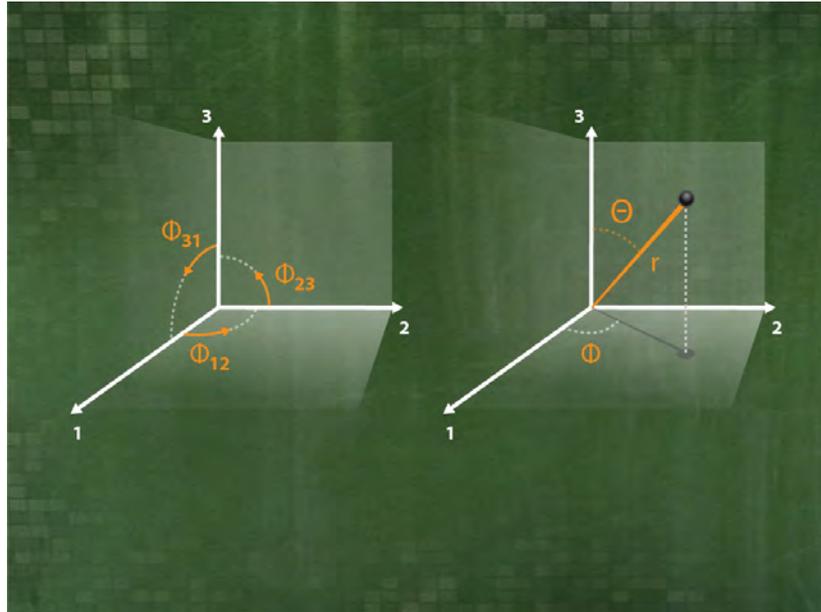


Abbildung 7.6: Links: Die Achsen 1, 2, 3 (entsprechend  $x, y, z$ ) und die zugehörigen Rotationswinkel  $\epsilon_{ijk}\phi_{jk}$  in einer Notation, bei der keine Achse gegenüber einer anderen ausgezeichnet ist. Rechts: Nach Auswahl von der 3-Achse ( $z$ -Achse) und dem entsprechenden Operator  $\mathbf{J}_3$  wird das Winkelpaar  $(\theta, \phi)$  in Kugelkoordinaten eingeführt, um die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  zu definieren.

auch verschiedene Darstellungen als  $N \times N$  Matrix ( $N = 2, 3, 4, \dots$ ). Wir suchen nun nach Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen, und einfache Visualisierungen. Wir zerlegen die Algebra in kommutierende Elemente (die sogenannte Cartan-Unteralgebra), im Fall der Drehimpulsalgebra ist dies der Operator  $\mathbf{J}_3$ , sowie Auf- und Absteigeroperatoren  $\mathbf{J}^+$  und  $\mathbf{J}^-$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^+ &= \mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}^- &= \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2.\end{aligned}\tag{7.66}$$

In dieser Darstellung lautet die Algebra

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}^+, \mathbf{J}^-] &= 2i\mathbf{J}_3 \\ [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}^\pm] &= \pm i\mathbf{J}^\pm.\end{aligned}\tag{7.67}$$

Diese Operatoren wirken auf Zustände. In der Darstellung der Algebra durch Differentialoperatoren wie oben definiert wirken die Operatoren auf die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}$  wie

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_3 Y_l &= (il)Y_l \\ \mathbf{J}^+ Y_l &= 0.\end{aligned}\tag{7.68}$$

Die Differentialgleichung  $\mathbf{J}^+ Y_l = 0$  definiert den Zustand  $Y_l$  als denjenigen Zustand, der durch Anwendung des Aufsteigeoperators  $\mathbf{J}^+$  zur Null abgebildet wird. Durch das Anwenden des Absteigeoperators  $\mathbf{J}^-$  ergibt sich der Zustand  $\mathbf{J}^- Y_l$ , der ebenfalls Eigenzustand von  $\mathbf{J}_3$  mit Eigenwert  $i(l-1)$  ist:

$$\mathbf{J}_3 \mathbf{J}^- Y_l = (\mathbf{J}^- \mathbf{J}_3 + [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}^-]) Y_l = i(l-1) \mathbf{J}^- Y_l.\tag{7.69}$$

Es folgt,  $\mathbf{J}^- Y_l \propto Y_{l,l-1}$ , was den Namen 'Absteigeoperator' rechtfertigt. Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist in vielen Standwerken beschrieben [107]. Hier nutzen wir die Visualisierung von  $\text{Re}(Y_{lm} e^{i\omega t})$ , Abb. 4.4 für die weitere Argumentation. Wie gezeigt, kann  $l$  als die Gesamtzahl von Knotenlinien von  $Y_{lm}$  identifiziert werden, wobei  $(l-|m|)$  Knotenlinien senkrecht zur  $x_3$ -Achse stehen, und  $m$  parallel zur  $x_3$ -Achse<sup>3</sup>. Wir können somit  $\mathbf{J}^\pm$  in dieser Darstellung als diejenigen Operatoren interpretieren, die eine der um die  $x_3$  Achse rotationssymmetrischen Knotenlinie um 90 Grad dreht. Durch mehrmaliges Anwenden gelangen wir so sukzessive zu den  $(2l+1)$  möglichen Basiszuständen mit  $l$  Knotenlinien auf der Kugeloberfläche  $S^2$ . Betrachten wir das einfachste Beispiel mit  $l=1$  etwas genauer. Die Kugelflächenfunktionen lauten

$$Y_{1,-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin[\theta] e^{-i\phi}, \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos[\theta], \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin[\theta] e^{i\phi}\tag{7.70}$$

Die Winkel in Polarkoordinaten sind in Abb. 7.6 definiert. Während es für die Herleitung der Drehimpulsalgebra sinnvoll ist, die Winkel  $\phi_{ij}$  einzuführen, ist die Darstellung der Kugelflächenfunktionen in Polarkoordinaten am elegantesten. Die Normierung ist

$$\langle Y_{1m} | Y_{1m'} \rangle := \int_{-1}^{+1} d\cos[\theta] \int_0^{2\pi} d\phi Y_{1,m}^* Y_{1,m'} = \delta_{mm'}\tag{7.71}$$

In dieser Basis können die drei Operatoren  $\mathbf{J}_3, \mathbf{d}^+, \mathbf{J}^-$  als  $3 \times 3$  Matrix dargestellt werden. Die Matrixelemente sind genau wie in dem elementaren Beispiel (7.72) aus Kapitel 4 definiert als

$$(J_3)_{mm'} = \langle Y_{1m} | \mathbf{J}_3 | Y_{1m'} \rangle, \quad J_{mm'}^\pm = \langle Y_{1m} | \mathbf{J}^\pm | Y_{1m'} \rangle\tag{7.72}$$

Es ergibt sich durch Berechnung der Integrale über die Kugeloberfläche  $S^2$  für jedes einzelne Matrixelement die Matrix-Darstellung

---

<sup>3</sup>Wegen der einfacheren Rechnungen mit Indizes haben wir die  $(x, y, z)$  Achsen zu  $(x_1, x_2, x_3)$  umbenannt.

$$(J_3)_{mm'} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +i \end{pmatrix}, (J^+)_{mm'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, (J^-)_{mm'} = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle  $(2l + 1) \times (2l + 1)$  Matrixdarstellungen von  $\mathbf{J}^\pm, \mathbf{J}_3$  stehen durch (7.72) mit Kugelflächenfunktionen in Verbindung. Die Operatoren können als Drehoperatoren im dreidimensionalen, reellen Raum gedeutet werden. Die entsprechende Gruppe ist die Drehgruppe  $SO(3)$ .

## Die Drehimpulsalgebra in der Quantenphysik

Wodurch erhält diese mathematische Struktur eine Interpretation im Rahmen von Quantenphysik? Beginnen wir mit dem Kommutator von Orts- und Impulsoperator

$$\mathbf{x}_i \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{x}_i = i\hbar \delta_{ij}. \quad (7.73)$$

In der Darstellung  $\mathbf{x}_i := x_i, \mathbf{p}_j := \frac{\hbar}{i} \partial_j$  ergibt sich daraus der Drehimpulsoperator

$$\mathbf{L}_1 = x_2 p_3 - p_3 x_2 = \frac{\hbar}{i} (x_2 \partial_3 - x_3 \partial_1) \quad (7.74)$$

und zyklisch in den Indizes (123). Im Vergleich mit (7.63) ergibt sich

$$\mathbf{L}_k = \frac{\hbar}{i} \mathbf{J}_k. \quad (7.75)$$

Durch diese Identifikation wird der Drehoperator  $\mathbf{J}_k$  mit  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} Js$  skaliert und erhält somit die physikalische Bedeutung (und die physikalische Einheit) des Drehimpulsoperators. Die komplexe Rotation mit  $-i$  dient dazu, dass sich reelle Observablen ergeben. Da Messgrößen reel sind, ist es sinnvoll, auch in der Quantenphysik nur reelle Eigenwerte als Observablen zuzulassen. Der Drehimpulsoperator erzeugt Drehungen der Basiszustände  $Y_{lm}$ . Der 'Abstand'  $\hbar$  zwischen den Zuständen in Abb. 4.6 erhält nun die Interpretation der kleinsten messbaren Einheit des Drehimpulses. Dies wird ersichtlich aus

$$\mathbf{L}_3 \mathbf{L}^- Y_{l,m} = (\mathbf{L}^- \mathbf{L}_3 + [\mathbf{L}_3, \mathbf{L}^-]) Y_{l,m} = \hbar(m-1) \mathbf{L}^- Y_{l,m}. \quad (7.76)$$

Jede Änderung des Drehimpulses erfolgt in Einheiten von  $\hbar$ . Eine analoge Untersuchung kann auch zum Spin gemacht werden, wie auf der DVD-ROM *Quantenspiegelungen* näher erläutert werden wird.

## 7.3 Verschränkung & Symmetrie: Vom He-Atom zum Periodensystem

Als eine Anwendung, die die Themengebiete Verschränkung und Drehimpulsalgebra kombiniert, untersuchen wir das Helium-Atom. Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_{12} \quad (7.77)$$

wobei  $\mathbf{H}_1$  und  $\mathbf{H}_2$  jeweils den Einteilchen-Hamiltonian von Elektron 1 und 2 beschreiben ( $k = 1, 2$ ),

$$\mathbf{H}_k = \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}_k|}. \quad (7.78)$$

Der Operator  $\mathbf{H}_{12}$  beschreibt die Elektron-Elektron-Wechselwirkung,

$$\mathbf{H}_{12} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (7.79)$$

Es gibt keine exakte analytische Lösung für dieses Problem, so dass wir auf Näherungen zurückgreifen müssen. Wir beginnen mit der bekannten Lösung der Schrödingergleichung zum Operator  $\mathbf{H}_k$  für den Grundzustand (4.43), folgen Sakurai [107] und machen für den Grundzustand des Helium-Atoms einen Produktansatz von zwei s-Wellen,

$$\psi(r_1, r_2) = \frac{\tilde{Z}^3}{\pi a^3} \exp\left[-\frac{\tilde{Z}}{a}(r_1 + r_2)\right]. \quad (7.80)$$

Hier bezeichnet  $a = (4\pi\epsilon_0)\frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 10^{-10}m$  den Bohr'schen Radius. Wir nehmen an, dass das eine Elektron aufgrund der Abschirmung durch das andere Elektron von den  $Z = 2$  Protonen im Atomkern effektiv eine kleinere Ladung  $\tilde{Z}$  spürt. Wir suchen den Wert von  $\tilde{Z}$ , für den der Energiewert minimal wird. Berechnen wir die Energie, ergibt sich [107]

$$\begin{aligned} E(\tilde{Z}) &= (4\pi)^2 \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \int_0^\infty dr_2 r_2^2 \psi^*(r_1, r_2) (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_{12}) \psi(r_1, r_2) \quad (7.81) \\ &= 2 \times (4\pi) \int_0^\infty dr r^2 \sqrt{\frac{\tilde{Z}^3}{\pi a^3}} \exp[-\tilde{Z}r/a] \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right] \sqrt{\frac{\tilde{Z}^3}{\pi a^3}} \exp[-\tilde{Z}r/a] \\ &+ (4\pi)^2 \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \int_0^\infty dr_2 r_2^2 \frac{\tilde{Z}^6}{\pi^2 a^6} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(r_1 - r_2)} \exp\left[-2\frac{\tilde{Z}}{a}(r_1 + r_2)\right] \\ &= 2 \times \left[ \frac{\tilde{Z}^2}{2} - Z\tilde{Z} \right] \frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{5}{8} \tilde{Z} \frac{\hbar^2}{ma^2}. \end{aligned}$$

Die beste Näherung ergibt sich für  $\frac{dE}{d\tilde{Z}} = 0$ , also für  $\tilde{Z}_M = 2 - \frac{5}{16} = 1.69$ . Durch die Abschirmung ergibt sich anstelle der kompletten Kernladung  $Z = 2$  ein um 16% reduzierter Wert. Die Energie  $E(\tilde{Z}_M)$  des Grundzustands wird durch diesen Ansatz

genähert durch  $E(\tilde{Z}_M) = -77.5\text{eV}$ , was bereits recht gut mit dem experimentellen Wert  $E_{\text{exp}} = -78.8\text{eV}$  übereinstimmt.

Allgemeiner betrachten wir zwei Elektronen mit den Quantenzahlen  $A = (n, l, m, s)$  und  $B = (n', l', m', s')$ . Um die Energie zu nähern, betrachten wir die Lösungen zum Wasserstoffatom zunächst ohne Elektron-Elektron Wechselwirkung mit dem Hamilton-Operator  $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ . Aufgrund der Ununterscheidbarkeit der Elektronen ergeben sich für  $A \neq B$  zwei Möglichkeiten für den gesamten Elektronenzustand,

$$\Psi_{A,B}^{SA/AS} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi^A(\vec{x}_1)\phi^B(\vec{x}_2) \mp \phi^B(\vec{x}_1)\phi^A(\vec{x}_2)] \times \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{+1/2}^A\chi_{-1/2}^B \pm \chi_{+1/2}^B\chi_{-1/2}^A]. \quad (7.82)$$

Befinden sich beide Elektronen im Grundzustand, gilt  $A = B$ , und die Ortswellenfunktion ist durch den Produktansatz (7.80) gegeben, der symmetrisch unter Vertauschung der Indizes ist. In diesem Fall muss die Spinwellenfunktion antisymmetrisch sein, entsprechend dem Singulett-Zustand mit Gesamtspin Null.

In jedem Fall kann die Kombination beider Elektronen wie in Abb. 4.8 gezeigt, als eine 'rotierende Münze' bzw. Superposition aus den Kombinationen (A1)(B2) und (B1)(A2) aufgefasst werden. Durch diese Analogie wird das Superpositionsprinzip als gemeinsames Merkmal vieler Quanteneigenschaften verankert.

Wir betrachten nun das gesamte Energiespektrum von Helium, aufbauend auf der Grundzustandsenergie, in erster Ordnung Störungstheorie. Die Energie des kombinierten Zustands ohne Wechselwirkungsterm  $\mathbf{H}_{12}$  ist  $E_{A,B} = -Ry\frac{8}{n^2} - Ry\frac{8}{n'^2}$ . Durch die Wechselwirkung verschieben sich die Energien wie<sup>4</sup>

$$\Delta E_{A,B}^{SA/AS} = \langle \Psi_{A,B}^{SA/AS} | \mathbf{H}_{12} | \Psi_{A,B}^{SA/AS} \rangle. \quad (7.83)$$

Da der Hamiltonoperator unabhängig vom Spin ist, ergibt sich für die symmetrische Ortsfunktion

$$\Delta E_{A,B}^{SA} = \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{2e^2|\phi^A(\vec{x}_1)|^2|\phi^B(\vec{x}_2)|^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{2e^2\phi^{*A}(\vec{x}_1)\phi^{*B}(\vec{x}_2)\phi^A(\vec{x}_2)\phi^B(\vec{x}_1)}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \equiv I + J \quad (7.84)$$

Für die antisymmetrische Ortsfunktion ergibt sich

$$\Delta E_{A,B}^{AS} = I - J. \quad (7.85)$$

<sup>4</sup>Für den Grundzustand liefert diese Näherung einen schlechteren Wert als der durch die 'Abschirm-Methode' (7.81) berechnete. Allerdings kann die Abschirm-Methode nicht direkt verallgemeinert werden.

Der Beitrag  $J$  heißt *Austauschterm*, da hier die Elektronenpositionen untereinander vertauscht werden. Die Existenz eines solchen Beitrags folgt aus dem Superpositionsprinzip und der Ununterscheidbarkeit der Elektronen, und ist somit nur im Rahmen der Quantenmechanik zu verstehen. Das Energiespektrum vom Helium wird in dieser Näherung durch  $E_{A,B} + I(A, B) \pm J(A, B)$  beschrieben. Interessanterweise ergibt sich eine Spinabhängigkeit im Energiespektrum, obwohl der Hamilton-Operator selber gar keine spinabhängigen Terme enthält. Die hier gezeigte Spinabhängigkeit der Energien folgt lediglich aus Symmetrieargumenten und wurde erstmals von Heisenberg beschrieben, allerdings in Zusammenhang zu Ferromagnetismus [119].

Verschränkung ist somit eine zentrale physikalische Eigenschaft, die sich in vielen Bereichen der Physik wiederfindet. Wie im Haupttext schon gefordert, wäre eine Kooperation mit der Chemiedidaktik sinnvoll, um Visualisierungen nicht nur von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, sondern auch von Amplituden und deren Verschränkung bei Atomen und Molekülen didaktisch sinnvoll umzusetzen, wie in Abb. 4.9 angedeutet.

## 7.4 Stereographische Projektionen von $S^2$ und $S^3$

Anhand vom Beispiel der stereographischen Projektion wollen wir aufzeigen, wie Visualisierungen dabei helfen können, komplizierte mathematische Zusammenhänge zu durchschauen und dadurch die Fähigkeit zu erlangen, diese in vollkommen verschiedenen Zusammenhängen anzuwenden. Als Anwendung für die Schule ergibt sich im Fall der stereographischen Projektion eine geometrische Interpretation der Zahlen Null und Unendlich. Als Anwendung in der elementaren Quantenphysik ergibt sich die Bloch-Kugel zur Visualisierung des Qubits. Als Anwendung in der Grundlagenforschung im Bereich Quantenchaos ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der perturbativen Berechnung der spektralen Korrelationsfunktion für Zeiten, die sehr klein im Vergleich zur Heisenbergzeit sind, mit der Berechnung bei Zeiten, die sehr groß sind [48]. An diesem Beispiel zeigt sich deutlich, dass einfache geometrische Bilder, in den passenden Zusammenhang gesetzt, nicht nur für die Didaktik, sondern auch für Forschungsfragen fruchtbringend sein können.

Wir betrachten die stereographische Projektion einer Kugeloberfläche auf eine Ebene. Es gibt *zwei* verschiedene Möglichkeiten, die Projektion der Kugel auf die Ebene zu realisieren: Entweder mit dem Nordpol als Aufpunkt, oder mit dem Südpol als Aufpunkt für die Projektion. Wir beginnen mit zwei Dimensionen, also der Projektion eines Kreises auf eine Gerade. In Abb. 7.7 definieren wir die Koordinaten  $(a, b)$  auf der Kreisoberfläche. Es gilt  $a^2 + b^2 = 1$ . Die Koordinate  $x$  auf der Gerade ergibt bei der Nordprojektion

$$x_N = \frac{a}{1+b} \quad (7.86)$$

Bei der Nordprojektion wird der Nordpol ( $a = 0, b = 1$ ) auf  $x_N = 0$  und der Südpol ( $a = 0, b = -1$ ) auf  $x_N \rightarrow \infty$  abgebildet. Bei der Südprojektion

$$x_S = \frac{a}{1-b} \quad (7.87)$$

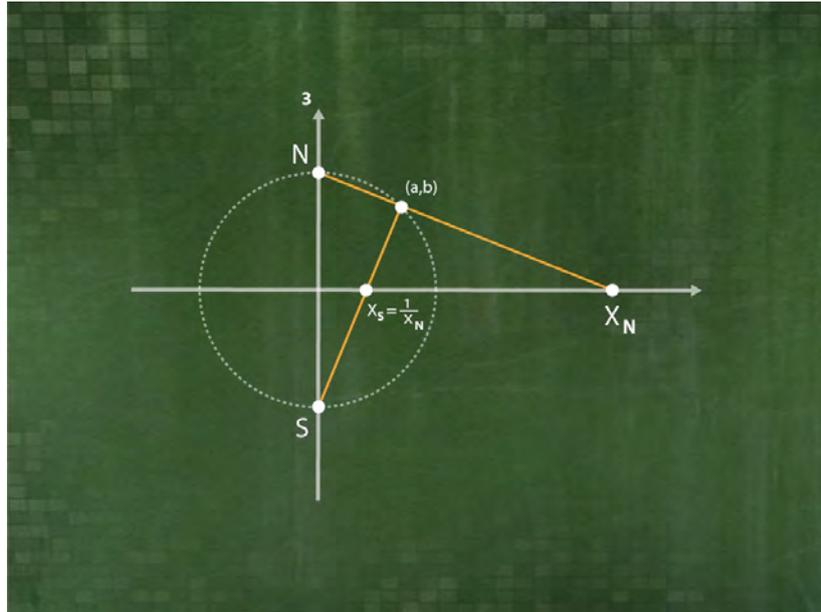


Abbildung 7.7: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Kugeloberfläche auf die Ebene abzubilden: Der Punkt  $x_N$  ergibt sich als Verbindungslinie zwischen dem Nordpol und dem Punkt auf der Kugel. Der Punkt  $x_S$  ergibt sich als Verbindungslinie zwischen dem Südpol und dem Punkt auf der Kugel. Es gilt  $x_S = 1/x_N$ .

ist es genau umgekehrt. Die Punkte Null und Unendlich auf der Gerade entsprechen also auf dem Kreis dem Nord- bzw. dem Südpol. Wir können einen Punkt  $x$  auf der Gerade durch Nord- oder durch Südprojektion auf den Kreis zurückprojizieren. Es ergibt sich die Umkehrabbildung

$$a_N(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad b_N(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad (7.88)$$

bei der Nordprojektion, und

$$a_S(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad b_S(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}. \quad (7.89)$$

bei der Südprojektion. Verallgemeinern wir auf zwei Dimensionen. Die Gerade wird zur komplexen Ebene  $z = x + iy = re^{i\phi}$  erweitert (für reelle Koordinaten ergeben sich kleine Unterschiede). Die Abbildung  $z \rightarrow 1/z$  auf der Ebene entspricht auf der Kugel ebenfalls dem Vertauschen von Nord- und Südpol. Es gilt auch im komplexen

$$a_N(1/z) = a_S(z), \quad b_N(1/z) = b_S(z) \quad (7.90)$$

Daraus folgt, dass die Abbildung  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  nach stereographischer Rückprojektion auf die Kugel Nord- und Südpol vertauschen, also die gesamte Kugel um 180 Grad gedreht wird.

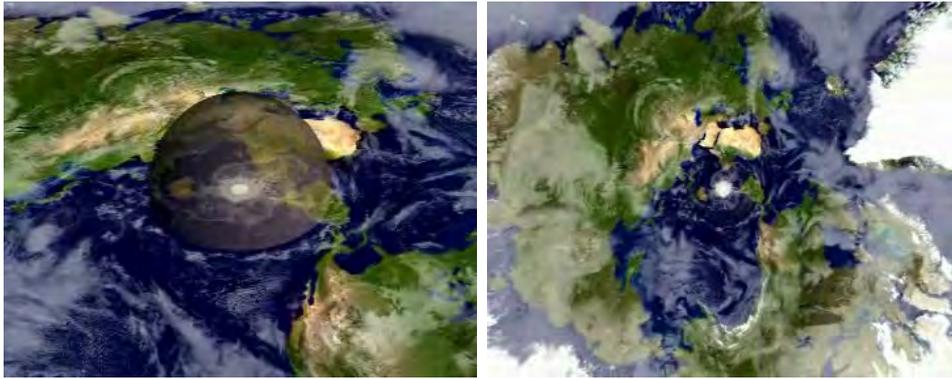


Abbildung 7.8: Stereographische Projektion der Erdkugel auf die Ebene. Gezeigt sind Standbilder aus einer Animation, die folgende mathematische Operationen visualisiert: (a) Projektion der Erdkugel auf die Ebene (b) Abbildung  $z \rightarrow 1/z$  auf der Ebene, sowie (c) Rückprojektion auf die Kugel, bei der dann Nord- und Südpol vertauscht sind (Animation: Daniel Terstegge).

## Stereographische Projektion der zweidimensionalen Kugeloberfläche

Suchen wir nun nach Möglichkeiten, diese Formeln zu visualisieren. Aus der Kartographie sind stereographische Projektionen bekannt. Im Atlas wird die Südhalbkugel durch Nordprojektion  $x_N$  und die Nordhalbkugel durch Südprojektion  $x_S$  dargestellt, um starke Verzerrungen zu vermeiden. Wir haben in einer Animation fast die gesamte Kugel durch Nordprojektion auf die Ebene projiziert. In Abb. 7.8 ist die Südhalbkugel und die stark verzerrte Nordhalbkugel zu sehen.

Wenden wir nun auf der Ebene die Abbildung  $z \rightarrow 1/z$  an, ergibt sich das umgekehrte Bild mit stark verzerrter Südhalbkugel. Durch Rückprojektion auf die Kugel ergibt sich die unverzerrte Erde, die nun auf dem Kopf steht. Was hier nur in Worten und in Standbildern beschrieben werden kann, wird auf der Leinwand (vor allem in 3D!) in Kombination mit Musik und Sprecher zu einem eindrucksvollen Spektakel, das gleichzeitig auch lehrreich ist: Verschiedene mathematische Themen werden an einem praktischen Beispiel veranschaulicht, insbesondere die wichtige Abbildung  $z \rightarrow 1/z$ . Moderne Computergraphik erlaubt auch beliebige Kamerafahrten durch die 'mathematische Landschaft', so dass Visualisierungen auf hohem Niveau möglich sind. Logogene und Imagene werden dadurch wie in Abb. 2.4 vorgestellt kombiniert, und das Verständnis durch die doppelte Kodierung verbessert.

## Stereographische Projektion der dreidimensionalen Kugeloberfläche

Die stereographische Projektion einer zweidimensionalen Kugeloberfläche auf eine zweidimensionale Ebene läßt sich auf die Projektion einer dreidimensionalen Kugeloberfläche auf den dreidimensionalen Raum verallgemeinern. Eine Anwendung hierzu ist das Qubit, wie in Abschnitt 3.1 eingeführt. Die explizite Parametrisierung des Qubits lautet

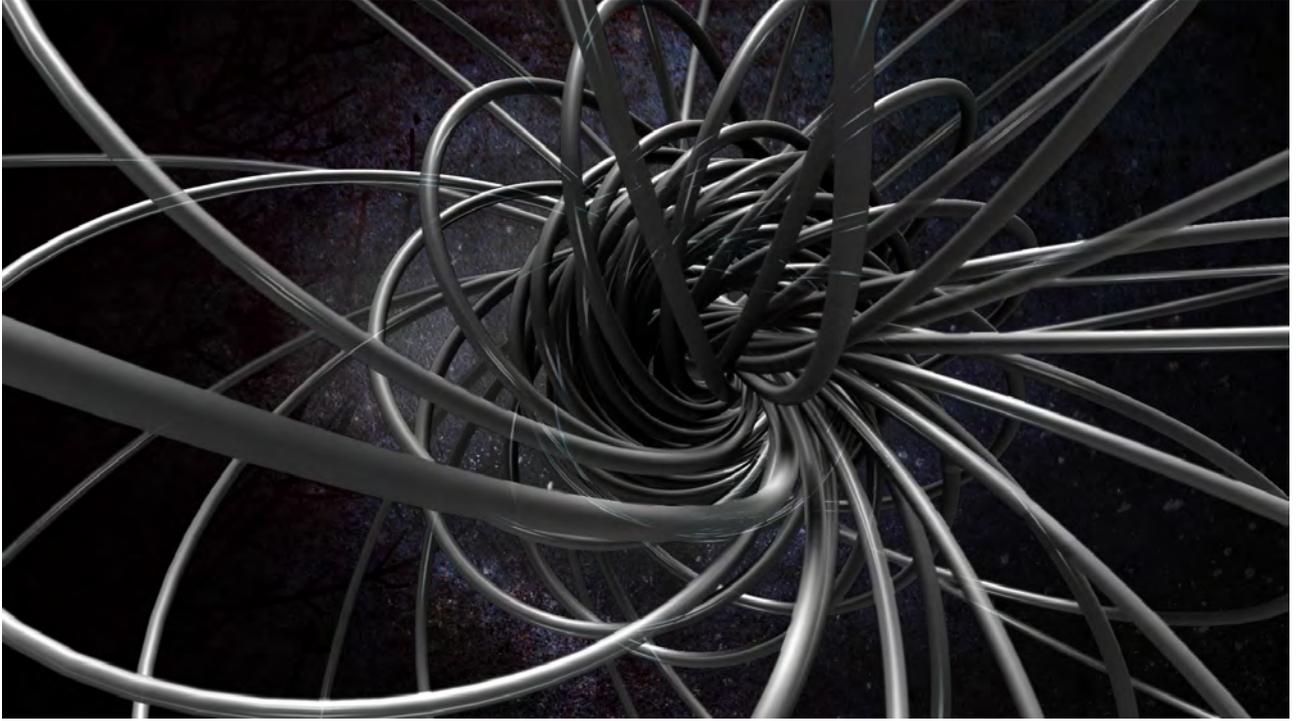


Abbildung 7.9: Stereographische Projektion von Großkreisen der  $S^3$  auf den  $R^3$ . Gezeigt ist ein Standbild einer 3D-Animation von Daniel Terstege.

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = e^{i\eta} \begin{pmatrix} \cos[\theta/2]e^{+i\phi/2} \\ \sin[\theta/2]e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (7.91)$$

Die Parameter  $(z_0, z_1) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$  können als Amplituden des Qubits interpretiert werden. In Abb. 7.9 zeigen wir einen Ausschnitt der  $S^3$ , der durch stereographische Projektion gemäß

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \left(1, \frac{x_2}{1-x_1}, \frac{x_3}{1-x_1}, \frac{x_4}{1-x_1}\right)$$

auf den dreidimensionalen, reellen Raum  $R^3$  abgebildet wurde. Durch Projektion auf die zweidimensionale Kugeloberfläche  $S^2$  ergibt sich die Visualisierung der Amplituden auf der Bloch-Kugel. Die Parametrisierung der sogenannten Hopf-Abbildung  $S^3 \rightarrow S^2$  lautet

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{Im}(2z_0^*z_1) \\ \text{Re}(2z_0^*z_1) \\ |z_0|^2 - |z_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin[\theta] \sin[\phi] \\ \sin[\theta] \cos[\phi] \\ \cos[\theta] \end{pmatrix}. \quad (7.92)$$

Beschreibt das Qubit die Polarisation eines Photons, ergibt sich der in Abb. 3.1 gezeigte Zusammenhang zur Visualisierung der verschiedenen Polarisationsstypen auf der



Abbildung 7.10: Links: In einem Muster aus Parallelogrammen im Winkel 80 Grad gibt es keine Symmetrieachse. Ein semitransparenter Spiegel wird in keiner Stellung Übereinstimmung zwischen Original und Spiegelbild anzeigen. Rechts: In einem Muster aus gleichseitigen Dreiecken im Winkel 60 Grad gibt es sechs Symmetrieachsen. Ein semitransparenter Spiegel wird genau in diesen Stellungen Übereinstimmung zwischen Original und Spiegelbild anzeigen, sonst nicht.

Bloch-Kugel  $S^2$ . Beschreibt das Qubit den Elektronspin, so ändert sich lediglich die Interpretation der Zustände, nicht der mathematische Formalismus.

## 7.5 Die Gruppe $SU(N)$

Zustände mit Bahndrehimpuls  $l = 1, 2, \dots (n - 1)$  und Spin  $S = 1/2$  lassen sich wie in Abb. 4.6 gezeigt durch die Spiegelsymmetrie von zwei rechtwinklig angeordneten Spiegeln beschreiben. Die Visualisierung von Zuständen und deren Symmetrien kann auch auf kompliziertere Situationen als den Fall der Kombination von Bahndrehimpuls und Spin verallgemeinert werden. Wir können verschiedene Repräsentationsebenen des Problems unterscheiden. Gruppentheoretisch gesprochen begeben wir uns auf die Suche nach Darstellungen mit höchstem Gewicht (highest weight representations) einer Lie-Gruppe, im Fall von Spin und Bahndrehimpuls der Gruppe  $SU(2)$  (bzw.  $SU(2)/Z_2 \simeq SO(3)$ ) [108]. In unserer Visualisierung übersetzen wir die möglichen Zustände und deren Symmetrien in ein rein geometrisches Problem: Gegeben sei ein semitransparenter Spiegel, bei welcher Anordnung von Punkten werden die Punkte aufeinander abgebildet? Die beiden möglichen Lösungen aus Abb. 4.6 entsprechen zunächst gruppentheoretischen Darstellungen von  $SU(2)$ , und finden in der Physik die Interpretation als Bahndrehimpuls und Spin, wenn der 'Abstand' zwischen den Zuständen zu  $\hbar$  skaliert wird, wie in Gleichung (7.75) definiert.

Die geometrische Frage kann wie folgt verallgemeinert werden: Wir betrachten eine regelmäßige Parkettierung der Ebene. Wenn es gelingt, die Parkettierung durch Spiegeloperationen auf sich selbst abzubilden, entspricht das Muster der Parkettierung den Eigenzuständen einer verallgemeinerten Gruppe von Operatoren. In Abb. 7.10 zeigen wir zwei Beispiele, einmal eine Parkettierung mit Parallelogrammen im Winkel 80 Grad, und einmal mit gleichseitigen Dreiecken. Im ersten Fall gibt es keine Position eines semitrans-

parenten Spiegels, bei dem das Parkettmuster auf sich selber abgebildet wird. Im zweiten Fall gibt es genau sechs Lösungen. Wir folgern, dass die Anordnung von Zuständen im Fall der 80-Grad Musterung keine Darstellung einer Gruppe ist, wohl aber im Fall der 60-Grad Musterung. Es bleibt die Frage zu klären, *welche* Gruppe zu dieser Anordnung gehört. Im Gegensatz zur  $SU(2)$ , mit je einem Auf- und Absteigeoperator und dem 'diagonalen' Operator  $\mathbf{L}_z$  mit Eigenwert  $m$  gibt es nun drei Auf- und Absteigeoperatoren und zwei 'diagonale' bzw. kommutierende Operatoren. Insgesamt ergeben sich 8 Operatoren. Die Gruppe  $SU(2)$  tritt in drei verschiedenen Kombinationen als Untergruppe der gesuchten Gruppe auf. Dies legt die Vermutung nahe, dass es sich um die Gruppe  $SU(3)$  handelt, da diese gerade drei Kombinationen von  $SU(2)$ -Untergruppen zulässt. Die Dimension der Gruppe  $SU(3)$  ist  $\dim SU(3) = 8$ , was genau der Anzahl von Operatoren entspricht, die das 60-Grad Parkettmuster erzeugt.

Diese Argumentation entspricht einer didaktischen, elementarisierten Herangehensweise, der ohne Rückgriff auf Formeln auskommt. Um die Vermutungen zu erhärten, ist die mathematische Beschreibung unausweichlich. Da diese jedoch weit über dem Schulniveau liegt, steht man vor der Wahl, gar keine Erklärungen, Vereinfachungen, oder mathematisch fundierte Visualisierungen zu nutzen. Skizzieren wir nun die mathematische Beschreibung. Zunächst ohne physikalische Interpretation kann die Algebra jeder Lie-Gruppe in folgende Standard-Form gebracht werden [108]

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_j] &= 0, \\ [\mathbf{D}_i, \mathbf{E}_\alpha] &= \alpha_i \mathbf{E}_\alpha, \\ [\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_\beta] &= N(\alpha, \beta) \mathbf{E}_{\alpha+\beta}, \\ [\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_{-\alpha}] &= \alpha^i \mathbf{D}_i. \end{aligned} \tag{7.93}$$

Ohne geometrisches Bild sind diese Zeilen aus Sicht von Schülern und auch vielen Studenten in den Anfangssemestern ein Indexfriedhof ohne direkte Anwendungen. Die Verknüpfung mit dem oben beschriebenen Beispiel der 60-Grad Parkettmusterung gelingt wie folgt. Die kommutierenden Operatoren  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_k$  (die sogenannte Cartan-Unteralgebra) spannen einen  $k$ -dimensionalen Raum von Eigenwerten  $m_1, m_2, \dots, m_k$  auf. Zustände können durch die 'Hausnummer'  $|m_1, m_2, \dots, m_k\rangle$  gekennzeichnet werden und bilden in dem  $k$ -dimensionalen Raum ein geometrisches Muster. Im Fall der Gruppe  $SU(3)$  ist dieser Raum zweidimensional, also eine Ebene. Die Anordnung der Zustände  $|m_1, m_2\rangle$  bildet ein Netzwerk von regelmäßigen Sechsecken. Die Vektoren  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  entsprechen den 'Richtungen', auf denen man sich auf dem Parkett nach vorne und zurück bewegen kann, siehe Abb. 7.11. Da die drei Auf- und Absteigeoperatoren nicht linear unabhängig sind, können die Zustände auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Die Anwendung der Operatoren  $\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta$  bzw.  $\mathbf{E}_\beta \mathbf{E}_\alpha$  führen zum selben Zustand wie die Anwendung von  $\mathbf{E}_{\alpha+\beta}$ , denn es gilt

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{7.94}$$

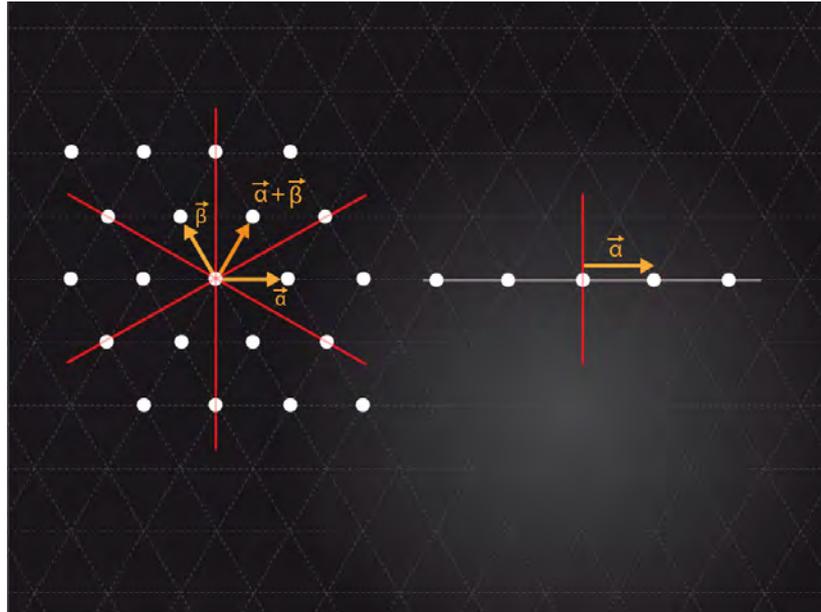


Abbildung 7.11: Die Darstellung der Gruppe  $SU(3)$  mit drei Spiegelachsen (links) kann als Verallgemeinerung der Darstellung der Gruppe  $SU(2)$  mit einer Spiegelachse interpretiert werden (rechts). Offensichtlich gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, die Gruppe  $SU(2)$  in  $SU(3)$  einzubetten.

## Theorie des achtfachen Weges

Bis Mitte des 20. Jahrhunderts war die Darstellungstheorie von Lie-Gruppen über die  $SU(2)$  hinaus ein mathematisches Feld, das in der Physik keine direkte Anwendung hatte. Eine wichtige Anwendung der  $SU(3)$ -Symmetrie wurde Mitte des 20. Jahrhunderts bei der Klassifikation des Spektrums von Mesonen und Hadronen entdeckt. Heisenberg hat im Jahr 1932 Proton und Neutron als Nukleonen mit Isospin  $\pm\frac{1}{2}$  beschrieben und führte so die  $SU(2)$ -Isospin Gruppe ein. Gell-Mann führte zusätzlich zum Isospin eine weitere Quantenzahl ein, die sogenannte 'strangeness'  $S$ . Dadurch erweitert sich die Symmetriegruppe  $SU(2)$  zunächst zur  $SU(2) \times U(1)$ , die eine Untergruppe der  $SU(3)$  darstellt. Durch Gell-Manns Verallgemeinerung des Isospin-Formalismus zum 'achtfachen Weg' bzw. der vollständigen Gruppe  $SU(3)$  in den 1950iger Jahren, konnten die bekannten Hadronen und Mesonen zueinander in Beziehung gesetzt und sogar ein weiteres vorhergesagt werden – das  $\Omega^-$ , siehe Abb. 7.12. Aus heutiger Sicht werden Teilchen wie das Proton und Neutron durch gebundene Quarks beschrieben, und die von Gell-Mann eingeführte Gruppe  $SU(3)$  entspricht der Quark-Flavour Symmetriegruppe der Quark-Flavours up, down, strange. Zwei zunächst vollkommen unabhängige Themenfelder, die Darstellungstheorie von Lie-Gruppen, und die experimentellen Ergebnisse in Blasenkamern und deren Weiterentwicklung bis hin zu den heutigen Großforschungsanlagen wie dem CERN, sind durch den Erfolg und die Vorhersagekraft des gruppentheoretischen Modells eng verknüpft worden. Dieses Beispiel macht deutlich, dass oftmals nicht nur

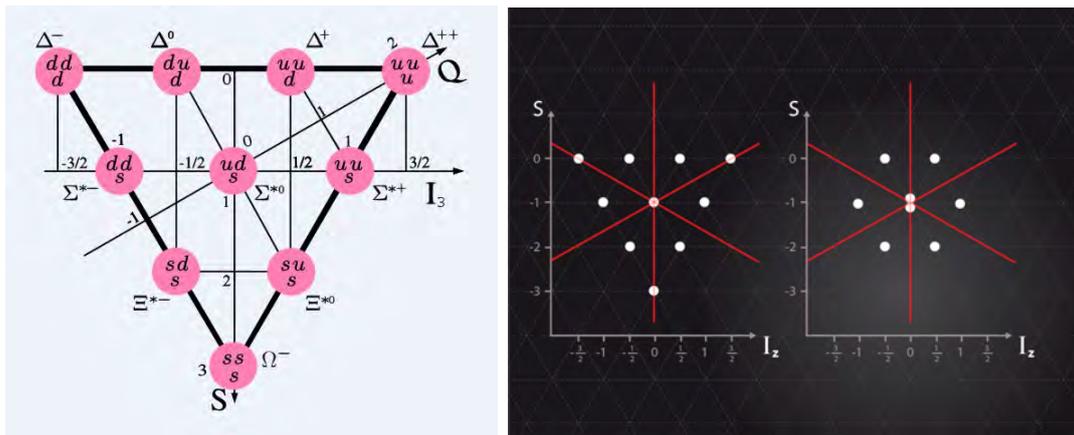


Abbildung 7.12: Links: Das Spektrum dieses Mesonen-Dekupletts führt im Vergleich mit der Darstellungstheorie der Gruppe SU(3) (rechts) zur Vorhersage des Teilchens  $\Omega^-$ .

die Physikdidaktik, sondern auch die Grundlagenforschung eine Übersetzungsaufgabe ist: Gell-Mann hat eine mathematisch seit langem bekannte Struktur in einen neuen Kontext übersetzt und auf diese Weise ein physikalisches Modell für Hadronen und Mesonen geschaffen. Auch hier wäre eine weitere Vertiefung und die Realisierung von schultauglichen Erklärungen wünschenswert, bei der Symmetrien durch Spiegelungen augenscheinlich werden und Theorie und Experiment in einfachen, mathematisch fundierten Visualisierungen miteinander in Zusammenhang gebracht werden.

## Quantendimensionen

Auch die geometrische Deutung verschränkter Zustände findet eine gruppentheoretische Entsprechung. Der reine Zustand eines Zwei-Qubit (3.17) Systems

$$|Q_2\rangle = z_{00}|00\rangle + z_{01}|01\rangle + z_{10}|10\rangle + z_{11}|11\rangle \quad (7.95)$$

mit komplexen Amplituden  $z_{ij}$  entspricht wegen  $\sum_{i,j} |z_{ij}^2| = 1$  geometrisch einer sieben-dimensionalen Kugeloberfläche  $S^7$  in acht Dimensionen. Die Korrelationsfunktion (3.46) ergibt sich aus einer elementaren Argumentation, bei der lediglich Basistransformationen durch reelle  $2 \times 2$  Rotationsmatrizen eine Rolle spielen. Die Visualisierung dieses Teils der theoretischen Beschreibung ist daher auf Schulniveau gut möglich und auf der DVD-ROM *Quantendimensionen* in Lernstation U1-11 realisiert. Gehen wir einen Schritt weiter und betrachten Verschränkung aus der Sicht von Gruppentheorie. Eine wesentliche Rolle für das System von zwei Qubits spielt dabei die Gruppe der unitären Rotationen  $U(4)$ . Die reinen Zustände entsprechen der Mannigfaltigkeit

$$S^7 \simeq U(4)/U(3).$$

Die Mannigfaltigkeit  $S^7$  ist isomorph zu folgender Dichtematrix,



Abbildung 7.13: *Quantendimensionen*: Von den  $2^{2n} - 1$  Parametern  $z_{i_k}, i_k \in 0, 1$  im reinen  $n$ -Qubit Zustand  $\sum_{i_k} z_{i_k} |i_1, i_2, \dots, i_n\rangle$  von  $n$  Zweiniveau-Systemen entsprechen nur  $3n$  Parametern lokalen Transformationen analog zu (3.29). Die übrigen  $2^{2n} - 3n - 1$  beschreiben Eigenschaften, die mehr als einem Qubit zugeordnet sind. Dieser exponentiell wachsende Parameterraum wird in dieser Analogie mit Reiskörnern auf dem Schachbrett verglichen, deren Anzahl sich mit jedem Feld verdoppelt (U1-14, [46]).

$$\rho_{R2} = |Q_2\rangle\langle Q_2| = U^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U. \quad (7.96)$$

Die Dichtematrizen sind hermitesch,  $\rho^\dagger = \rho$ , und sind Element (bis auf komplexe Rotation) der Lie-Algebra der unitären Gruppe  $U(4)$ . Zur Beschreibung von verschränkten Zuständen eröffnet sich durch Gruppentheorie noch eine weitere Repräsentationsebene. Lokale Operationen entsprechen der Transformation  $U_A(2) \times U_B(2)$  auf den beiden Qubits A (Alice) und B (Bob). Der Raum der nichtlokalen Operationen entspricht der Mannigfaltigkeit  $U(4)/(U_A(2) \times U_B(2))$ , wobei hier reine und gemischte Zustände enthalten sind. Die verschränkten, reinen Zustände befinden sich in der Schnittmenge von  $S^7 \simeq U(4)/U(3)$  und  $U(4)/(U_A(2) \times U_B(2))$ . Dieser Fall kann noch mit einer sehr elementaren Argumentation behandelt und visualisiert werden, wie wir im Abschnitt vor

der Definition der concurrence (3.27) gezeigt haben. Wird diese Argumentation auf ein System von  $n$  Qubits verallgemeinert, ergibt sich der Quotientenraum [139]

$$U(2^n)/(U_1(2) \times U_2(2) \times \dots \times U_n(2))$$

nichtlokaler Transformationen der  $2^n \times 2^n$  Dichtematrix  $\rho_{Q_n}$ . Wollen wir uns auf reine Zustände beschränken, muss dieser Raum mit  $U(2^n)/U(2^n - 1)$  geschnitten werden. Der Raum der reinen Zustände entspricht geometrisch gesprochen der  $2^{2^n} - 1$  dimensionalen Kugeloberfläche in  $2^{2^n}$  Dimensionen. Die lokalen Operationen  $U_1(2) \times U_2(2) \times \dots \times U_n(2)$  werden bei  $n$  Qubits von  $3n$  Parametern beschrieben. Der exponentielle Anstieg von Freiheitsgraden, von denen nur ein Bruchteil lokal beobachtbar ist, wird hier deutlich:  $2^{2^n} - 3n - 1$  Parameter, die ein reines System von  $n$ -Qubit beschreiben, können *nicht* lokal einem einzelnen der  $n$  Qubits zugeordnet werden. Im Gegensatz zum Fall von zwei verschränkten Qubits ist allerdings im Allgemeinen die physikalische Interpretation des exponentiell wachsenden Parameterraums in vielen Punkten noch unklar. Der Fall von drei Qubits ist bereits gut verstanden, der allgemeine noch nicht [14]. 'Schulbuchwissen' wird hier mit aktueller Forschung konfrontiert: In der Station U1-14 Slide 8 wird dieser  $2^{2^n} - 3n - 1$  dimensionale Raum als ein noch genauer in Theorie und Experiment zu untersuchender Gegenstand vorgestellt<sup>5</sup>. Dies ist die Motivation für den Namen *Quantendimensionen* der DVD-ROM.

## 7.6 Eichprinzip und minimale Kopplung

Als Ausblick auf mögliche weitere Arbeiten werden wir uns hier kurz mit der *Kopplung* elektromagnetischer Felder an Ladungen (wie das Elektron) befassen. Auch hier ist das Ziel, die Lücke zwischen dem aktuellen Kenntnisstand in der Physik und der Schulphysik durch geeignete Visualisierungen und Elementarisierungen zu verringern. Der erste Arbeitsschritt besteht in einer möglichst einfachen Formulierung der relevanten Grundideen, um daraus passende Bilder und elementarisierte Erklärungen zu erzeugen. Diesen ersten Schritt wollen wir hier für das Eichprinzip andeuten. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst führen wir die sogenannte kovariante Ableitung an einem Beispiel der klassischen Physik ein. Anschliessend diskutieren wir die Bedeutung von 'Umeichungen' im Fall von Elektromagnetismus, und geben einen Ausblick auf die Verallgemeinerung auf die starke und schwache Wechselwirkung.

### Die kovariante Ableitung in rotierenden Bezugssystemen

Wir betrachten ein Inertialsystem  $K$  mit Koordinaten  $\vec{y}$  und ein rotierendes Koordinatensystem  $K'$  mit  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Beide stehen durch die Rotationsmatrix  $\vec{y} = O\vec{x}$  mit  $O \in SO(3)$ ,  $O^T O = \text{id}$  miteinander in Verbindung. Die zeitliche Ableitung wird wie folgt zwischen den Bezugssystemen umgerechnet:

---

<sup>5</sup>Im Jahr 2011 wird der experimentelle Rekord mit 14 verschränkten Qubits von der Universität Innsbruck gehalten, [85].

$$\partial_t \vec{y} = O \partial_t \vec{x} + (\partial_t O) \vec{x} = O[\partial_t + O^T (\partial_t O)] O^T \vec{y} \quad (7.97)$$

Für den Fall, dass die zeitliche Ableitung von der Koordinatentransformation ungleich Null ist  $(\partial_t O) \neq 0$ , wenn also das Bezugssystem  $K'$  in Bezug auf  $K$  *rotiert*, ergibt sich bei der Umrechnung der zeitlichen Ableitung die sogenannte kovariante Ableitung

$$D_t \equiv [\partial_t + O^T (\partial_t O)] \equiv \partial_t + \Omega. \quad (7.98)$$

Der Term  $\Omega \equiv O^T (\partial_t O)$  ist ein Element aus der Liealgebra der entsprechenden Transformationsgruppe, in diesem Fall der  $so(3)$ . Im rotierenden Bezugssystem treten sogenannte Scheinkräfte auf, da das rotierende Bezugssystem in der Newton'schen Mechanik ein Nicht-Inertialsystem ist. In der Newton'schen Bewegungsgleichung muss die zeitliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt werden,

$$m(O^t \partial_t^2 O) \vec{x} = m D_t^2 \vec{x} = m[\partial_t^2 + 2\Omega \partial_t + (\partial_t \Omega) + \Omega^2] \vec{x}. \quad (7.99)$$

Der Term  $2\Omega \partial_t$  beschreibt die sogenannte Coriolis-Kraft,  $(\partial_t \Omega)$  ergibt Beiträge bei Änderung der Rotationsrichtung oder Rotationsgeschwindigkeit,  $\Omega^2$  beschreibt die Zentrifugalkraft im rotierenden System. In der klassischen Physik können z.B. die Euler-Gleichungen [108] zur Beschreibung von Kreiseln aus dem Vergleich des mitrotierenden Bezugssystems mit dem Laborsystem gewonnen werden.

## Die kovariante Ableitung und Symmetrieprinzipien in der Quantenelektrodynamik

In der klassischen Physik können wir, wie am obigen Beispiel gezeigt, Inertialsysteme und Nicht-Inertialsysteme durch eine Gruppentransformation miteinander in Beziehung setzen. Kräfte im Nicht-Inertialsystem können im Rahmen der Newton'schen Mechanik als Scheinkräfte gedeutet werden. Bei der Beschreibung der Wechselwirkung von Elektron und Photon wird eine verwandte Idee angewendet, bei der ebenfalls Transformationsgruppen eine Rolle spielen. Allerdings werden nicht Transformationen zwischen unterscheidbaren Bezugssystemen (wie zum Beispiel dem Laborsystem und dem mit dem Kreisel mitrotierenden System), sondern zwischen prinzipiell nicht unterscheidbaren Koordinatensystemen vorgenommen. Dadurch treten als neues Konzept innere Räume bzw. Symmetriegruppen auf, und durch die Freiheit der Koordinatenwahl in dem inneren Raum ergeben sich Kopplungen, die im Fall des Elektromagnetismus z.B. mit der beobachtbaren Coulomb-Kraft und der Lorentz-Kraft in Verbindung stehen. Es macht keinen Sinn, die auftretenden Kräfte als 'Scheinkräfte' zu interpretieren, da es kein ausgezeichnetes Inertialsystem innerhalb der Mannigfaltigkeit von Bezugssystemen gibt<sup>6</sup>. Im Folgenden werden wir diesen Gedankengang für den Fall der  $U(1)$ -Symmetrie

---

<sup>6</sup>Im Fall der Gravitation ist der innere Raum zugleich der Raum, in dem wir leben - insofern ist Einsteins Idee, die Gravitation geometrisch zu deuten, eng mit dem Eichprinzip verwandt. Ausgangspunkt der allgemeinen Relativitätstheorie ist genau die Forderung, daß es kein ausgezeichnetes Koordinatensystem bzw. Inertialsystem geben darf. Mit anderen Worten, die Gravitation wird als 'Scheinkraft' geometrisch umgedeutet.

des Elektromagnetismus nachvollziehen.

Dazu erinnern wir an die Maxwell-Gleichungen (7.5), und die Definition elektrischer und magnetischer Felder durch das Vektorpotential,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}\tag{7.100}$$

Das Vektorpotential ist nicht direkt beobachtbar, und hat keine eindeutige mathematische Beschreibung. Durch ein beliebiges, stetiges skalares Feld  $\Lambda(x, t)$  kann ein neues Vektorpotential definiert werden wie

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(x, t) \\ V' &= V - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(x, t).\end{aligned}\tag{7.101}$$

Die Felder  $\vec{E}, \vec{B}$  werden dadurch nicht modifiziert<sup>7</sup>.

Eine Überfülle an theoretischen, lokal nicht beobachtbaren Freiheitsgraden ist uns auch in der Quantenphysik begegnet. Betrachten wir die Wellenfunktion  $\psi(r, \theta, \phi)$  des Elektrons (4.26) im Wasserstoffatom als Beispiel. Die beobachtbare Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  wird durch die Änderung der Phase nicht beeinflusst, denn es gilt  $\rho = |\psi|^2 = |\psi e^{i\phi}|^2$ . Die Phase  $e^{i\phi}$  sollte auch für andere lokale Observablen keine Rolle spielen. Betrachten wir den Impuls  $\mathbf{p}$  als Beispiel. Für den Fall, dass  $\psi$  ein Eigenzustand des Impulses ist, gilt

$$\mathbf{p}\psi = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi = \vec{p}_0\psi\tag{7.102}$$

mit dem Eigenwert  $p_0$ . Führen wir die Phase  $e^{i\phi}$  ein, erhalten wir

$$\mathbf{p}(\psi e^{i\phi}) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}(\psi e^{i\phi}) = (\vec{p}_0 + \hbar\vec{\nabla}\phi)(\psi e^{i\phi})\tag{7.103}$$

Für den Fall einer ortsabhängigen Phase  $\phi(x)$  ergibt sich ein beobachtbarer Effekt, da der Eigenwert  $(\vec{p}_0 + \hbar\vec{\nabla}\phi)$  von der Phase  $\phi(x)$  abhängt - was zunächst ein Problem für den Formalismus darstellt. Die Lösung besteht darin, bei einer Umeichung der Wellenfunktion gleichzeitig auch alle Operatoren umzueichen, so dass sich an den Observablen nichts ändert. Dies entspricht genau dem Schritt (7.98) im Fall der SO(3)-Symmetrie. Im vorliegenden Fall ist der 'innere Raum' durch den Term  $e^{i\phi} \in U(1)$  gegeben. Die Ableitung  $\vec{\nabla}$  wird zur kovarianten Ableitung  $\vec{\nabla} - e^{-i\phi}(\vec{\nabla}e^{i\phi})$ . Durch Skalieren mit  $\frac{\hbar}{i}$  ergibt sich der kovariante Impulsoperator

<sup>7</sup>Die Einheit des Feldes  $\Lambda(x, t)$  ist  $Js/C$ , die von  $\vec{A}$  daher  $Ns/C$  und vom Magnetfeld  $\vec{B}$  Tesla, also  $T = (Ns)/(Cm)$ .

$$\mathbf{p}_\phi = \mathbf{p} - \hbar \vec{\nabla} \phi. \quad (7.104)$$

Der Term  $\hbar \vec{\nabla} \phi$  ist ein Element der Lie-Algebra der inneren Symmetriegruppe  $u(1)$ . Es gilt

$$\mathbf{p}\psi = \vec{p}_0\psi \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_\phi(\psi e^{i\phi}) = \vec{p}_0(\psi e^{i\phi}). \quad (7.105)$$

Die Redundanz in der Definition der Wellenfunktion führt zu einer analogen Redundanz in der Definition der Operatoren. Es gibt nur eine Observable bzw. einen Eigenwert  $\vec{p}_0$ , aber unendlich viele Möglichkeiten, Wellenfunktion und Operator zu definieren. Eine analoge Argumentation führt für den Energieoperator  $\mathbf{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  zu der Umeichung  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_\phi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi$  und  $\psi \rightarrow \psi e^{i\phi}$ ,

$$\mathbf{H}_\phi(\psi e^{i\phi}) = E_0(\psi e^{i\phi}). \quad (7.106)$$

Die Freiheit, eine skalare Funktion  $\Lambda(x, t)$  'unsichtbar' in die Definition des elektrischen und magnetischen Feldes zu schmuggeln (7.101), klingt nach einer Analogie zu der unsichtbaren Phase  $\phi$ . Wir wollen die Umeichung der elektromagnetischen Felder mit der Modifikation der Phase der Wellenfunktion  $\psi$  identifizieren. Auf diese Weise gelingt die Kopplung von Elektron und Photon. Da  $\Lambda(x, t)$  die Einheit  $Js/C$  hat, ergibt sich durch Skalierung mit Naturkonstanten die dimensionslose Größe  $\frac{e}{\hbar} \Lambda(x, t)$ , die per Postulat mit der Phase  $\phi$  der Wellenfunktion identifiziert wird

$$\phi := \frac{e}{\hbar} \Lambda(x, t).$$

Die 'Umeichung' lautet dann

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi e^{\frac{ie}{\hbar} \Lambda(x, t)} \\ \mathbf{p} \simeq \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} &\rightarrow \mathbf{p} - e \vec{\nabla} \Lambda(x, t) \\ \mathbf{H} \simeq i\hbar \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \mathbf{H} + e \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(x, t) \end{aligned} \quad (7.107)$$

Auf diese Weise ist der 'unsichtbare' Anteil des elektromagnetischen Feldes an das Elektron gekoppelt. Durch diesen Schritt ist die Aussage, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, Wellenfunktion und Operator zu definieren, wie folgt erweitert worden: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, die Wellenfunktion des Elektrons zu definieren, weil es unendlich viele Möglichkeiten gibt, das skalare und das Vektorpotential im Elektromagnetismus zu definieren. Die Redundanz in Maxwell's Theorie bei der Definition von elektrischen und magnetischen Feldern findet in der Quantenphysik mehr als hundert Jahre später eine interessante Interpretation - als Verschiebung der Phase der Wellenfunktion des Elektrons  $\psi \rightarrow \psi e^{\frac{ie}{\hbar} \Lambda(x, t)}$ . Wenn diese Verbindung einmal geschaffen ist, kann sie auch verallgemeinert werden - vom 'unsichtbaren' Anteil in Maxwell's Theorie

auf den 'sichtbaren' Anteil. Ein Blick auf (7.104) zeigt, dass durch die Erweiterung vom Energie- und Impulsoperator gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} - e\vec{A} \\ \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H} - eV\end{aligned}\tag{7.108}$$

Elektron und Photon so miteinander gekoppelt sind, dass die Interpretation der Umeichung (7.104) genau durch die Modifikation der Phase der Wellenfunktion  $\phi = \frac{e}{\hbar}\Lambda(x, t)$  gegeben ist. Dieses Kopplungsschema nennt man 'minimale Kopplung'. Die minimale Kopplung ist der Schlüssel zur modernen Quantenfeldtheorie. Im hier vorgestellten Fall der  $U(1)$ -Symmetrie ergibt sich die sogenannte Quantenelektrodynamik [66].

Um den Bogen zu schließen, betrachten wir nun aus der Sicht der minimalen Kopplung das Elektron im Atom. Das freie Elektron hat die Energie  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ . Durch die minimale Kopplung (7.108) erweitert sich der Hamiltonoperator wie

$$\mathbf{H} - eV = \frac{(\mathbf{p} - e\vec{A})^2}{2m}.\tag{7.109}$$

Ohne äußeres Magnetfeld  $\vec{A} = 0$  ist dies der Hamiltonian (4.20). Mit Magnetfeld ergibt sich eine Theorie, die Elektronen im klassischen elektromagnetischen Feld beschreibt [95]. Weitere Verallgemeinerungen sind von hier aus schon sichtbar - vom klassischen elektromagnetischen Feld zum Quantenfeld, von der nichtrelativistischen Theorie zur relativistischen.

## Visualisierungsansatz für das Eichprinzip

Die Verallgemeinerung obiger Argumentation von der  $U(1)$ -Symmetriegruppe auf kompliziertere Gruppen, wie z.B. der  $SU(3)$ -Farbladungsgruppe führt zur Beschreibung weiterer Kräfte bzw. zur Rückführung der beobachtbaren Wechselwirkungen auf zugrundeliegende Symmetrien. Eine genaue mathematische Analyse wird z.B. im Buch 'Eichtheorie' von T. Kugo [66] vorgenommen.

Eine schultaugliche Visualisierung des Eichprinzips wäre ein wünschenswertes Ziel für die Zukunft. Der Weg scheint klar: Vom klassischen Beispiel des rotierenden Bezugssystems und durch Scheinkräfte in Nicht-Intertialsystemen eröffnet sich ein direkter und leicht nachvollziehbarer Weg zum Eichprinzip. In der Quantenphysik ergibt sich aus der Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten zu Amplituden  $p \rightarrow \sqrt{p}e^{i\phi}$  (3.16) eine Redundanz der theoretischen Beschreibung, die einer inneren Symmetrie auf einer Kreislinie  $S^1$  entspricht, die sich im Zeigerformalismus visualisieren lässt. An jedem Punkt im realen Raum befindet sich als innerer Raum eine  $S^1$ . Hierbei ist es wichtig, Zeiger an verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen, was zu einer Visualisierung der kovarianten Ableitung führt. Hieraus folgt somit eine Möglichkeit, die Kopplung des Elektrons an das Photon durch 'Umeichung' einzuführen. Wird der innere Raum von der  $S^1$  zu komplizierteren Strukturen verallgemeinert, ergeben sich weitere beobachtbare Kräfte.

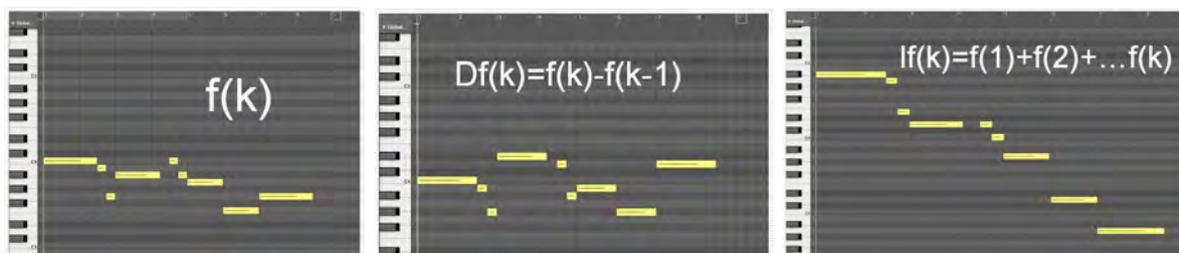


Abbildung 7.14: Links: Eine Melodie wird als zeitliche Abfolge von Grundtönen notiert. Rechts: Ableitung und Integral einer Melodie, dargestellt als Stufenfunktion  $Df(k)$  und  $If(k)$ . Gezeigt ist als Beispiel das *Alice*-Motiv aus der Filmmusik des Filmes *Schattenwelten* (Musik: Gregor Schwellenbach) [46].

## 7.7 Mathematik und Musik

In Analogie zur Musik haben wir nach verschiedenen Repräsentationsebenen für die Physik gesucht, um neben einer abstrakten und formalen Beschreibung eine intuitive und visuelle zu etablieren, die keine Vereinfachung, sondern eine Übersetzung in eine weitere Sprachebene darstellt, wie in Abb. 2.4 gezeigt. Zum Abschluß wollen wir uns nochmals der Musik zuwenden, um hier - genau umgekehrt - durch eine mathematische Analyse eine zusätzliche Betrachtungsebene der Musik zu gewinnen.

In Kapitel 2 haben wir die Aufteilung der Oktave in 12 Halbtöne als Grundlage der westlichen Musik mathematisch beschrieben. Jede Taste des Klaviers kann willkürlich als Taste 'Null' bezeichnet werden; benachbarte Tasten haben dann relativ zur Ausgangstaste mit Frequenz  $f_0$  die Frequenz  $f_0^k = 2^{k/12} f_0, k = \pm 1, 2, 3 \dots$ . Für die Arbeit des Komponisten macht die Arbeit mit mathematischen Formeln normalerweise keine Sinn. Wir nutzen diese Metapher, um am Beispiel von Musik mathematische Eigenschaften von 'Operatoren und Zuständen' zu erläutern. Von der Vielzahl von Variationsmöglichkeiten, die dieses Thema bietet, zeigen wir hier lediglich zwei Beispiele.

### Ableitung und Integral von Musikstücken

Wir beschreiben eine Melodie als Stufenfunktion  $f(k)$ . Dies entspricht einem 'Zustand'. Durch die Anwendung von Operationen kann dieser Zustand modifiziert werden, z.B. durch Spiegelung oder Umkehrung. Diese Art von Variationen haben in der Musikgeschichte bereits viele Komponisten angewendet. Inspiriert durch die Mathematik lassen sich aber noch eine Reihe von neuen musikalischen Variationen ersinnen, von denen wir hier ein Beispiel vorstellen wollen [46]. Wir definieren Ableitung  $\mathbf{D}$  und Integral  $\mathbf{I}$  einer Melodie durch

$$\mathbf{D}|f(k)\rangle = |f(k) - f(k-1)\rangle, \quad \mathbf{I}|f(k)\rangle = \left| \sum_{l=1}^k f(l) \right\rangle. \quad (7.110)$$

Durch die Übersetzung der Begriffe Operator und Zustand auf die Musik ergibt sich eine neue Repräsentationsebene für die mathematische Begriffe, siehe Abb. 7.14. Abstrakte Aussagen wie z.B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung finden eine Analogie in der Tatsache, dass  $\mathbf{DI}|f(k)\rangle = |f(k) - f(0)\rangle$  die um  $f(0)$  Halbtonschritte transponierte Ausgangsmelodie  $f(k)$  ist.

## Operatoren und Eigenzustände in der Musik

Von Vorteil bei der musikalischen Analogie ist, dass auch Überlagerungen der Form

$$|\text{DUR}\rangle = |0\rangle + |4\rangle + |7\rangle \quad (7.111)$$

als Akkord, also Überlagerung von Tönen, eine Interpretation finden. Der obige Akkord entspricht in jeder Basis dem DUR-Grundakkord mit Grundfrequenz  $f_0$ . Wir wollen die drei Zustände  $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle$  aus (4.27) neu in einen Sinnzusammenhang übersetzen durch die Zuordnung

$$|\chi_1\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad |\chi_2\rangle \rightarrow |4\rangle, \quad |\chi_3\rangle \rightarrow |7\rangle. \quad (7.112)$$

Die Definition der Operatoren

$$\mathbf{U}|0\rangle = |4\rangle, \quad \mathbf{U}|4\rangle = |0\rangle, \quad \mathbf{U}|7\rangle = |4\rangle, \quad (7.113)$$

und

$$\mathbf{W}|0\rangle = |7\rangle, \quad \mathbf{W}|4\rangle = |4\rangle, \quad \mathbf{W}|7\rangle = |7\rangle, \quad (7.114)$$

ergeben nun Anweisungen für Tastenwechsel auf dem Klavier. Die Melodie

$$\{0, 4, 7, 4, 7, 4, 0\}$$

wir durch den Operator  $\mathbf{U}$  auf die Melodie

$$\{4, 0, 4, 0, 4, 0, 4\}$$

abgebildet, und durch  $\mathbf{W}$  auf die Melodie

$$\{4, 4, 7, 4, 7, 4, 4\}.$$

In diesem Zusammenhang kann die Diagonalisierung der Operatoren als Überlagerung der Töne interpretiert werden. Die drei Eigenzustände von  $\mathbf{U}|u_j\rangle = \lambda_j|u_j\rangle$  mit den Eigenwerten  $\{+1, -1, 0\}$

$$|u_1\rangle = |0\rangle + |4\rangle, \quad |u_2\rangle = |0\rangle - |4\rangle, \quad |u_3\rangle = |7\rangle - |0\rangle, \quad (7.115)$$

können als Überlagerung von zwei Tönen mit je gleicher Amplitude gedeutet werden. Auch das Minuszeichen findet eine Entsprechung, als Drehung der Phase der Schallwelle um 180 Grad. Da nur Intensitäten gehört werden, spielt die Phasenverschiebung für den Klang des einzelnen Tons keine Rolle, solange die Frequenzen weit genug voneinander entfernt sind. Allerdings löscht sich der Zustand  $\mathbf{U}|u_3\rangle = |0\rangle - |0\rangle$  durch destruktive Interferenz aus.

# Literaturverzeichnis

- [1] G. Adenier. Quantum entanglement, fair sampling, and reality: Is the moon there when nobody looks? *American Journal of Physics*, 76(2): 147152, 2008.
- [2] S. Altherr, A. Wagner, B. Eckert, and H. J. Jodl. Multimedia material for teaching physics (search, evaluation and examples). *European Journal of Physics*, 25(1):7 14, 2004.
- [3] B. Akarsu. Instructional designs in quantum physics: A critical review of research. *Asian J. Applied Sci.*, 4: 112-118 2011.
- [4] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of Bells inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters*, 49(25): 18041807, 1982.
- [5] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. Experimental tests of realistic local theories via Bells theorem. *Physical Review Letters*, 47(7): 460463, 1981.
- [6] N. Axmacher, M. Henseler, O. Jensen, I. Weinreich, C. Elger, J. Fell, Cross-frequency coupling supports multi-item working memory in the human hippocampus, *PNAS*, 2009
- [7] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1(3): 195200, 1964.
- [8] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Savail, and J. Smolin. Experimental quantum cryptography. *Journal of Cryptology*, 5(1):328, 1992.
- [9] A. Beveratos, R. Brouri, T. Gacoin, A. Villing, J. Poizat, and P. Grangier. Single photon quantum cryptography. *Physical Review Letters*, 89(18):1879014, 2002.
- [10] P. Blumenschein, Eine Metaanalyse zur Effektivität multimedialen Lernens am Beispiel der Anchored Instruction, Dissertation, Albert-Ludwig Universität Freiburg, Institut für Erziehungswissenschaften
- [11] D. Bohm, A Suggested Interpretation of Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables, *Phy. Rev.* 85, Nr. 2, 1952, S. 166-179
- [12] W. Bos, Institut für Schulentwicklungsforschung, TU Dortmund, Vortrag am 26.2.2011, Universität Münster
- [13] P. Braun, S. Heusler, S. Müller, F. Haake. Semiclassical Prediction for Shot Noise in Chaotic Cavities, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, L159-L165, 2006.

- [14] H.J. Briegel, D. E. Browne, W. Dür, M. Van den Nest, Measurement-based quantum computation, *Nature physics*, Vol. 5, January 2009
- [15] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660):575579, 1997.
- [16] G. Breitenbach. A gallery of quantum states: An introduction to quantum optics of the light field with homodyne detection and the transition from quantum to classical states. <http://www.gerdbreitenbach.de/gallery>, Private Homepage, München, Germany, 2008.
- [17] G. Breitenbach and S. Schiller. Homodyne tomography of classical and nonclassical light. *Journal of Modern Optics*, 44(11):22072225, 1997.
- [18] C. Brell. Lernmedien und Lernerfolg - reale und virtuelle Materialien im Physikunterricht. Empirische Untersuchungen zum Computereinsatz mit Simulation und IBE. Logos Verlag, Berlin, 2008.
- [19] P. Bronner, H. Hauptmann, D. Roth, and F. Herrmann. Das Wasserstoffatom im Bild. Aulis Verlag, Kln, 2005.
- [20] P. Bronner, Quantenoptische Experimente als Grundlage eines Curriculums zur Quantenoptik des Photons, Logos Verlag Berlin, Band 103 (2010)
- [21] P. Bronner, A. Strunz, C. Silberhorn, and J. P. Meyn. Demonstrating quantum random with single photons. *European Journal of Physics*, 30(5):11891200, 2009.
- [22] P. Bronner, A. Strunz, C. Silberhorn, and J. P. Meyn. Interactive screen experiments with single photons. *European Journal of Physics*, 30(2):345353, 2009.
- [23] P. Bronner, Hydrogen Lab, Diplomarbeit im Rahmen des Karlsruher Physikkurses, <http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/>
- [24] O. Carnal and J. Mlynek. Youngs double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer. *Physical Review Letters*, 66(21):26892692, 1991.
- [25] Madame Curie, USA (1943), Regie: Mervyn LeRoy, Drehbuch: Paul Osborn, Paul H. Rameau, nach der gleichnamigen Biografie von Eve Curie
- [26] A. Casado, T. W. Marshall, and E. Santos. Parametric downconversion experiments in the Wigner representation. *Journal of the Optical Society of America B*, 14(3):494502, 1997.
- [27] A. Casado, T. W. Marshall, and E. Santos. Type II parametric downconversion in the Wigner-function formalism: entanglement and Bells inequalities. *Journal of the Optical Society of America B*, 15(5):15721577, 1998.
- [28] H. Crews, G. Biswas, S. Goldman, J. Bransfors, Anchored Interactive Learning Environments, *International Journal of AI in Education*, 8, 142-178, 1997.

- [29] Duit, R., Mikelskis-Seifert, S., Kontextorientierter Unterricht: Wie man es einbettet, so wird es gelernt. *Unterricht Physik*, 18 (98), 4-8
- [30] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777780, 1935.
- [31] R. Feynman. *QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*. Piper Verlag, München, 2009.
- [32] R.P. Feynman, Quantum mechanical computers, *Found. Phys.* **16**, 507-531, 1986.
- [33] M. Fox. *Quantum optics*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [34] S. J. Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 28(14):938941, 1972.
- [35] E. S. Fry, T. Walther, and S. Li. Proposal for a loophole-free test of the Bell inequalities. *Physical Review A*, 52(6):43814395, 1995.
- [36] Gell-Mann, M., *Das Quark und der Jaguar*, Piper, München 1994, Gell-Mann, M. and Ne'eman, Y. (Hrsg.), *The Eightfold Way*, Advanced Book Classics, 1964.
- [37] *Genius Physik, Lernspiel*, <http://www.cornelsen.de/genius/physik/>, Cornelsen-Verlag
- [38] B. Greene, *The Elegant Universe, USA*, Drehbuch/ Regie: Joseph McMaster , 2003.
- [39] S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Brukner, M. Zukowski, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger, A., An experimental test of non-local realism, *Nature* 446, 871-875 (2007) , Experimental Test of Nonlocal Realistic Theories Without the Rotational Symmetry Assumption, *Phys. Rev. Lett.* 99, 210406, 2007.
- [40] J.G. Greeno, Situations, Mental Models and Generative Knowledge, Artikel in 'Complex Information Processing: The Impact of Herbert A. Simon', p. 285-318, Klahr and Kotovsky (Eds), Lawrence Erlbaum, 1989.
- [41] N. Gisin and B. Gisin. A local hidden variable model of quantum correlation exploiting the detection loophole. *Physics Letters A*, 260(5):323327, 1999.
- [42] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, 3rd edition, Springer-Verlag, 2010.
- [43] H. Härtig, Sachstrukturen von Physikschulbüchern als Grundlage zur Bestimmung der Inhaltsvalidität eines Tests. *Studien zum Physik- und Chemielernen*. Berlin: Logos Verlag. (2010)
- [44] Häußler (Hrsg.) *Physikdidaktik, Theorie und Praxis*. (S. 657 - 678) Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [45] A. Helmke, *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität*. Seelze: Kallmeyer, 2006.

- [46] S. Heusler, Quantendimensionen - Doppelspalt, Verschränkung, Quantencomputer, Klett-Verlag Stuttgart, SCIENCeMOTION Filmproduktion, 2010.
- [47] S. Heusler, QED - Materie, Licht und das Nichts, SCIENCeMOTION Filmproduktion, 2005.
- [48] S. Heusler, S. Müller, A. Altland, P. Braun, F. Haake, Periodic-Orbit Theory of Level Correlations, Phys. Rev. Lett. 98, 044103 , 2007.
- [49] S. Heusler, H.J. Schlichting. Interferenz von Wahrscheinlichkeiten, Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, 1/7, 2008.
- [50] S. Heusler, S.Müller, P. Braun, F. Haake. Semiclassical Theory of Chaotic Conductors, Phys. Rev. Lett. 96, 066804, 2006.
- [51] W. Dür, S. Heusler, Was man vom einzelnen Qubit über Quantenphysik lernen kann, Phydid-A, Nr. 11 (2012), Band 1
- [52] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. Nature, 177(4497):2732, 1956.
- [53] F. Hehl, A. Altland, persönliches Gespräch, 2010.
- [54] D.T. Hickey, A. L. Moore, J. W. Pellegrino, The Motivational and Academic Consequences of Elementary Mathematics Environments: Do Constructivist Innovations and Reforms Make a Difference?, American Educational Research Journal, 38 (3), 611-652
- [55] D. Home and T. W. Marshall. A stochastic local realist model for the EPR atomic-cascade experiment which reproduces the quantum-mechanical coincidence rates. Physics Letters A, 113(4):183186, 1985.
- [56] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. Physical Review Letters, 59(18):20442046, 1987.
- [57] T. N. Höffler, Leutner, D. Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. Learning and Instruction, 17, 722-738, 2007.
- [58] T. N. Höffler, Lernen mit dynamischen Visualisierungen: Metaanalyse und experimentelle Untersuchungen zu einem naturwissenschaftlichen Lerninhalt. Essen: Universität Duisburg-Essen. [Elektronische Dissertation], 2007.
- [59] ID-Quantique. Quantis - quantum random number generator, Clavis - quantum cryptography system. <http://www.idquantique.com>, ID-Quantique, Chemin de la Marbrerie 3, 1227 Carouge, Switzerland, 2008.
- [60] G. Ireson. The quantum understanding of pre-university physics students. Physics Education, 35(1):1521, 2000.

- [61] T. Jennewein, A. Zeilinger, U. Achleitner, G. Weihs, and H. Weinfurter. A fast and compact quantum random number generator. *Review of Scientific Instruments*, 71(4):16751680, 2000.
- [62] de Jong, van Joolingen, Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains, *Review of Educational Research*, 68, 179-201
- [63] S. Kalyuga, P. Ayres, P. Chandler, J. Sweller, The Expertise Reversal Effect, *Educational Psychologist*, 38(1), 23-31
- [64] J. Kirstein and V. Nordmeier. Multimedia representation of experiments in physics. *European Journal of Physics*, 28(3):115126, 2007.
- [65] KMK [Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland] (Hrsg.) Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Physik. <http://www.kmk.org/>, 2004.
- [66] T. Kugo, *Eichtheorie*, aus dem japanischen übersetzt von S. Heusler, Springer 1997.
- [67] J. Kuhn, *Authentische Aufgaben im theoretischen Rahmen von Instruktions- und Lehr-Lern-Forschung*, Universität Koblenz-Landau, Habilitationsschrift 2008.
- [68] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, 409(6816):4652, 2001.
- [69] P. G. Kwiat and R. Hillmer. Quantenradierer selbst gemacht. *Spektrum der Wissenschaft*, 07:6874, 2007.
- [70] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Physical Review Letters*, 75(24):43374341, 1995.
- [71] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum, and P. H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*, 60(2):773776, 1999.
- [72] D. Leutner, R. Brünken (Hrsg.), (Seite 26) *Neue Medien in Unterricht, Aus- und Weiterbildung*, Waxmann, 1999.
- [73] A. Lenzner, *Visuelle Wissenskommunikation: Effekte von Bildern beim Lernen. Kognitive, affektive und motivationale Effekte*. Hamburg: Kovac, 2009.
- [74] *Lernspiele*, Tivola Publishing, <http://www.tivola.de>
- [75] M. Lichtenfeldt. *Schülervorstellungen in der Quantenphysik und ihre mögliche Veränderung durch Unterricht*. Westarp Verlag, Essen, 1992.
- [76] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, Oxford, 2000.

- [77] Luiten, J., Ames, W. y Ackerson, G. A meta-analysis of the effects of advancor-  
ganizers on learning and retention. *American Educational Research Journal*, 17,  
211-218, 1980.
- [78] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller. Quan-  
tum state reconstruction of the single-photon Fock state. *Physical Review Letters*,  
87(5):0504024, 2001.
- [79] MagiQ. QPN 8505 - Quantum cryptography system. <http://www.magiqtech.com>,  
MagiQ Technologies Inc., 11 Ward Street, Somerville, MA, USA, 2007.
- [80] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin. Long-distance  
teleportation of qubits at telecommunication wavelengths. *Nature*, 421(6922):509  
513, 2003.
- [81] A. Mashhadi and B. Woolnough. Insights into students understanding of quantum  
physics: visualizing quantum entities. *European Journal of Physics*, 20(6):511516,  
1999.
- [82] N. D. Mermin. Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anybody.  
*American Journal of Physics*, 49(10):940973, 1981.
- [83] R. E. Mayer, Ten research-based principles of multimedia learning. In H. F. O’Neil  
und R. S. Perez (Hrsg.), *Web-based learning*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erl-  
baum Associates, 2006.
- [84] R. E. Mayer, *Multimedia learning*, Cambridge University Press, 2001.
- [85] T. Monz, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 130506, 2011.
- [86] A. Müller, W. Kuhn, Elementarisierung und Visualisierung moderner Physik am  
Beispiel der Quantentheorie, in *Vorträge Physikertagung 1994 Hamburg*, Hrsg. K.  
Luchner (Deutsche Physikalische Gesellschaft (Bad Honnef), Fachausschuß Didak-  
tik der Physik) 237-44.
- [87] A. Müller, J. Kuhn, Operationalisierung des Offenheitsgrades am Beispiel authen-  
tischer Aufgaben, in: Pitton, A. (Hrsg.): *Naturwissenschaftlicher Unterricht im in-  
ternationalen Vergleich (GDGP-Tagungsband 2006)*. (Münster, LIT)
- [88] S. Müller, S. Heusler, A. Altland, P. Braun, F. Haake, Periodic-orbit theory of level  
repulsion, *nlin/0906.1960*, *New J. Phys.* 11, 2009.
- [89] S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake. Semiclassical Approach to Chaotic Quan-  
tum Transport, *New J. Phys.* 9, 12, 2007.
- [90] R. Müller and H. Wiesner. Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmecha-  
nik. *Praxis der Naturwissenschaften - Physik*, 38(2):126143, 2000.

- [91] R. Müller and H. Wiesner. Evaluation des Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik. *Ausserschulisches Lernen in Physik und Chemie - Jahrestagung der GDGP*, 23(1):243245, 2003.
- [92] R. Müller, *Quantenphysik in der Schule*. Berlin: Logos Verlag, 2003.
- [93] C. Nerdel, *Die Wirkung von Animation und Simulation auf das Verständnis von stoffwechselfysiologischen Prozessen*, Elektronische Dissertation, Kiel, Universitätsbibliothek
- [94] D. Nawrath *Kontextorientierung - Rekonstruktion einer fachdidaktischen Konzeption für den Physikunterricht*, Dissertation, Universität Oldenburg, 2010.
- [95] N. Nagaosa, (translation from japanese: S. Heusler), *Quantum field theory in condensed Matter Physics*, Kap. 6. Springer 1999.
- [96] V. Nordmeier, *Akustik mit der Soundkarte*, *Unterricht Physik*, 13/69 S.34 (136),
- [97] Z. Y. Ou and L. Mandel. Violation of Bells inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. *Physical Review Letters*, 61(1):5053, 1988.
- [98] J. W. Pellegrino, D. Hickey, A. Heath, K. Rewey, N.J. Vye, CTGV, *Assessing the outcomes of an innovative instructional program: the 1990-1991 implementation of the 'Adventures of Jaspar Woodbury'*, Nashville, TN: Vanderbilt University
- [99] PISA-Konsortium Deutschland (2007), *PISA 2006 - Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie*, Waxmann: Münster
- [100] Paivio, *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford university Press, 1986.
- [101] M. Planck. *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum*. *Verhandlungen der Deutsche Physikalische Gesellschaft*, 2(17):237245, 1900.
- [102] G. Pospiech. *Quantenphysik und Weltbild*. Leuchtturm Verlag, Alsbach, 1998.
- [103] G. Pospiech. *Teaching the EPR-Paradox at High School?*, *Physics Education*, 34, Heft 5, S. 311-316, 1999.
- [104] Qutools. *Entanglement demonstrator*. <http://www.qutools.de>, Schellingstrasse 4, 80799 München, Germany, 2008.
- [105] E. Rehwald, *Der elektrische Widerstand in Modell und Experiment in der klassischen und Quantenphysik*, Examensarbeit, Universität Münster, 2007.
- [106] A. Redfors and J. Ryder. *University physics students use of models in explanations of phenomena involving interaction between metals and electromagnetic radiation*. *International Journal of Science Education*, 23(12):12831301, 2001.

- [107] J. Sakurai. Modern quantum mechanics. Addison-Wesley Verlag, München, 1985.
- [108] D.H. Sattinger, O.L. Weaver, Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics, Applied Mathematical Science 61, Springer-Verlag, 1993.
- [109] H. Schirp, Neurowissenschaft und Lernen. Was können neurobiologische Forschungsergebnisse zur Weiterentwicklung von Lehr und Lernprozessen beitragen?, Die Deutsche Schule, 3/2003, S. 304ff
- [110] H.J. Schlichting, Sehen lernen - Vom alltäglichen Anblick zum physikalischen Durchblick, Physik Journal 70-74, 2008.
- [111] H.J. Schlichting, Sichtbarkeit jenseits des Lichts, PhyDid 2/2, S. 81-89, 2003.
- [112] H.J. Schlichting, Die Welt jenseits der geschliffenen Gläser. Zur Bedeutung des Sehens in der klassischen Physik, Phydid 1/2, S. 9-18, 2003.
- [113] T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, M. Furst, R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Scheidl, J. Perdigues, Z. Sodnik, C. Kurtsiefer, J. G. Rarity, A. Zeilinger, and H. Weinfurter. Experimental demonstration of free-space decoy-state quantum key distribution over 144 km. Physical Review Letters, 98(1):0105044, 2007.
- [114] E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, erschienen in vier Mitteilungen: Ann. Phys. 79, 361, Ann. Phys. 79, 489, Ann. Phys. 80, 437 und Ann. Phys. 81, 109, 1926.
- [115] M. Schulte, K. Rincke, J. P. Reithammer. Die Resonanz-Tunnelodiode im Praktikum, Didaktik der Physik, Frühjahrstagung Regensburg 2007.
- [116] C. Singh. Student understanding of quantum mechanics. American Journal of Physics, 69(8):885895, 2001.
- [117] U. Sinha, C. Couteau, T. Jennewein, R. Laflamme, G. Weihs, Ruling Out Multi-Order Interference in Quantum Mechanics, Science Vol. 329 no. 5990 pp. 418-421, 2010.
- [118] B. F. Skinner, The science of learning and the art of teaching, in Lumsdaine, Glaser, Teaching machines and programmes learning, p. 99-113, Washington, D.C., National Education Association of the Unites States, 1954.
- [119] Skomski, R., Simple models of Magnetism, Oxford Graduate Texts, 2008.
- [120] Schnotz, W. An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Hrsg.): The Cambridge handbook of multimedia learning. S. 49-67. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [121] Schnotz, W., Bannert, M. Construction and interference in learning from multiple representation. Learning and instruction, 13, 141-156

- [122] Sweller, J. Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. E. Mayer (Hrsg.): The Cambridge handbook of multimedia learning. S. 49-67. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [123] TeachSpin. Quantum analogs: Acoustic experiments modeling quantum phenomena. <http://www.teachspin.com>, TeachSpin, Inc., Tri-Main Center - 2495 Main Street Buffalo, NY, USA, 2008.
- [124] J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck. Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory. American Journal of Physics, 72(9):12101219, 2004.
- [125] R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther, and A. Zeilinger. Communications: Quantum teleportation across the Danube. Nature, 430(7002):849, 2004.
- [126] Van Ackeren, K. Klemm, F. Sprütten, M. Weegen, Die Naturwissenschaften in Deutschlands Schulen und Hochschulen, Online-Veröffentlichung, Universität Duisburg-Essen
- [127] F. Vester, Denken, Lernen, Vergessen: Was geht in unserem Kopf vor, wie lernt das Gehirn, und wann lässt es uns im Stich?, dtv Wissen, 1998.
- [128] Visual Molecular Dynamics, Theoretical and Computational Biophysics Group, <http://www.ks.uiuc.edu/Research/vmd/>, <http://www.chem.arizona.edu/salzmanr/orbitals.html>
- [129] A. Voßkühler, V. Nordmeier, SOUNDS - Akustik mit der Soundkarte, Lehren und Lernen mit neuen Medien, LIT-Verlag S. 102-104, 2006.
- [130] A. Voßkühler, V. Nordmeier, Abstrakt vs. Foto vs. Fotorealistisch, Phydid B, Frühjahrstagung Hannover, 2010.
- [131] Wagner, M. (Redaktion) Impulse Physik, Klett-Verlag Stuttgart, 2009.
- [132] D. Waltner, S. Heusler, J.D. Urbina, K. Richter, (2009). The semiclassical origin of curvature effects in universal spectral statistics, J. Phys. A: Math. Theor. 42 29, 2001.
- [133] T. Weber, L. Schön, Zur Didaktik der Physik und Chemie 22, S. 351-353, Alsbach:Leuchtturm, 2001.
- [134] H. Wiesner, R. Müller, Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik in der aktuellen Fassung ist auf folgender Seite zu finden: <http://homepages.physik.uni-muenchen.de/>
- [135] F. A. Wolf. Dr. Quantum explains quantum physics - the double-slit experiment. <http://www.youtube.com/>, YouTube, 901 Cherry Avenue, San Bruno, CA, USA, 2008.

- [136] W. K. Wootters and W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802803, 1982.
- [137] A. Zeilinger. *Einsteins Spuk*. Bertelsmann Verlag, Bielefeld, 2005.
- [138] A. Zeilinger. The message of the quantum. *Nature*, 438(7069):743, 2005.
- [139] K. Zyczkowski, I. Bengtsson, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, 2006.

### **Bildnachweis**

Abb. 1.1, H. J. Schlichting (Institut für Didaktik der Physik, Universität Münster).

Abb. 3.2 (links), Abb. 3.7 (links), M. Schott (bvk), erstellt im QuantumLab ([www.quantumlab.de](http://www.quantumlab.de)) am Institut für Didaktik der Physik der Universität Erlangen.

Abb. 3.10 (links), M. Schott (bvk), erstellt bei Dreharbeiten zum Spielfilm *Schattenwelten*.

Abb. 3.11, Schachbrett-Konstruktion und Fotos von M. Olef.

Abb. 4.1, Abb. 4.3, Abb. 4.4 - 4.7, Abb. 7.7 - 7.9, Daniel Terstegge.

Abb. 7.12, Wikipedia <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Baryon-decuplet.svg>, (Zugriff am 9.3.2011).

Abb. 7.14, Musik und Notenbild: G. Schwellenbach.

Alle anderen Bilder wurden vom Autor in Zusammenarbeit mit Michael Tewiele erstellt.

# Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Joachim Schlichting und allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am Institut für Didaktik der Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster für die freundliche Unterstützung bei der Realisierung dieser Habilitationsschrift. Besonders bedanke ich mich bei meiner Frau, Annette Lorke, für die aktive Mitarbeit während des gesamten Quantenmechanik-Projektes. Michael Tewiele möchte ich meinen herzlichen Dank aussprechen, weil er trotz des unvorhergesehenen Endes der Finanzierung weiter an das Projekt geglaubt und tatkräftig mitgewirkt hat. Daniel Terstegge danke ich für die gute Zusammenarbeit bei den Computeranimationen. Ich bedanke mich bei Herrn Wagner vom Ernst Klett Verlag für die vertrauensvolle Zusammenarbeit und bei Prof. Dr. Fritz Haake für das Gegenlesen des Manuskriptes. Schließlich danke ich den Familien Heusler und Lorke für die wirkungsvolle Hilfe. Bei der praktischen Umsetzung des Filmprojektes und der DVD-ROM war eine Vielzahl von sichtbaren und unsichtbaren Helfern aktiv, denen ich zum Schluss meinen Dank aussprechen möchte.

Münster, im Juli 2013

Stefan Heusler