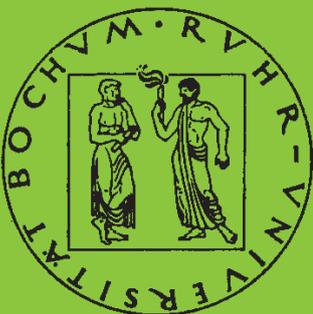


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Ndzi C. Bongmba

**Ein finites anisotropes Materialmodell
auf der Basis der Hencky-Dehnung und
der logarithmischen Rate zur
Beschreibung duktiler Schädigung**

Heft Nr. 127



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ndzi C. Bongmba

Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der
Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur
Beschreibung duktiler Schädigung

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 127

MAI 2001

Herausgeber:
Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-01-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2001 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Für meine Eltern
For my parents

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein dreidimensionales anisotropes Schädigungsmodell vorgestellt. Als Basis wird der Rahmen für finite Elastoplastizität von Xiao, Bruhns & Meyers verwendet. Für die Arbeit spielt eine doppelte Interpretation des Schädigungsparameters eine entscheidende Rolle. Für die thermodynamischen Betrachtungen wird der Schädigungsparameter als eine interne Zustandsvariable betrachtet. Zur Modellierung der schädigungsinduzierten Anisotropie wird er als ein sich mit der Deformation entwickelnder Struktur- oder Materialtensor interpretiert. Schädigungsmodellierung reduziert sich damit auf die Formulierung von Evolutionsgleichungen, die Festlegung von Versagenskriterien und die Bestimmung von Materialkonstanten. Ausgangspunkt für die numerische Umsetzung des Materialmodells ist die Ratenform des Prinzips der virtuellen Arbeit. Die Materialmoduli zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix werden für isotropes Verhalten in geschlossener Form angegeben. Die Integration der konstitutiven Gesetze erfolgt mit der operator-split Methode und kinematisch konsistent. Anhand von Testbeispielen mit elastischem und elastoplastischem Materialverhalten ohne und mit Schädigung wird die Eignung des Stoffgesetzes zur Beschreibung von großer Formänderung und Schädigung und die gute Übereinstimmung mit Ergebnissen aus der Literatur gezeigt.

Summary

A phenomenological model for describing elastoplastic material behavior with anisotropic damage is presented. The finite elastoplasticity framework used is that recently developed by Xiao, Bruhns & Meyers. A second order, symmetric and positive semi-definite tensor is used as damage parameter and the model is based on a new interpretation of this parameter as an evolving structural tensor. Using the representation theorem for isotropic tensor functions, general expressions for the complementary hyperelastic potential and a Hill type flow condition are derived. This yield condition is capable of capturing most of the salient effects of damage on plastic material behavior. The material parameters of this yield criterion are chosen such that for the case of isotropic damage it corresponds to the Gurson flow potential. For the numerical implementation of the model, a closed form expression for the material moduli needed for computing the stiffness matrix is given. The operator split method is used to integrate the constitutive equations and this integration is kinematically consistent in the sense that all quantities related to the multiplicative decomposition of the deformation gradient are uniquely determined. The performance of the model and its ability to effectively model damage is demonstrated with numerical simulations.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1996–2001 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns für die Gelegenheit, für die Anregung zu der Arbeit und seine Unterstützung bei ihrer Anfertigung. Herrn Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl gilt mein herzlicher Dank für die Übernahme des Koreferats und seine hilfreichen Bemerkungen.

Bei Dr. H. Xiao, Dr.-Ing. A. Meyers und Dipl.-Ing. H. Schütte möchte ich mich recht herzlich für die Sonderabdrucke, die fruchtbaren Diskussionen und wertvollen Anregungen zu der Arbeit und meiner Tätigkeit bedanken.

Schließlich möchte ich mich beim Dipl.-Ing. M. Heiderich – hier stellvertretend für alle anderen – für die Korrekturdurchsicht und bei allen anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik für die freundliche Unterstützung bedanken

Bochum, im Mai 2001

N.C.B.

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Otto-T. Bruhns
Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Tag der Einreichung: 17.01.2001
Tag der mündlichen Prüfung: 11.05.2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Notation	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Klassische Schädigungsmodelle	8
1.2.1	Modell von Kachanov (1958)	9
1.2.2	Modell von Gurson (1977)	14
1.3	Stand der Forschung	16
1.4	Ziel der Arbeit	23
1.5	Aufbau der Arbeit	24
1.6	Notation	25
2	Kinematische Grundlagen	29
2.1	Beobachter und Bezugssystem	29
2.2	Körper, Konfiguration und Deformation	31
2.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung	34
2.4	Deformationsgradient	35
2.5	Objektivität	36
2.6	Polarzerlegung und Spektralzerlegung	37
2.7	Dehnungstensoren	40
2.8	Zerlegung der finiten Deformation	45
2.9	Geschwindigkeitsgradient	47
2.10	Log-Spin und Log-Rate	50
3	Bilanzgleichungen und Spannungstensoren	56
3.1	Einleitung	56
3.2	Massenbilanz	57
3.3	Impulsbilanz	57
3.4	Drehimpulsbilanz	58
3.5	Bewegungsgleichungen	59

3.6	Spannungstensoren	60
3.6.1	Lagrangesche Form der Feldgleichungen	62
3.6.2	Spannungsraten	63
3.7	Schwache Form des Impulssatzes	66
3.8	Ratenform der schwachen Form des Impulssatzes	68
3.9	Mechanische Energiebilanz	69
3.10	Konjugierte Spannungsanalyse	70
4	Thermodynamische Grundlagen	77
4.1	Einleitung	77
4.2	Energiebilanz	79
4.3	Entropieungleichung	81
4.4	Clausius-Duhem-Ungleichung	82
4.5	Zerlegung der Spannungsleistung	83
4.6	Thermodynamischer Prozeß	84
4.7	Konstitutive Annahmen – Dehnungsraum	85
4.8	Konstitutive Annahmen – Spannungsraum	87
5	Schädigungsmechanik	90
5.1	Einleitung	90
5.2	Effektivspannungskonzept	91
5.3	Effektivverzerrungskonzept	93
5.4	Energieäquivalenzkonzept	95
5.5	Isotropes Schädigungsmodell	96
5.6	Anisotrope Schädigungsmodelle	99
5.6.1	Modelle nach Murakami (1988)	100
5.6.2	Modelle nach Cordebois & Sidoroff (1979)	103
5.7	Nachgiebigkeitstensor als Schädigungsvariable	107
6	Materialmodell – Elastisches Verhalten	109
6.1	Einleitung	109
6.2	Schädigungsvariable	111
6.2.1	Spektralzerlegung des Schädigungstensors	114
6.2.2	Aktive/passive Schädigung	115
6.3	Komplementäres hyperelastisches Potential	117
6.4	Ratenformulierung des elastischen Gesetzes	123

7	Materialmodell – Plastisches Verhalten	127
7.1	Einleitung	127
7.2	Fließbedingung	128
7.2.1	Anpassung an Gurson (1977)	132
7.2.2	Graphische Darstellung der Fließfunktion	137
7.3	Be- und Entlastungsbedingung	141
7.4	Fließregel	143
7.5	Evolutionsgleichungen	145
7.5.1	Verfestigungsvariablen	145
7.5.2	Schädigungstensor	146
7.6	Konsistenzbedingung	148
7.7	Thermodynamische Konsistenz	149
8	Numerische Umsetzung und Beispiele	152
8.1	Einleitung	152
8.2	Operator-Split-Methode	153
8.2.1	Elastischer Prediktor-Zustand	155
8.2.2	Be- und Entlastungsbedingung	159
8.2.3	Der Return-Mapping-Algorithmus	160
8.2.4	Bestimmung der Zwischenkonfiguration	163
8.3	Konsistenter Tangentenmodul	164
8.4	Numerische Beispiele	166
8.4.1	Elastische Beispiele	166
8.4.2	Elastoplastische Beispiele mit und ohne Schädigung	174
9	Zusammenfassung und Ausblick	183
A	Log-Spin und Log-Rate	187
B	Kinematische Konsistenz und Objektivität	194
B.1	Kinematische Konsistenz	194
B.2	Objektivität im allgemeinen Sinne	197
C	Symmetrieeigenschaften von \mathbf{G}	199
D	Liste der verwendeten Symbole	200
	Literaturverzeichnis	203

Kapitel 1

Einführung und Notation

1.1 Einleitung

Strukturen und Konstruktionen, die ständig einer mechanischen, thermischen und/oder chemischen Belastung unterliegen, versagen nach einer bestimmten Zeit. Durch die Belastung tritt eine von der Belastung, den Materialeigenschaften und der Zeit abhängige Abnahme der Tragfähigkeit der Struktur ein, die mit dem Versagen der Struktur endet. Die Abnahme der Tragfähigkeit wird Schädigung, Deterioration oder Damage genannt. In experimentellen Untersuchungen hat man festgestellt, daß die Abnahme der Tragfähigkeit durch die Entstehung und Ausbreitung von Mikrodefekten, wie z. B.

- Mikroporen,
- Mikrorissen und
- Mikroscherbändern

auf der Mikroebene, verursacht wird. Diese Mikrodefekte entstehen an Schwachstellen wie z. B. Korngrenzen, Leerstellen, eingeschlossenen Partikeln, Hindernissen gegen die Bewegung von Versetzungen oder schon vorhandenen Mikrodefekten (Lemaitre & Chaboche 1990, Kapitel 1). Die Entstehung und das Wachstum von Poren und anderen Mikrodefekten während eines Schädigungsvorgangs sind anisotrope Phänomene, da diese entscheidend von der Richtung der aufgebrachten Spannungen oder Dehnungen abhängen. Experimentelle Ergebnisse von Leckie & Hayhurst (1974) zeigen, daß in Polykristallen die Mikrodefekte, obwohl sie makroskopisch gesehen homogen verteilt sind, überwiegend nur an Korngrenzen

entstehen, und zwar an den Korngrenzen, die senkrecht zur Hauptspannungsrichtung stehen, siehe Abbildung 1.1. Abgesehen also von dem ein-

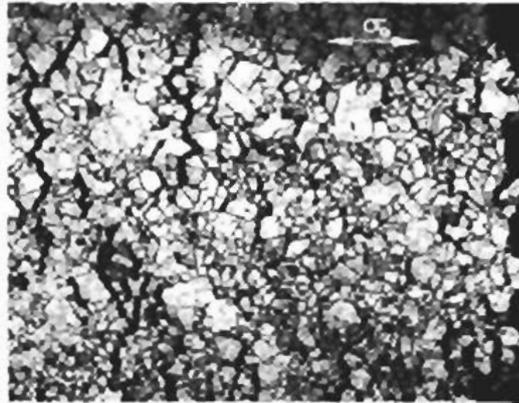


Abbildung 1.1: Entstehung von Mikrorissen senkrecht zur Hauptspannungsrichtung. Ausschnitt einer Kupferprobe aus Hayhurst (1972, Seite 382)

fachen aber nicht trivialen Sonderfall, wo das Material anfänglich isotrop und die entstehenden Mikrodefekte Poren sind, ist jedes geschädigte Material anisotrop. Makroskopisch machen sich diese Defekte bemerkbar in der Veränderung des Elastizitätsmoduls, des elektrischen Widerstandes, der Kriechrate, der Fließgrenze oder -spannung, der Zugfestigkeit, der Ermüdungszeit, der Kriechbruchzeit, der Dichte, der magnetischen Permeabilität, der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, der akustischen Emission und vielen anderen makroskopischen Eigenschaften. Die Betrachtungen in dieser Arbeit beschränken sich auf die Veränderungen der mechanischen Eigenschaften und auf mechanische Einwirkungen.

Wird z. B. im einachsigen Zugversuch bei einem schädigungsanfälligen Material an verschiedenen Stellen ent- und wiederbelastet, stellt man fest, daß die Steigung der elastischen Gerade sich mit zunehmender Deformation verringert, siehe Abbildung 1.2. Der Elastizitätsmodul bzw. Elastizitätstensor des Materials ist im Falle von Schädigung nicht mehr konstant, er verringert sich mit zunehmender inelastischer Deformation und hängt damit entscheidend vom Mikrodefektzustand ab. Die Messung der Schädigung kann entweder auf der Makroebene geschehen, indem man die Veränderungen der oben genannten Makroeigenschaften mißt, siehe Lemaitre & Chaboche (1990), oder auf der Mikroebene, wo man die Anzahl, Länge, Geometrie, Anordnung und Orientierung der Mikrodefekte

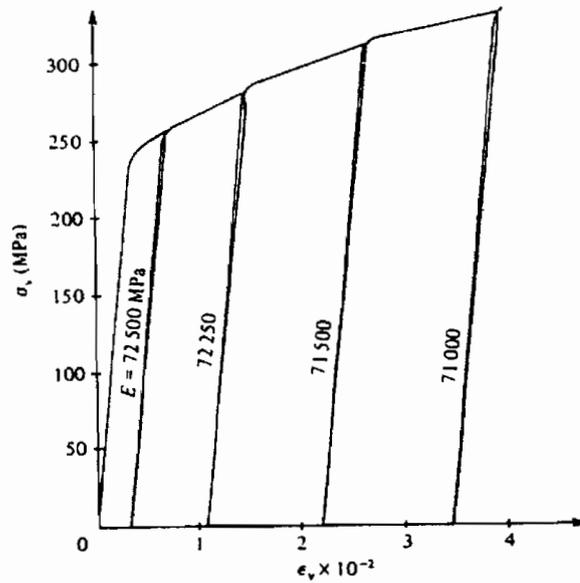


Abbildung 1.2: Abnahme des Elastizitätsmoduls mit zunehmender plastischer Formänderung. Aus Lemaitre & Chaboche (1990, Seite 165)

mißt, siehe die Arbeit von Feldmüller (1991).

Da der Schädigungsprozeß auf der Entstehung, dem Wachstum und der Vereinigung von Mikrodefekten beruht, unterscheidet er sich grundsätzlich vom rein plastischen Materialverhalten, das durch die irreversible Bewegung von Versetzungen hervorgerufen wird (Krajcinovic 1983). Im Gegensatz zur Schädigung hat die reine plastische Formänderung keinen Einfluß auf die makroskopischen elastischen Eigenschaften eines Materials. Bei der phänomenologischen Modellierung von plastischem Materialverhalten wird deshalb von Abbildung 1.3(a) ausgegangen. Es wird angenommen, daß die Ent- und Wiederbelastung nach plastischem Materialverhalten entlang der ursprünglichen elastischen Gerade erfolgt. Die irreversible Bewegung der Versetzung läßt sich anhand der plastischen Dehnung ε^p messen und bei der Plastizität gilt es, diese Größe so gut wie möglich wiederzugeben. Für Elastoplastizität mit Schädigung kommen zu den plastischen Dehnungen die in der Abbildung 1.3(b) dargestellte Änderung des Elastizitätsmoduls von E^0 auf E , die schädigungsinduzierten inelastischen Dehnungen und die Abnahme der Fließgrenze als zusätzliche Phänomene dazu; Ziel ist bei einer Modellierung diese Phänomene wiederzugeben. Schädigung unterscheidet sich auch vom rein plastischen Materialverhalten dadurch, daß die bei Schädigungsprozessen auftreten-

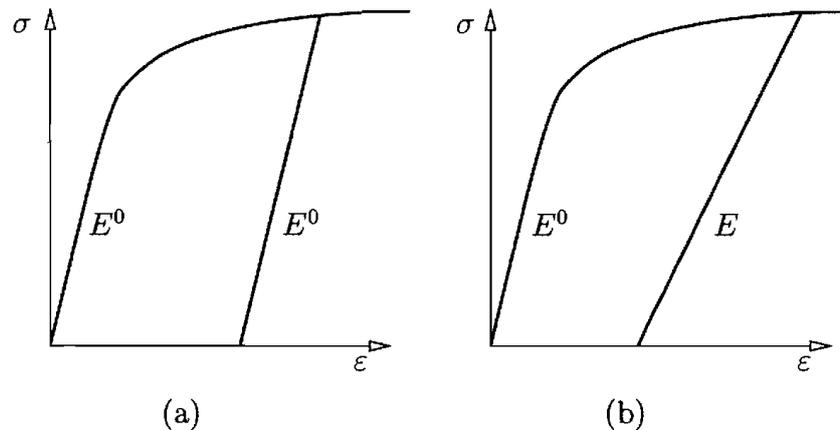


Abbildung 1.3: (a) Plastische Deformation und (b) Schädigung und plastische Deformation. In beiden Fällen handelt es sich um ein Metal wie z. B. Kupfer oder Aluminium

den inelastischen Deformationen immer mit einer Volumendilatation oder Dichteänderung verbunden sind, siehe Rabier (1989). Die irreversible Bewegung von Versetzungen erfolgt dagegen näherungsweise dilatationsfrei; in der klassischen Plastizitätstheorie wird deswegen davon ausgegangen, daß die plastischen Formänderungen ohne Volumenänderung stattfinden.

Zur Berechnung der Zeit bis zum Versagen, Lebensdauer oder Restlebensdauer einer Struktur oder Konstruktion, wird eine Gesetzmäßigkeit für die Entstehung und das Wachstum von Mikrodefekten – Ursache für die Deterioration – sowie den Einfluß der Mikrodefekte auf die Materialkonstanten benötigt. Da man bei den klassischen Feldtheorien – Elastizitätstheorie und Plastizitätstheorie – davon ausgeht, daß sich die elastischen Materialkonstanten und -symmetrien nicht ändern, und da die Bruchmechanik sich nur mit Makrodefekten beschäftigt, können zur Lebensdauerprognose die klassischen Feldtheorien nicht direkt eingesetzt werden.

Die Aufstellung der Gesetzmäßigkeiten über die Entstehung, das Wachstum und die Ausbreitung von Mikrodefekten kann entweder auf der Mikro-, Meso- und oder Makroebene erfolgen, siehe Tabelle 1.1. Theorien auf der Mikroebene oder auf atomarem Niveau, die das Verhalten des Materials aus der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilchen zu erklären versuchen, werden Atomare Modelle genannt und eignen sich (bis jetzt) nicht für große Strukturberechnungen.

Theorien, die auf der Mikroebene und Mesoebene die Methoden und Prinzipien der Mechanik und Bruchmechanik in Kombination mit ver-

Ebene	Strukturelemente	Defekte	Wissenschaftsdiziplin
Mikro	Atome, Ketten, Moleküle	Leerstellen, Stapelfehler, Versetzungen, Zwischengitteratome	Physik, Werkstoffwissenschaft
Meso	Körner	Mikroporen, -risse, Gleitungen	Mikromechanik
Makro	Proben	Makroporen, Makroporenrisse, Scherbänder, Löcher	Kontinuumsmechanik, Bruchmechanik

Tabelle 1.1: Materialdefekte und Modellierungsebenen

schiedenen Homogenisierungsmethoden zur Bestimmung der makroskopischen Effektivmaterialparameter verwenden, werden mikromechanische Theorien oder Modelle genannt, siehe z. B. Hill (1965), Budiansky (1965, 1970), Budiansky & O’Connel (1976), Horii & Nemat-Nasser (1983) und Kachanov (1992). Der Vorschlag, diese Modelle zur Schädigungsmodellierung zu verwenden, kam von Davison, Stevens & Kipp (1977). Obwohl man für die Formulierung von mikromechanischen Modellen wenige Annahmen benötigt und dadurch eine rationale und konsistente Theorie aufstellen kann, macht die Kompliziertheit bei einer exakten Beschreibung viele dieser Modelle unbrauchbar für ingenieurmäßige Anwendungen (Hansen & Schreyer 1995). Die meisten dieser Modelle werden aber auch ohne Entwicklungsgleichung und Versagenskriterium für die Materialparameter hergeleitet und können deshalb nicht direkt zur Lebensdauerberechnung eingesetzt werden. Sie werden deswegen auch passive oder Nicht-Prozess-Modelle genannt (Krajcinovic 1989, Seite 120). Ein mikromechanisches Modell, das frei von den eben genannten Einschränkungen ist, ist das Modell von Gurson (1977). Auf dieses Modell wird später ausführlich eingegangen. Das Modell gehört zu den weitverbreiteten Modellen zur Schädigungsmodellierung und wird auch im Rahmen dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

Phänomenologische Modelle werden auf der Meso- und Makroebene aufgestellt. Bei einer phänomenologischen Theorie beschäftigt man sich mit der mathematischen Beschreibung des makroskopischen Materialverhaltens, das man aus Experimenten gewinnt; die Entstehung dieses Verhaltens aus den sich auf der Mikroebene abspielenden physikalischen Vorgängen wird in der Regel außer Acht gelassen. Zur Berücksichtigung der Mikrostruktur bzw. Schädigung wird rein phänomenologisch eine inter-

ne Zustandsvariable oder eine endliche Menge von internen Zustandsvariablen eingeführt. Es wird davon ausgegangen, daß das Verhalten nur vom jetzigen Zustand der Mikrostruktur abhängt, und daß dieser Zustand durch die internen Zustandsvariablen ausreichend beschrieben wird, siehe Lehmann (1989), Krajcinovic (1984) und Hult (1987). Die orts- und zeitabhängige interne Zustandsvariable bzw. Schädigungsvariable kann ein Skalar, ein Vektor – für orientierte oder gerichtete Medien oder Materialien (Lubliner 1972, Seite 238) – oder ein Tensor $2n$. Stufe sein.

Phänomenologische Modelle mit einer geeigneten internen Zustandsvariable \mathbf{d} zur Quantifizierung der Mikrodefektdichte und -orientierung, einer entsprechenden Entwicklungsgleichung

$$\overset{\circ}{\mathbf{d}} = \overset{\circ}{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{d}, t, \dots) \quad (1.1)$$

für die Schädigungsvariable und mit einem entsprechenden Versagenskriterium

$$d_c = d_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{d}, t, \dots) \quad (1.2)$$

werden Schädigungsmodelle genannt, siehe Krajcinovic (1989, Seite 120). Unter Versagenskriterium versteht man eine von der Schädigungsvariable und deren Rate abhängige Bedingung, die angibt, ab wann z. B. ein materieller Punkt eines Kontinuums nicht mehr tragfähig ist. Hier bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}$ ein Spannungsmaß, $\boldsymbol{\epsilon}$ ein Verzerrungsmaß, t die Zeit und der übergestellte Kreis eine geeignete objektive Zeitableitung. Das Teilgebiet der Kontinuumsmechanik, das sich mit der Aufstellung von Schädigungsmodellen beschäftigt, wird Kontinuums-Schädigungs-Mechanik (Continuum Damage Mechanics, CDM) genannt, ein Begriff, der offensichtlich zum ersten Mal von Janson & Hult (1977) verwendet wurde. Im folgenden wird die kürzere Bezeichnung Schädigungsmechanik (Damage Mechanics) verwendet. Das Ziel der Schädigungsmechanik ist es, Modelle

- zur Verbesserung von Lebensdauerprognosen von Bauteilen
- und zur Beschreibung des makroskopischen Wachstums von Rissen durch die sogenannte lokale Betrachtungsweise (*local approach to fracture*, siehe Chaboche (1988)) aufzustellen.
- Die Schädigungsmechanik ist auch dann anzuwenden, wenn es ohne Berücksichtigung des Einflusses der Mikrodefekte keine zufriedenstel-

lende Beschreibung des Deformationsverhaltens eines Materials – z. B. bei Beton und Gestein – mehr gegeben ist.

Aufgrund der oben genannten Unterschiede zwischen Plastizität und Schädigung werden zur phänomenologischen Modellierung beider Mechanismen zwei Gruppen von internen Zustandsvariablen benötigt: eine Gruppe mit Variablen, die die mit den irreversiblen Bewegungen der Versetzungen zusammenhängenden Strukturänderungen beschreiben, und eine andere Gruppe mit Variablen, die die Deformation des Materials aufgrund der Entstehung, des Wachstums und der Vereinigung von Mikrodefekten beschreiben.

Prinzipiell können interne Zustandsvariablen willkürlich gewählt werden. Man muß nur beachten, daß die Hauptsätze der Thermodynamik nicht verletzt werden. Die Wahl einer geeigneten Schädigungsvariable, die eine Identifikation und Messung der Schädigung ermöglicht, ist nicht eindeutig. Die Wahl ist skalenabhängig, und die Messung der Schädigung kann erleichtert werden, wenn man eine physikalisch begründete und meßbare interne Zustandsvariable verwendet. Es ist auch hilfreich, wenn eine direkte Verknüpfung zwischen der Schädigungsvariablen und der Veränderung einer makroskopischen Eigenschaft aufgrund der Schädigung existiert. Auf atomarer bzw. molekularer Ebene z. B. wird der Schädigungszustand durch die Anzahl der zerstörten atomaren Bindungen bzw. molekularen Ketten eindeutig bestimmt. Auf Mikroebene hat man den sogenannten Budiansky & O'Connell Parameter (Budiansky & O'Connell 1976) und die Mikroriß-Orientierung. Diese Größen können aber weder direkt gemessen noch beobachtet werden und besitzen keine direkte Verknüpfung zu den makroskopischen Eigenschaften. Dies erschwert die Angabe von Evolutionsgleichungen, so daß trotz der konzeptuellen Anschaulichkeit, die diese Größen anbieten, ihre Verwendung als Schädigungsvariable nicht in Frage kommt.

Das Wachstum und die Vereinigung von Mikrodefekten führt letztendlich zu einem Makrodefekt. Man kann deshalb bei einer Lebensdauerberechnung drei Phasen unterscheiden:

- Mikrodefektentstehungs-,
- Mikrodefektwachstums- und
- Makrodefektphase.

Während man in der Entstehungs- und Wachstumphase der Mikrodefekte nur die Methoden der Schädigungsmechanik zur Verfügung hat, kann man in der Makrodefektphase entweder die Methoden der Schädigungsmechanik weiter verwenden und das Wachstum der Risse durch eine lokale Betrachtungsweise (Chaboche 1988; Lemaitre & Chaboche 1990; Lemaitre 1996) beschreiben und/oder die Methoden der linearen Bruchmechanik verwenden, die sich zur Beschreibung von Bauteilen mit Makrorissen bewährt haben. Nerzak (1997) nennt eine auf der Bruchmechanik basierende Methode, mit der er in seiner Arbeit die Ausbreitung eines Makroscherbandes beschreibt, Fragmentierungstheorie. Wichtig ist bzw. herausgestellt werden soll hier die Tatsache, daß für eine Lebensdauervorhersage ein vernünftiges Schädigungsmodell benötigt wird.

Für sehr spröde Materialien – wie z. B. Beton und Gestein, auch Metalle – kann die Schädigungsmechanik (Berücksichtigung der Änderung der elastischen Eigenschaften aufgrund von Schädigung) allein für eine Lebensdauerberechnung ausreichen (Schütte 2001; Schütte & Bruhns 2001). Für duktile Werkstoffe – wie z. B. Metalle, die große inelastische Formänderungen, bestehend aus rein plastischen und schädigungsinduzierten Anteilen, vor ihrem Versagen erleiden – muß die Schädigungsmechanik in Kombination mit der Plastizitätstheorie (und der Bruchmechanik) angewendet werden. Dafür ist der Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten von großer Bedeutung. Das ist das Hauptanliegen dieser Arbeit. Die Überlegungen beschränken sich auf die Entstehungs- und Wachstumphase und auf metallische Werkstoffe.

1.2 Klassische Schädigungsmodelle

Als klassische Schädigungsmodelle können mittlerweile die Modelle von Kachanov (1958) und von Gurson (1977) bezeichnet werden. Kachanov (1958) hat als erster ein phänomenologisches Schädigungsmodell vorgestellt. Dieses Modell ist ein eindimensionales Modell und ist zur Beschreibung von Kriechverhalten aufgestellt worden. Das Modell von Gurson (1977) ist ein isotropes und dreidimensionales Modell und ist zur Beschreibung von duktiler Schädigung in metallischen Werkstoffen mikro-mechanisch hergeleitet worden.

Diese Modelle, insbesondere das Modell von Kachanov (1958), gelten

als einfach und wohl verstanden, haben breite Zustimmung gefunden und werden oft in der Literatur angewendet. Kachanovs Modell bildet die Basis der Schädigungsmechanik. Das Modell von Gurson (1977) wird in dieser Arbeit eine besondere Rolle spielen, da für das anisotrope Modell, das hier vorgeschlagen wird, das Modell von Gurson (1977) als mikromechanische Basis verwendet wird. Hier werden deshalb kurz diese klassischen Modelle vorgestellt. Das Ziel ist hier auch, die wichtigsten Begriffe einzuführen und die für eine Schädigungsmodellierung benötigten Schritte noch einmal klar herauszustellen.

1.2.1 Modell von Kachanov (1958)

Zur Beschreibung von eindimensionalem Kriechverhalten nach dem Modell von Kachanov (1958) wird eine skalarwertige Feldgröße $\psi(t) \in [0, 1]$, die Kontinuität oder Stetigkeit, eingeführt. Für die Entwicklung von ψ wird die folgende Evolutionsgleichung postuliert:

$$\dot{\psi}(t) = -c \left[\frac{\sigma(t)}{\psi(t)} \right]^m. \quad (1.3)$$

Hier bezeichnet σ die Spannung, c und m sind Materialkonstanten. Für ein ungeschädigtes Material wird $\psi = \psi_0 = 1$ gefordert, und aus (1.3) folgt, daß dieser Wert mit der Belastungsdauer immer mehr abnimmt, bis er beim vollständig durch Mikrodefekte zerstörten Material den Wert $\psi = 0$ annimmt:

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{ungeschädigter Zustand,} \\ 0 & \text{vollständig zerstörtes Material.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Die Stetigkeit ψ stellt demzufolge ein Maß für das Nicht-Vorhandensein von Mikrodefekten in einem Material dar.¹ Die komplementäre Größe $d \in [0, 1]$ zu ψ

$$d = 1 - \psi \quad (1.5)$$

ist die Schädigungsvariable und stellt ein Maß für den Schädigungszustand des Materials dar. Für ein ungeschädigtes Material gilt $d = 0$ und das

¹Zur Notation: Im folgenden wird das Zeitargument t immer weggelassen, falls aus dem Kontext erkennbar ist, daß es sich um eine zeitabhängige Größe handelt.

SPANNUNGS-DEHNUNGS-BEZIEHUNG:	$\dot{\epsilon} = B \hat{\sigma}^n$
EVOLUTIONSGLEICHUNG:	$\dot{d} = c \hat{\sigma}^m$
	$\hat{\sigma} = \sigma(1 - d)^{-1}$
VERSAGENSKRITERIUM:	$d_c = 1$

Tabelle 1.2: Eindimensionales Schädigungsmodell von Kachanov (1958) zur Beschreibung von Kriechen

vollständig durch Mikrodefekte geschädigte Material wird durch $d = 1$ beschrieben:

$$d = \begin{cases} 0 & \text{ungeschädigter Zustand,} \\ 1 & \text{vollständig zerstörtes Material.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Mit der Definitionsgleichung (1.5) für d und durch die Einführung der sogenannten Effektivspannung $\hat{\sigma}$ durch die Beziehung

$$\hat{\sigma} = M_{\sigma} \sigma = \frac{\sigma}{(1 - d)} \quad (1.7)$$

kann die Evolutionsgleichung (1.3) in die Form

$$\dot{d} = c \hat{\sigma}^m \quad (1.8)$$

umgeschrieben werden. Durch Gleichung (1.7) wird auch das sogenannte Schädigungseffektmaß M_{σ} definiert. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung bzw. das Kriechgesetz in der Form (Rabotnov 1969)

$$\dot{\epsilon} = B \hat{\sigma}^n = \bar{B} \sigma^n, \quad \bar{B} = B(1 - d)^{-n}, \quad (1.9)$$

wobei $\dot{\epsilon}$ die Kriechrate bezeichnet, vervollständigt das Modell von Kachanov (1958). B und n sind Materialparameter. Dieses Modell ist in der Tabelle 1.2 zusammengefaßt.

Nimmt man B als eine Materialkonstante des ungeschädigten Materials und \bar{B} als eine des geschädigten Materials an, dann gibt Gleichung (1.9)₂ die Veränderung der Kriecheigenschaften aufgrund der Schädigung an. Gleichung (1.9) besagt, daß die Verzerrungsrate eines ungeschädigten Materials, das mit der effektiven Spannung $\hat{\sigma}$ belastet wird, gleich der eines geschädigten Materials ist, das unter der Spannung σ steht. Dies ist die sogenannte Hypothese der Verzerrungsäquivalenz.

Unter der Annahme einer konstanten Spannung σ_0 (Kriechbedingungen) kann man die Evolutionsgleichung (1.3) für die Kontinuität ψ bzw.

(1.8) für die Schädigungsvariable d direkt integrieren (Jansson & Stigh 1985). Aus (1.3) folgt

$$\psi^{m+1}(t) - \psi^{m+1}(t_0) = (m+1)c\sigma_0^m(t_0 - t) \quad (1.10)$$

und mit dem Versagenskriterium (1.4) erhält man die Lebensdauer t_c und die Dehnung ε_c kurz vor dem Versagen zu

$$t_c = [c(m+1)\sigma_0^m]^{-1}, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon_c = \frac{B \cdot \sigma_0^{(n-m)}}{c \cdot (m+1-n)} \quad (1.12)$$

für $(m+1-n) \neq 0$. Für verschiedene Werte von σ_0 können Versuche durchgeführt werden und anschließend die Formeln (1.11) und (1.12) angepaßt werden, d. h. die Materialparameter B , c , m und n bestimmt werden. Man beachte aber, daß im allgemeinen die Materialkonstanten temperatur- und belastungsabhängig sind. Außerdem treten im allgemeinen eindimensionale Lastzustände oder Bedingungen nur selten auf, und es ist immer mit Belastungsschwankungen zu rechnen. Die Formel (1.11) bzw. das Modell von Kachanov stellt demzufolge nur eine erste Näherung dar. Aus den bisherigen Betrachtungen und Tabelle 1.2 wird klar, daß man für ein Schädigungsmodell

- eine geeignete Schädigungsvariable,
- eine Evolutionsgleichung für die Variable,
- ein Konstitutivgesetz – Spannungs-Dehnungs-Beziehung – und
- ein Versagenskriterium angeben muß.

Zur Bestimmung der Veränderung der elastischen Stoffeigenschaften aufgrund der Schädigung wird der in Abbildung 1.4 dargestellte einachsige Zugversuch an einem Stab der Länge 1 betrachtet. Die Entwicklung von Mikrodefekten führt zu einer Abnahme der lasttragenden Fläche. Die gesamte Querschnittsfläche der Probe wird mit A bezeichnet und der von den Mikroporen eingenommene Anteil der Fläche mit A_v . Die noch tragende Fläche wird mit A_m gekennzeichnet. Nach Rabotnov (1969) wird

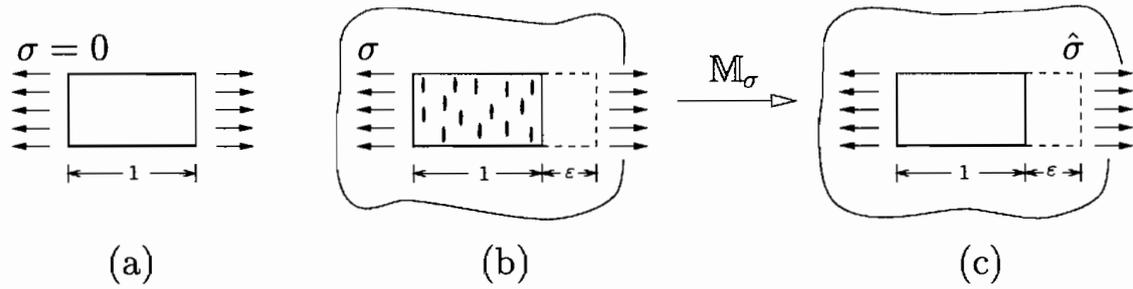


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung des Effektivspannungskonzeptes. (a) isotroper Ausgangszustand (b) geschädigter Zustand (c) fiktiver, ungeschädigter Zustand

die Schädigungsvariable d als das Verhältnis von dem von den Mikroporen eingenommenen Anteil der Fläche zur Gesamtquerschnittsfläche gedeutet:

$$d = \frac{A_v}{A} = 1 - \frac{A_m}{A}. \quad (1.13)$$

Die Schädigungsvariable bekommt dadurch eine physikalische Bedeutung und stellt den Porenflächenanteil dar. Im allgemeinen Fall der anisotropen Schädigung bestehend aus Mikroporen und Mikrorissen hängt dieses Maß aber von dem Normalenvektor zur Fläche ab. Die Spannung ergibt sich aus der Kraft F geteilt durch die Fläche A :

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (1.14)$$

Da durch die Schädigung die lasttragende Fläche nur noch A_m beträgt, wird

$$\hat{\sigma} = \frac{F}{A_m} \quad (1.15)$$

als die Effektivspannung definiert. Damit und unter Berücksichtigung von Gleichung (1.13) erhält man wieder die Definitionsgleichung (1.7) für die Effektivspannung.

Hier wird, wie in der Abbildung 1.4(b) und (c) schematisch dargestellt, angenommen, daß die Effektivspannung $\hat{\sigma}$ in einem ungeschädigten Material die gleichen Dehnungen ϵ bewirken würde wie die Spannung σ im geschädigten Material. Diese Annahme ist als Hypothese der Verzerungsäquivalenz bekannt und in dieser Form von Lemaitre & Chaboche (1978, 1990) eingeführt worden. Formelmäßig lautet die Hypothese der

Verzerrungsäquivalenz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\hat{\sigma}}{E^0}. \quad (1.16)$$

Hier bezeichnet E bzw. E^0 den Elastizitätsmodul des geschädigten bzw. ungeschädigten Materials. Mit dieser Hypothese und aus der Definitionsgleichung (1.7) für die Effektivspannung $\hat{\sigma}$ folgt

$$E = (1 - d)E^0 \Rightarrow E \leq E^0, \quad (1.17)$$

und

$$d = 1 - \frac{E}{E^0}. \quad (1.18)$$

Man erhält demnach den Elastizitätsmodul des geschädigten Materials als kleiner gleich dem Elastizitätsmodul des jungfräulichen Materials. Thermodynamisch bedeutet das, daß man für die gleiche Verzerrung im ungeschädigten Material mehr Energie aufwenden muß als im geschädigten Material. Mit Gleichung (1.17) kann durch Messung des Elastizitätsmoduls die Schädigungsvariable berechnet werden. Die Tatsache, daß die Schädigung zu einer Verminderung der Lastragfähigkeit des Materials führt, kann also durch dieses Modell wiedergegeben werden. Aus Gleichung (1.17) ist erkennbar, daß das Effektivspannungskonzept und die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz eine Bestimmung der mechanischen Eigenschaften des geschädigten Materials aus den Konstanten des ungeschädigten Materials und der Schädigungsvariable ermöglichen.

Klassische Schadensakkumulationsregeln, wie z. B. die Pamlgren-Miner-Regel, lassen sich auf die Grundidee von Kachanov (1958) zurückführen. Diese Modelle sind aufgrund ihres einfachen Konzeptes und der einfachen mathematischen Handhabung sehr beliebt und werden auch oft zur Lebensdauerprognose angewendet. Die mit diesen Regeln erzielten Lebensdauerprognosen sind bei schwacher Lastschwankung zufriedenstellend. Bei starken Lastschwankungen weichen die Ergebnisse aber stark von den gemessenen ab. Ein entscheidender Nachteil der Schadensakkumulationsregeln ist aber der, daß diese eine *a posteriori* Definition der Schädigung verwenden. Für die Anwendung eines Versagenskriteriums in der Form von (1.4) oder (1.6) muß die Anzahl der Umdrehungen bzw. die Zeit bis zum Versagen bei einer bestimmten Laststufe bekannt sein. Dies bedeutet aufwendige Versuche auf allen möglichen Laststufen.

1.2.2 Modell von Gurson (1977)

Unabhängig vom Modell von Kachanov (1958) wurde von Gurson (1977) ein dreidimensionales, isotropes und mikromechanisch hergeleitetes Schädigungsmodell vorgestellt. Das Modell verwendet den Porenvolumenanteil f als Parameter und beschreibt den Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten:

$$f = \frac{V_v}{V}, \quad (1.19)$$

wobei V_v den Volumenanteil der Poren bezeichnet und V das Volumen des repräsentativen Volumenelementes (RVE). Im einzelnen besteht Gursons Modell aus den folgenden vier Kernkomponenten:

- Fließbedingung,
- assoziierte Fließregel,
- Evolutionsgleichung für den Porenvolumenanteil und
- Versagenskriterium.

Die erste Komponente des Modells, das Fließpotential, wird wie folgt hergeleitet: als RVE verwendet man eine Zelle, die aus einer zylindrischen oder kugelförmigen Pore im Zentrum der Zelle besteht und von einem Matrixmaterial umgeben ist. Das Matrixmaterial besitzt die gleiche geometrische Form wie die Pore und wird als starr-ideal plastisch angenommen. Desweiteren wird das Matrixmaterial als inkompressibel betrachtet und zur Beschreibung seines Fließverhaltens die von Misesschen Gleichungen bzw. Fließbedingung verwendet:

$$F_M = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \sigma_M^2. \quad (1.20)$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchyschen Spannungstensor, $\boldsymbol{\sigma}'$ dessen Deviator und σ_M die Fließspannung des Matrixmaterials. Es wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Für das mikroskopische Geschwindigkeitsfeld wird eine Näherung angenommen, die der Pore eine Volumenänderung gestattet, aber die Inkompressibilität des Matrixmaterials nicht verletzt. Das Geschwindigkeitsfeld wird auch so aufgestellt, daß die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt werden, und die kinematischen Randbedingungen auf

der Oberfläche der Zelle, die die makroskopischen Deformationsgeschwindigkeiten darstellen, eingehalten werden. Die Ungleichung des Satzes von der oberen Schranke der Plastizitätstheorie wird dann verwendet, um die obere Grenze der makroskopischen Spannungen zu berechnen, die für das Aufrechterhalten weiteren Materialfließens benötigt werden. Für eine vorgegebene Porengeometrie (Größe, Gestalt und Verteilung) und für verschiedene makroskopische Geschwindigkeitsfelder wird aus den berechneten makroskopischen Spannungen eine Spannungskurve konstruiert, die eine obere Grenze für die Fließkurve für die Einheitszelle darstellt:

$$F = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + 2 f \sigma_M^2 \cosh \left[\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right] - \sigma_M^2 [1 + f^2]. \quad (1.21)$$

Da bei der Herleitung von (1.21) InkompRESSIBILITÄT und von Misessches Fließverhalten für das Matrixmaterial angenommen wird, geht sie für $f = 0$ auf die Fließbedingung (1.20) zurück.

Die zweite Komponente des Modells ergibt sich aus der Tatsache, daß die Normalenregel bei der Homogenisierung ihre Gültigkeit beibehält. Für die Verzerrungsgeschwindigkeit gilt demzufolge

$$\dot{\epsilon} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad (1.22)$$

wobei λ den plastischen Multiplikator bezeichnet. Er wird aus der zusätzlichen Annahme bestimmt, daß die Arbeitsraten der mikroskopischen und der makroskopischen Spannungen gleich sind:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (1 - f) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^v, \quad (1.23)$$

wobei hier $\dot{\epsilon}_M^v$ die mikroskopische Vergleichsdehnungsrate bezeichnet. Damit liegt die Verzerrungsgeschwindigkeit fest, wenn die einachsige Spannung-Dehnungs-Beziehung ($\dot{\epsilon}_M^v$ als eine Funktion von $\dot{\sigma}_M$) des ungeschädigten Materials vorgegeben ist.

Die Evolutionsgleichung

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk} \quad (1.24)$$

für den Porenvolumenanteil f folgt aus der InkompRESSIBILITÄT des Matrixmaterials und vervollständigt das Modell von Gurson. Es ist in der Tabelle **1.3** zusammengestellt. Man beachte, daß die Interpretation der Schädigungsvariable als Porenvolumenanteil nur für die Anfangsphase der

FLIESSFUNKTION:	$F = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + 2 f \sigma_M^2 \cosh \left[\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M} \right] - \sigma_M^2 [1 + f^2]$
FLIESSREGEL:	$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$
	$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = (1 - f) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^v$
EVOLUTIONSGLEICHUNG:	$\dot{f} = (1 - f) \dot{\epsilon}_{kk}$
VERSAGENSKRITERIUM:	$f_c = 1$

Tabelle 1.3: Isotropes dreidimensionales Schädigungsmodell von Gurson (1977) für ein starr-plastisches Material

Deformation zutreffend ist. Außerdem wird das Material mit zunehmender Deformation und Schädigung anisotrop und die Annahme der elastischen und plastischen Isotropie stellt nur eine erste Näherung dar.

1.3 Stand der Forschung

Die Schädigungsmechanik gehört derzeit zu den aktivsten Forschungsgebieten der Kontinuumsmechanik, und es existiert eine Vielzahl von Literatur und Lehrbüchern über Schädigungsmodellierung. Hier seien nur die Bücher von Krajcinovic & Lemaitre (1987), Lemaitre & Chaboche (1990), Lemaitre (1996) und Krajcinovic (1996) genannt.

Es existiert demzufolge eine große Anzahl von Schädigungsmodellen. Abgesehen aber von dem Modell von Kachanov (1958) und Gurson (1977) gibt es kein Modell, das in der Literatur allgemein akzeptiert wird. Das Modell von Gurson (1977) ist z. B. von Tvergaard (1982) in einer modifizierten Form zur Modellierung von u. a. Lokalisierung, Scherbandbildung und Makrorißbildung eingesetzt worden; siehe auch die Arbeiten von Needleman & Tvergaard (1984), Steinmann, Miehe & Stein (1994) und Bruhns, Xiao & Meyers (2000). Kleiber (1986) hat mit dem Modell auch Versagens- und Lokalisierungsuntersuchungen in axialsymmetrischen Zugproben durchgeführt und Perrin & Leblond (2000) haben damit das beschleunigte Wachstum von Poren in duktilen Materialien mit zwei Gruppen von Poren unterschiedlicher Größenordnung untersucht.

Eine *ad hoc* Erweiterung des eindimensionalen Modells von Kachanov (1958) auf den dreidimensionalen Spannungszustand wurde z. B. von Davison, Stevens & Kipp (1977), Leckie & Hayhurst (1974), Lemaitre &

Chaboche, (1978, 1990), Lemaitre (1985a, 1985b, 1996), Chaboche (1998) vorgenommen. Zur Beschreibung des Schädigungszustands verwenden diese Modelle weiterhin nach Kachanov (1958) einen skalaren Parameter. Sie sind demzufolge mathematisch einfach und leicht anwendbar. Diese Modelle gelten aber als fragwürdig, da sie den Nachteil besitzen, daß sie eine experimentell festgestellte Veränderung der Querkontraktionszahl – siehe z. B. Tang & Lee (1995) – nicht wiedergeben können. Rabier (1989) und Ju (1990) haben als erste auf diese Schwäche hingewiesen und zeigen in ihren Arbeiten, wie man sie behebt. In dem Modell von Rabier (1989) z. B. wird, unter Zuhilfenahme von Ergebnissen aus der Mikromechanik, direkt eine Abhängigkeit der zwei Materialparameter für isotropes Materialverhalten von der skalarwertigen Schädigungsvariable postuliert.

Wie schon erwähnt, ist im allgemeinen der Schädigungsvorgang ein stark anisotropes Phänomen, da die Entstehung und das Wachstum von Poren und anderen Mikrodefekten entscheidend von der Richtung der aufgebrachtten Spannungen oder Dehnungen abhängen. Demzufolge ist die Anwendbarkeit der oben genannten skalaren Modelle nur auf Deformationsverhalten von duktilen Materialien unter speziellen Belastungen beschränkt. Diese Modelle finden Anwendung auch bei Materialien, die im geschädigten Zustand eine große Anzahl von stochastisch verteilten Mikroporen beinhalten (Krajcinovic & Fonseka 1981), oder bei Belastungszuständen, bei denen die Normalen der flächenförmigen Defekte in Richtung der Hauptnormalspannung zeigen (Krajcinovic 1989). Zur Verbesserung der Modellierung wurden deshalb Modelle mit einem Vektor als Schädigungsvariable von Krajcinovic & Fonseka (1981), Krajcinovic (1983, 1985, 1987) und Krajcinovic & Sumarac (1987) eingeführt.

Modelle mit einem Tensor zweiter Stufe als Schädigungsvariable wurden von Cordebois & Sidoroff (1979), Dragon & Mróz (1979), Sidoroff (1981), Murakami & Ohno (1981), Betten (1982) und Murakami (1988) vorgeschlagen. Die Vorgehensweise bei diesen Modellen ist wie folgt: eine verallgemeinerte Effektivspannung nach Gleichung (1.7) wird entweder berechnet oder postuliert. Dann wird mit Hilfe von Verzerrungsäquivalenzähnlichen Hypothesen und Konzepten das Verhalten des geschädigten Materials bestimmt. Meistens stellt sich aber bei diesen Modellen heraus, daß die Effektivspannung nicht symmetrisch ist. Eine Symmetrisierung wird dann entweder nach dem Vorschlag von Murakami (1988), Cordebois & Sidoroff (1979) oder Chow & Wang (1987) durchgeführt.

Geht man z. B. wie bei Murakami (1988) vor, ist die sogenannte Effektivspannung σ^* eine Art 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor, d. h. ein Zweipunkt-Tensor (two-point tensor) und stellt eine bilineare Abbildung zwischen der Momentankonfiguration und einer fiktiven ungeschädigten Konfiguration dar. σ^* kann nicht symmetrisch sein, denn Symmetrie von σ^* würde bedeuten, daß die zwei Konfigurationen gleichgesetzt werden, siehe Marsden & Hughes (1983). Hier sei die Tatsache erwähnt, daß der nominelle Spannungstensor, auch ein Zweipunkt-Tensor, eine bedeutende Rolle in der finiten nichtlinearen Elastizitäts- and Elastoplastizitätstheorie spielt (Ogden 1984a; Hill 1978). Man beachte auch, daß man mit Hilfe der Idee der konjugierten Spannungsanalyse von Hill (1978) zur Formulierung von Stoffgesetzen jedes beliebige Spannungsmaß (und das zugeordnete Verzerrungsmaß) verwenden kann. Weiterhin kann durch eine ähnliche Vorgehensweise wie in der Arbeit von Murakami (1988) ein symmetrischer Spannungstensor (eine Art 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor) hergeleitet werden, der vollständig in der fiktiven ungeschädigten Konfiguration definiert ist. Keine der in der Literatur verwendeten symmetrisierten Effektivspannungen ist mit diesem Spannungsmaß identisch. Es stellt sich deshalb die Frage nach dem Sinn der Symmetrisierung bei den Effektivspannungsmodellen. Sie erscheint überflüssig und diese Modelle gelten deswegen auch als fragwürdig. Desweiteren läßt sich leicht zeigen, daß trotz der Symmetrisierung diese Modelle für isotropes Verhalten auch die Änderung der Querkontraktionszahl nicht wiedergeben können.

Modelle mit einem Tensor zweiter Stufe wurden auch von Halm & Dragon (1996) und Hayakawa & Murakami (1997) vorgestellt. Diese Modelle unterscheiden sich aber von den oben genannten, weil weder eine Effektivspannung, die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz noch ähnliche Hypothesen verwendet werden. Der Schädigungstensor wird hier als eine reine interne Zustandsvariable behandelt und die Vorgehensweise entspricht prinzipiell der, die in dieser Arbeit verwendet wird.

In Leckie & Onat (1981) und in der darauf aufbauenden Modellierung von Schieße (1994) und Bruhns & Schiesse (1996) wird eine Kombination von einem Skalar und deviatorischem Tensor zweiter Stufe verwendet. Das skalare Schädigungsmaß und der deviatorische Tensor sind dabei die irreduziblen und voneinander unabhängigen Fourierkoeffizienten, die man aus einer tensoriellen Fourierentwicklung der Orientierungsdichtefunktion auf der Einheitskugel erhält. Die Schädigungsmaße erhalten dadurch eine

physikalische Interpretation, die im Prinzip eine Messung der Schädigung ermöglicht. Die Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen und schädigungsinduzierten Deformationsraten wird aber dadurch nicht wesentlich erleichtert; es wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit diese Idee nicht weiter verfolgt und hier auf die Arbeit von Schieße (1994) verwiesen.

Voyiadjis (1988) verwendet zur Beschreibung der Schädigung bei großer Deformation zwei Tensoren zweiter Stufe. Isotrope Schädigungsmodelle – Erweiterungen der oben genannten skalaren Modelle – für große Formänderungen wurden von de Souza Neto, Perić & Owen (1992), Lubarda & Krajcinovic (1995a, 1995b) und Steinmann, Miehe & Stein (1994) vorgestellt. In Voyiadjis & Park (1999) werden auf Basis der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten die kinematischen Grundlagen für eine geometrisch nichtlineare Schädigungsmodellierung vorgestellt.

Die große Anzahl an Modellen zeigt, daß die Verallgemeinerung des eindimensionalen Modells von Kachanov (1958) sich als nicht einfach erwiesen hat. Nur für den eindimensionalen Fall ist man sich darüber einig, daß eine ausreichende Beschreibung mit einem skalaren Schädigungsparameter möglich ist. Es ist auch klar, daß man für eine mathematisch exakte Beschreibung des allgemeinen dreidimensionalen Falles einen Tensor achter Stufe benötigt: Geht man davon aus, daß der Elastizitätstensor \mathbf{C} eines geschädigten Materials linear von dem des ungeschädigten Materials \mathbf{C}^0 abhängt, ist der lineare Operator \mathbf{M} , der \mathbf{C}^0 auf \mathbf{C} abbildet, ein Tensor achter Stufe:

$$\mathbf{M} : \mathbf{C}^0 \mapsto \mathbf{C}.$$

Liegt keine Schädigung vor, ist \mathbf{M} der Einheitstensor achter Stufe, siehe z. B. Chaboche (1978). Eine solche Theorie ist zwar mathematisch relativ einfach und rational, sie ist aber, auch wenn man dabei alle Symmetrien des linearen Operators oder Schädigungstensors \mathbf{M} ausnutzt, rechentechnisch schwer handhabbar, und es ist mit großen Schwierigkeiten bei der Aufstellung der Evolutionsgleichung für den Schädigungstensor und bei der numerischen Implementation² zu rechnen. Ein solches Modell ist deshalb bis heute nicht formuliert bzw. verwendet worden.

²Nach Ortiz (1985, Seite 72) zählt die gute Eignung für numerische Berechnungen zu den wichtigsten Eigenschaften eines Schädigungsmodells. Die anderen wichtigen Eigenschaften sind die thermodynamische Konsistenz, die physikalische Plausibilität und die Wiedergabe von experimentellen Ergebnissen.

Schädigungsmodelle, die entweder ein Skalar, einen Vektor, Tensor zweiter Stufe oder sogar einen Tensor vierter Stufe (Elastizitäts- bzw. Nachgiebigkeitstensor, siehe Dougill (1975), Ortiz (1985), Simo & Ju (1987) und Ju (1989, 1990)) verwenden, stellen deshalb nur Näherungen dar. Bei diesen Modellen besteht die Hauptaufgabe darin, die Verknüpfung zwischen \mathbf{C} und \mathbf{C}^0 zu finden, d. h. \mathbf{M} als Funktion des gewählten Schädigungstensors \mathbf{d} anzugeben:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{d}).$$

Der Tensor oder Operator \mathbf{M} wird dann als Schädigungseffektmaß bezeichnet, siehe Voyiadjis & Kattan (1992), Schieße (1994) und Voyiadjis & Park (1999). Die Modelle aus der Literatur unterscheiden sich entweder durch den Grad des Schädigungstensors, die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable oder die Form des Schädigungseffektmaßes.

Für eine Modellierung von Schädigung in metallischen Werkstoffen wird ein anisotropes finites Elastoplastizitätsmodell als Basis benötigt. Die Elastoplastizitätsmodelle zur Beschreibung von grossen Formänderungen aus der Literatur lassen sich grob in drei Gruppen aufteilen: die erste Klasse von Modellen geht nach Green & Naghdi (1965) von einer additiven Aufspaltung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} in einen elastischen \mathbf{E}^e und einen plastischen Anteil \mathbf{E}^p aus. Dabei wird \mathbf{E}^p als eine Grundgröße mit einigen festlegbaren Eigenschaften behandelt. Die zweite Gruppe verwendet eine additive Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} in eine elastische \mathbf{D}^e und eine plastische Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^p , siehe z. B. Bruhns (1987, 1993), Lehmann (1991), Bruhns & Pitzer (1991) und Nemat-Nasser (1982, 1992). Die dritte Klasse von Modellen verwendet nach Kroener (1960), Lee (1969) und Lubarda & Lee (1981) eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und plastischen Anteil \mathbf{F}^p .

Die Theorie von Green & Naghdi (1965) ist eine allgemeine Theorie, und die Formulierung ist auch für anisotrope Materialien geeignet. Einige Eigenschaften von \mathbf{E}^p wurden in Green & Naghdi (1965, 1966) angegeben, aber auf die physikalische Bedeutung bzw. eine Methode für die Identifikation von \mathbf{E}^p ist nicht eingegangen worden. Erste Schritte in dieser Richtung sind erst von Casey & Naghdi (1992) vorgenommen worden.

Die multiplikative Elastoplastizitätstheorie verwendet eine spannungsfreie und elastisch-entlastete Zwischenkonfiguration. Diese Zwischenkonfi-

guration ist nur bis auf eine beliebige Rotation eindeutig festgelegt. Um die Eindeutigkeit der Zwischenkonfiguration herbeizuführen, wird meistens angenommen, daß \mathbf{F}^e ein symmetrischer und positiv definiten Tensor \mathbf{V}^e ist. \mathbf{F}^e wird demnach als eine reine Streckung angenommen und der Rotationsanteil \mathbf{R}^e von \mathbf{F}^e wird dabei vollkommen außer Acht gelassen. Casey & Naghdi (1981) haben gezeigt, daß diese Annahme die Invarianzforderung bei einer Beobachtertransformation oder einer überlagerten Starrkörperrotation im allgemeinen Sinne verletzt und ein solches Modell deshalb stark einschränkt. Mit dieser Annahme kann man auch keinen natürlichen Zusammenhang zwischen der additiven Zerlegung ($\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^{ep}$) der Verzerrungsgeschwindigkeit und der multiplikativen Zerlegung ($\mathbf{F}^e, \mathbf{F}^p$) des Deformationsgradienten angeben (Nemat-Nasser 1982; Xiao, Bruhns & Meyers 2000a). Außerdem führt diese Annahme zu der Schlußfolgerung, daß eine additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit nur bei kleinen elastischen oder kleinen plastischen Formänderungen zulässig ist.

In Simo (1988a, 1988b, 1992) und darauf basierenden Arbeiten von z. B. Simo & Miehe (1992), Simo & Meschke (1993), Simo & Hughes (1998) und Auricchio & Taylor (1999) geht man von der multiplikativen Zerlegung aus, aber die Annahme $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e$ wird nicht verwendet. Der plastische Anteil \mathbf{F}^p des Deformationsgradienten bzw. der plastische, rechte Cauchy-Green Tensor $\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p$ wird als eine interne Zustandsvariable behandelt. Für isotropes Material wird dann unter Verwendung des Prinzips der maximalen Dissipation die Fließregel in der Lie Ableitung von $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ (der elastische, linke Cauchy-Green Tensor) formuliert. Bei der numerischen Integration bzw. Implementation dieses Modells wird die multiplikative Zerlegung nicht mehr benötigt; die Tatsache, daß der elastische Anteil \mathbf{F}^e und plastische Anteil \mathbf{F}^p der Deformation unbestimmt bleiben, ist bei diesem Modell völlig belanglos. Die Eignung dieses Modells für große, numerische Berechnungen ist eindrucksvoll von Simo (1993), Simo & Miehe (1992) und Auricchio & Taylor (1999) – für verschiedene Fließfunktionen – gezeigt worden.

In Arbeiten von z. B. Weber & Anand (1990), Eterovic & Bathe (1990), Miehe & Stein (1992) und Hackl (1997) wird Eindeutigkeit für die Zwischenkonfiguration dadurch erreicht, daß die Evolutionsgleichungen für die inelastischen Verzerrungen für den plastischen Anteil des Deformationsgradienten oder den plastischen Geschwindigkeitsgradienten formuliert werden. Weber & Anand (1990) und Eterovic & Bathe (1990) ver-

wenden aber die einschränkende Annahme, daß der plastische Geschwindigkeitsgradient symmetrisch ist. Das Modell von Hackl (1997) wird im Rahmen der sogenannten Verallgemeinerten Standardisierten Materialien formuliert.

Bei den Modellen mit der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit muß zur Erfüllung des Prinzips der materiellen Objektivität eine objektive Zeitableitung wie z. B. die Zaremba-Jaumann Rate oder Green-Naghdi Rate verwendet werden. Lehmann (1972) und Nagtegaal & de Jong (1982) haben festgestellt, daß die Formulierung der kinematischen Verfestigung mit der Zaremba-Jaumann Rate beim Scherversuch zu einer Oszillation der Cauchyschen Spannungen führt. Abgesehen davon haben Simo & Pister (1984) gezeigt, daß für viele Zeitableitungen die Ratenform des elastischen Stoffgesetzes inkonsistent mit der Idee der Elastizität ist, da sie die exakte Integrierbarkeitsbedingung für eine wirklich elastische Beziehung nicht erfüllen. Diese Modelle werden deshalb selbst-inkonsistent genannt (Bruhns, Xiao & Meyers 1999a) und hier deshalb als ungeeignet zur Beschreibung von wirklichem Materialverhalten betrachtet. Detaillierte Ausführungen über einige der hier erwähnten Aspekte der finiten Elastoplastizität kann man in Naghdi (1990), Khan & Huang (1995) und Bruhns, Xiao & Meyers (1999b) nachlesen.

In einem vor kurzem von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) vorgestellten Rahmen für finite Elastoplastizität wird die logarithmische Rate als die objektive Zeitableitung verwendet. Angenommen wird die additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit; zur Trennung der Deformation in elastische und plastische Anteile wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten verwendet. Durch einen natürlichen Zusammenhang zwischen der Zerlegung ($\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^{ep}$) und ($\mathbf{F}^e, \mathbf{F}^p$) und mit Hilfe der logarithmischen Zeitableitung verschwinden die Unterschiede oder Diskrepanzen zwischen der Zerlegung von \mathbf{F} und \mathbf{D} . Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) zeigen außerdem, daß man dadurch ein *selbst-konsistentes* (d. h. das hypoelastische Modell ist exakt integrierbar und ergibt eine elastische Beziehung) Materialmodell für finite Deformationen formulieren kann. In diesem Zusammenhang wird hier das folgende Ergebnis erwähnt: legt man zusätzlich zu der Selbst-Konsistenz-Bedingung ein von Prager (1960) eingeführtes Kriterium über die Fließspannung zugrunde, ergibt sich, daß die logarithmische Rate *allen* anderen objektiven Zeitableitungen bei der Formulierung von elastoplastischen Stoffgesetzen vorzuziehen ist, siehe Xiao,

Bruhns & Meyers (2000b). Das Modell erfüllt auch die Invarianzforderung bei einer Beobachtertransformation oder einer überlagerten Starrkörperrotation im allgemeinen Sinne und ermöglicht eine eindeutige und konsistente Bestimmung der elastischen Deformation \mathbf{F}^e und der inelastischen Deformation \mathbf{F}^i und allen mit \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i zusammenhängenden kinematischen Größen wie z. B. \mathbf{W}^e und \mathbf{W}^i . Das Modell ist also *kinematisch konsistent*. Dieses Modell ist für beliebige Materialsymmetrien formuliert worden und eignet sich deshalb besonders gut als Fundament für die anisotrope Schädigungsmodellierung. Für diese Arbeit wird dieses Modell als Basis verwendet und die einzelnen Komponenten des Modells werden an den entsprechenden Stellen vorgestellt.

1.4 Ziel der Arbeit

Die Modellierung sogenannter duktiler Schädigung, die überwiegend in metallischen Werkstoffen auftritt und mit grossen inelastischen Formänderungen verbunden ist, stellt das Hauptinteresse der vorliegenden Arbeit dar. Das Ziel der Arbeit ist demzufolge, ein finites und anisotropes Schädigungsmodell zur Beschreibung dieses Phänomens zu entwickeln. Das Modell soll also unter Beachtung von

- schädigungsinduziertem anisotropen Verhalten,
- großen inelastischen Formänderungen

formuliert werden. Dafür benötigt man einen Rahmen für finite Elastoplastizität, der auch anisotropes Materialverhalten beschreiben kann. Der Rahmen von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) wird deshalb verwendet.

Als Schädigungstensor wird ein symmetrischer, positiv semi-definiter Tensor zweiter Stufe verwendet. Zusätzlich zu der klassischen Interpretation der Schädigungsparameter als eine interne Zustandsvariable wird er hier auch als ein allgemein sich mit der Deformation entwickelnder Struktur- bzw. Materialtensor betrachtet. Diese Interpretation ist wichtig, da die Schädigungsmodellierung sich damit auf folgende Punkte reduziert:

- die Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen,
- die Bestimmung von kritischen Werten für den Schädigungsparameter (Festlegung von Versagenskriterien) und

- die Bestimmung von Materialkonstanten.

Dabei kann zur Beschreibung von schädigungsinduzierter Anisotropie auf Ergebnisse zur Modellierung von sogenannten stark anisotropen Materialien zurückgegriffen werden, es können mit der Theorie der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen die konstitutiven Gleichungen bestimmt und die thermodynamischen Einschränkungen angegeben werden.

1.5 Aufbau der Arbeit

- In **Kapitel 2** werden die kinematischen Grundlagen bereitgestellt; es wird auf die Trennung von Deformationen in elastische und inelastische Anteile, objektive Lagrangesche und Eulersche Verzerrungstensoren und die Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit eingegangen. Außerdem werden die Formeln zur Berechnung des logarithmischen Spins und der logarithmischen Zeitableitung angegeben.
- Die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Drehimpuls, Energie und Entropie werden in **Kapitel 3** und **4** zusammengestellt. Dabei werden verschiedene Spannungstensoren eingeführt. Auf die Zuordnung von Lagrangeschen Spannungs- und Dehnungstensoren nach Hill (1968, 1978) und auf die Erweiterung dieser Zuordnung auf Eulersche Spannungs- und Dehnungstensoren wird eingegangen und die Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen behandelt.
- In **Kapitel 5** wird ein kurzer Überblick über die weitestverbreiteten Schädigungsmodelle und Konzepte der Schädigungsmechanik gegeben. Das sogenannte isotrope Schädigungsmodell wird vorgestellt und es wird auf die anisotropen Modelle nach Murakami (1988) und Cordebois & Sidoroff (1979) eingegangen.
- In **Kapitel 6** wird das Schädigungsmodell der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Die Motivation für die Wahl des Schädigungsparameters als ein Tensor zweiter Stufe wird gegeben. Aus der neuen Interpretation des Schädigungstensors werden Beziehungen für seine Transformation zwischen den verschiedenen Konfigurationen hergeleitet. Die Modellierung der Schädigungsdeaktivierung wird behandelt. Anschließend wird die Konstitutivbeziehung für elastisches Materialver-

halten vorgestellt. Die Darstellung für das komplementäre hyperelastische Potential wird angegeben. Anschließend wird auf die Ratenformulierung des elastischen Stoffgesetzes eingegangen.

- **Kapitel 7** beschäftigt sich mit dem Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten. Es wird ausführlich auf die Herleitung einer anisotropen Fließbedingung und die Anpassung dieser Funktion an die Gurson-Fließfunktion eingegangen. Be- und Entlastungsbedingungen für die Plastizität und Schädigung und die Evolutionsgleichungen werden angegeben. Zum Schluß wird die thermodynamische Konsistenz des verwendeten Materialmodells gezeigt.
- **Kapitel 8** behandelt die numerische Umsetzung und Verifizierung des Materialmodells. Anhand linearer und nichtlinearer numerischer Beispiele für elastisches und elastoplastisches Verhalten ohne und mit Schädigung wird die Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Schädigungsmodells gezeigt.
- In **Kapitel 9** werden die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefaßt und die weiterführenden und ausstehenden Untersuchungen kurz besprochen.

1.6 Notation

Es wird die Standardnotation verwendet und Vektor und Tensor bedeuten Vektoren und Tensoren über einen dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{E} . Für Tensoren werden fettgedruckte Buchstaben verwendet. Für Vektoren werden kleine, Tensoren zweiter Stufe große Buchstaben und für Tensoren vierter Stufe werden lateinische Großtafelbuchstaben (black board bold), wie z. B. \mathbf{L} , verwendet. Die Summationskonvention wird verwendet. Das dyadische oder tensorielle Produkt wird mit \otimes gekennzeichnet. Ein einfacher Punkt zwischen zwei Tensoren kennzeichnet die einfache Verjüngung. Wenn die Gefahr einer Verwechslung nicht besteht, wird der Punkt weggelassen. Ein doppelter Punkt kennzeichnet die doppelte

Verjüngung:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_{ik} B_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{A} : \mathbf{B} &= A_{ij} B_{ij}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

$i, j, k = 1, 2, 3$. Hier und im folgenden beziehen sich die Tensorkomponenten auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem. Mit $\det \mathbf{A}$, $\text{tr} [\mathbf{A}]$, \mathbf{A}^T , \mathbf{A}' und \mathbf{A}^{-1} werden die Determinante, die Spur, die Transponierte, der deviatorische Anteil und die Inverse eines zweistufigen Tensors \mathbf{A} bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\mathbf{A}] &= A_{ii}, \\ (\mathbf{A}^T)_{ij} &= A_{ji} \\ \text{tr} [\mathbf{A}\mathbf{B}^T] &= \mathbf{A} : \mathbf{B}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr} [\mathbf{A}] \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

und

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}, \quad A_{ik} A_{kj}^{-1} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \tag{1.27}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{1}$ den Einheitstensor zweiter Stufe und δ_{ij} das Kronecker-Delta. Die Grund- und Hauptinvarianten von \mathbf{A} werden mit I, II, III und I_1, I_2, I_3 bezeichnet:

$$I = \text{tr} [\mathbf{A}], \quad II = \text{tr} [\mathbf{A}^2], \quad III = \text{tr} [\mathbf{A}^3] \tag{1.28}$$

und

$$\begin{aligned} I_1 &= I \\ I_2 &= J_2 = \frac{1}{2} \{I^2 - II\} \\ I_3 &= \det \mathbf{A} = \frac{1}{6} \{I^3 - 3I \cdot II + 2III\}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Die Hauptinvarianten lassen sich auch wie folgt durch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des (symmetrischen) Tensors \mathbf{A} ausdrücken:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Sei \mathbf{v} ein Vektor, \mathbf{A} ein Tensor zweiter Stufe, \mathbb{H} ein Tensor vierter Stufe und $\mathbf{Q}, \mathbf{R} \in SO_3$ Drehtensoren, wobei SO_3 die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO_3 = \{\mathbf{Q} : \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{Q}) = +1\} \quad (1.31)$$

bezeichnet, wird hier die folgende Notation aus Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) für die sogenannte \star -Produkte (oder Rayleigh-Produkte) übernommen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \star \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{v}, \\ \mathbf{Q} \star \mathbf{A} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \\ (\mathbf{Q} \star \mathbb{H})_{ijkl} &= Q_{ip}Q_{jq}Q_{kr}Q_{ls}\mathbb{H}_{pqrs}, \quad i, j, k, \dots = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Die folgenden Regeln gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \star (\mathbb{H} : \mathbf{A}) &= (\mathbf{Q} \star \mathbb{H}) : (\mathbf{Q} \star \mathbf{A}), \\ \mathbf{Q} \star (\mathbf{R} \star \mathbf{A}) &= (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \star \mathbf{A} \\ (\mathbf{Q} \star \mathbf{A}) : (\mathbf{Q} \star \mathbf{B}) &= \mathbf{A} : \mathbf{B}, \\ \text{tr} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})] &= \text{tr} [(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Für die durch den Tensor vierter Stufe \mathbb{H} induzierte Norm eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe \mathbf{G} wird die folgende Bezeichnung verwendet:

$$\|\mathbf{G}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\mathbf{G} : \mathbb{H} : \mathbf{G}}, \quad \|\mathbf{G}\| = \sqrt{\mathbf{G} : \mathbf{I} : \mathbf{G}}, \quad (1.34)$$

wobei \mathbf{I} den symmetrischen Einheitstensor vierter Stufe bezeichnet:

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (1.35)$$

Anhang D enthält eine Liste der häufig verwendeten Symbole.

Zum Schluß dieses Abschnittes wird das folgende Ergebnis aus der Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen angegeben: die Größe ϕ sei eine skalarwertige isotrope Funktion von drei symmetrischen Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_3 , d. h.

$$\phi = \phi(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) \quad (1.36)$$

und

$$\phi(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \phi(\mathbf{Q} \star \mathbf{A}_1, \mathbf{Q} \star \mathbf{A}_2, \mathbf{Q} \star \mathbf{A}_3), \quad \mathbf{Q} \in SO_3. \quad (1.37)$$

Nach dem Darstellungssatz für isotrope Tensorfunktionen, siehe z. B. Truesdell & Noll (1965), Wang (1970), Spencer (1984) und Boehler (1977, 1987c), folgt, daß ϕ eine Funktion der folgenden Grundinvarianten ist:

$$\begin{array}{l} \text{tr} [\mathbf{A}_i], \quad \text{tr} [\mathbf{A}_i^2], \quad \text{tr} [\mathbf{A}_i^3], \quad i = 1, 2, 3 \\ \text{tr} [\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_i^2 \mathbf{A}_j^2] \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \\ \text{tr} [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3] \end{array} \quad (1.38)$$

Ingesamt hängt ϕ also von 22 Grundinvarianten ab. Die Menge (1.38) der Grundinvarianten reduziert sich auf

$$\begin{array}{l} \text{tr} [\mathbf{A}_1] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_1^2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_1^3] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_2^2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_2^3] \\ \text{tr} [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2] \quad \text{tr} [\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2] \end{array} \quad (1.39)$$

für den Fall, daß ϕ nur von zwei Tensoren \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 abhängt, und auf die 3 Grundinvarianten (1.28), wenn ϕ nur von einem einzigen Tensor \mathbf{A} abhängt.

Kapitel 2

Kinematische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die kinematischen Grundlagen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik zusammengestellt werden. Die für die späteren Betrachtungen benötigten kinematischen Beziehungen, die Lagrangeschen und Eulerschen Verzerrungstensoren und die objektiven mitrotierenden Zeitableitungen – für die Ratenformulierung von konstitutiven Gleichungen – werden angegeben. Außerdem wird auf die Aufteilung der Deformation und Verzerrungsgeschwindigkeit in elastische und inelastische Anteile eingegangen. Detaillierte Ausführungen über einige der im folgenden behandelten Themen findet man in den klassischen Lehrbüchern von Truesdell & Noll (1965), Malvern (1969), Chadwick (1976), Marsden & Hughes (1983) und Ogden (1984a). Für eine ausführlichere Beschreibung und Herleitung des logarithmischen Spintensors, der logarithmischen Zeitableitung, und der Eigenprojektionsmethode wird auf die Originalarbeiten von Xiao, Bruhns & Meyers (1997a, 1997b, 1998c, 1998d), Bruhns, Xiao & Meyers (1999b) und Reinhardt & Dubey (1996, 1998) verwiesen.

2.1 Beobachter und Bezugssystem

Zur qualitativen und quantitativen Beschreibung der Phänomene, die sich in der physikalischen Welt abspielen, benötigt man einen Rahmen, den man als Basis für die Beschreibung verwenden kann. Mit der Einführung eines Beobachters wird in der Kontinuumsmechanik dieser Rahmen geschaffen. Ein Beobachter verkörpert das Werkzeug zur Messung von physikalischen Größen. Und er ist insbesondere in der Lage, den Relativabstand zwischen Punkten im Raum anzugeben und die Zeit zu messen.

In der Kontinuumsmechanik wird angenommen, daß der Raum, in dem

sich die physikalischen Phänomene abspielen, der dreidimensionale Euklidische Punktraum \mathcal{E} sei und daß man die Zeitpunkte, zu denen sich die Phänomene abspielen, auf \mathbb{R} messen kann. \mathbb{R} bezeichnet hier die Menge der reellen Zahlen. Ein Ereignis in der physikalischen Welt, wie es von einem Beobachter \mathcal{O} festgestellt wird, spielt sich an einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ab. Für einen Beobachter \mathcal{O} wird ein Ereignis demzufolge als ein Paar (\mathbf{x}, t) des kartesischen Produktes $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$ aufgenommen. Ein Beobachter kann deshalb als eine injektive Abbildung, die ein Paar $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}$ einem Ereignis in der physikalischen Welt zuordnet, angesehen werden.

Eine Beobachter-Transformation ist eine Abbildung

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}^*, t^*), \quad (2.1)$$

die weder den Abstand zwischen Punkten in \mathcal{E} , noch die Zeitdifferenz zwischen Ereignissen, noch die Reihenfolge, in der sich die Ereignisse abspielen, verändert. Die Abbildung (2.1) läßt sich auch als ein Wechsel des Beobachters von \mathcal{O} auf \mathcal{O}^* interpretieren: Ein Ereignis, das von \mathcal{O} als am Ort \mathbf{x} und zum Zeitpunkt t sich abspielend aufgenommen wird, spielt sich, von \mathcal{O}^* aus gesehen, am Ort \mathbf{x}^* zum Zeitpunkt t^* ab. Eine Beobachtertransformation führt also nur zu einer Veränderung in der Beschreibung eines Ereignisses in $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Die Transformation

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \quad t^* = t - a, \quad (2.2)$$

wobei der Tensor zweiter Stufe $\mathbf{Q} \in SO_3$ einen beliebigen, zeitabhängigen Drehtensor darstellt, $\mathbf{c}(t)$ einen zeitabhängigen Vektor, und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante, genügt diesen Anforderungen und stellt demzufolge eine allgemeine Beobachtertransformation dar, siehe Truesdell & Noll (1965) und Ogden (1984a). Die Zeitdifferenz a zwischen den zwei Beobachtern ist für die Betrachtungen hier irrelevant und im folgenden wird der Einfachheit halber von $a = 0$ bzw. $t^* = t$ ausgegangen. Legt der Beobachter \mathcal{O} bzw. \mathcal{O}^* den Ursprung seines rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystems (Bezugssystems) bei \mathbf{o} (\mathbf{o}^*) in \mathcal{E} fest, kann \mathbf{x} (\mathbf{x}^*) als der Ortsvektor des Punktes \mathbf{x} (\mathbf{x}^*) bezüglich \mathbf{o} (\mathbf{o}^*) angesehen werden.

2.2 Körper, Konfiguration und Deformation

Der Begriff Körper stellt ein grundlegendes Konzept der Kontinuumsmechanik dar. Ein Körper B wird definiert als eine Menge von Punkten, auch materielle Teilchen, Körperpunkte oder Partikel genannt, die sich bijektiv auf einen Teil \mathcal{B} des Euklidischen Punktraumes \mathcal{E} abbilden lassen.¹

Der Körper nimmt im Euklidischen Punktraum die Region \mathcal{B} ein, und diese Region ändert sich stetig mit der Bewegung und Deformation des Körpers. Eine Konfiguration des Körpers ist eine bijektive Abbildung

$$\chi : B \rightarrow \mathcal{E}, \quad (2.3)$$

die materielle Teilchen von B auf ihre Positionen in einen Teil des Euklidischen Punktraumes \mathcal{E} abbildet. Es wird angenommen, daß die Abbildung χ und ihre Inverse χ^{-1} so oft wie nötig stetig differenzierbar sind. Ein materielles Teilchen von B wird mit X bezeichnet. Für $X \in B$ gilt

$$\mathbf{x} = \chi(X, t), \quad X = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

wobei \mathbf{x} die Position des Teilchens X in der Konfiguration χ zum Zeitpunkt t kennzeichnet. Die Konfiguration χ hängt offensichtlich vom Bezugssystem ab, da ein Ereignis räumlich von einem Beobachter \mathcal{O} als $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ aufgenommen oder festgestellt wird. $\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet das Teilchen X , das in der Konfiguration χ die Position oder den Ortsvektor \mathbf{x} hat. Mit $\chi(B) = \{\chi(X) : X \in B\}$ wird die Menge der Positionen bezeichnet, die in der Konfiguration χ von den materiellen Teilchen von B eingenommen werden, d. h. $\chi(B) = \mathcal{B}$.

Ein weiterer grundlegender Begriff der Kontinuumsmechanik ist die Bewegung. Die Bewegung von B ist eine einparametrische Folge von Konfigurationen $\chi_t : B \rightarrow \mathcal{E}$, wobei der Index t die Zeit als Parameter kennzeichnet. Für die Position eines Teilchens X zum Zeitpunkt t gilt

$$\mathbf{x} = \chi_t(X) = \chi(X, t). \quad (2.5)$$

Für ein festes Teilchen X beschreibt Gleichung (2.5) eine Kurve in \mathcal{E} , die sogenannte Bahnkurve. Eine beliebige aber feste (zeitunabhängige) Konfiguration χ_0 von B wird als Bezugs- bzw. Referenzkonfiguration ausgewählt und im folgenden wird ein Teilchen X durch seine Position in

¹Eine abstraktere Definition, die eine Beschreibung von Schalen ermöglicht, lautet: "Ein materielles Körper ist eine kompakte, orientierte, n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem stetigen, orientierbaren Rand" (Bertram 1989).

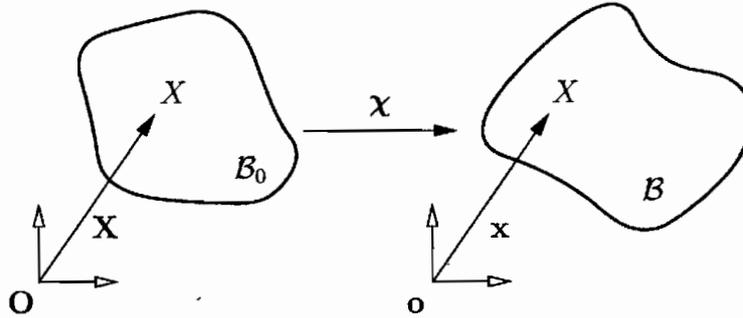


Abbildung 2.1: Deformation des Körpers B von der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in die Momentankonfiguration \mathcal{B} . Das Teilchen X besitzt bezüglich Koordinatenursprung \mathbf{O} (\mathbf{o}) den Ortsvektor \mathbf{X} (\mathbf{x}) in \mathcal{B}_0 (\mathcal{B}).

dieser Konfiguration identifiziert. Die von B in dieser Konfiguration eingenommene Region des Euklidischen Punktraumes \mathcal{E} wird mit \mathcal{B}_0 bezeichnet und $\chi(B)$ mit \mathcal{B} .

$$\mathbf{X} = \chi_0(X) \quad (2.6)$$

ist demzufolge die Position des Teilchens X in der Referenzkonfiguration χ_0 . Man beachte, daß die Referenzkonfiguration nicht unbedingt eine vom Körper während seiner Bewegung und Deformation eingenommene Konfiguration sein muß, und daß der Index 0 auf einen festen, beliebig ausgewählten Zeitpunkt $t_0 \leq t$ deutet, für den aber $t_0 = 0$ auch nicht unbedingt gelten muß. Anstatt Gleichung (2.4) schreibt man deshalb

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.7)$$

für die Position des Teilchens X , das in der Referenzkonfiguration χ_0 die Position \mathbf{X} einnimmt. Damit wurde χ als eine Abbildung von \mathcal{B}_0 nach \mathcal{B} neu definiert und hängt natürlich von der Referenzkonfiguration ab. Für eine feste Zeit t wird χ eine Deformation von der Referenzkonfiguration genannt und die Gleichung (2.7) definiert eine einparametrische Folge solcher Deformationen. Die Positionen \mathbf{X} und \mathbf{x} , die das Teilchen X in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration einnimmt, können als Ortsvektoren im Euklidischen Vektorraum \mathbb{E} bezüglich fester Urprünge \mathbf{O} bzw. \mathbf{o} in \mathcal{E} angesehen werden, siehe Abbildung 2.1.

Es werden in der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 und in der Momentankonfiguration \mathcal{B} kartesische Koordinatensysteme mit Basisvektoren \mathbf{E}_α und \mathbf{e}_i und den Urprüngen \mathbf{O} und \mathbf{o} eingeführt. Dann gilt für die Position von X

in \mathcal{B}_0

$$\mathbf{X} = X_\alpha \mathbf{E}_\alpha, \quad (2.8)$$

und für die Position von X in \mathcal{B}

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (2.9)$$

Gleichung (2.7) lautet in Indexschreibweise

$$x_i = \chi_i(X_\alpha, t) \quad i, \alpha = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Hier und im folgenden werden bei Komponenten von Größen der Referenzkonfiguration griechische Buchstaben als Index verwendet und bei Komponenten von Größen der Momentankonfiguration kleine lateinische Buchstaben. Man bezeichnet X_α als die materiellen oder die Lagrange-schen Koordinaten des Teilchens X und x_i als die momentanen, räumlichen oder Eulerschen Koordinaten. Es wird auch zwischen einer materiellen oder Lagrangeschen und räumlichen oder Eulerschen Beschreibung unterschieden: bei einer Lagrangeschen Beschreibung verwendet man für eine Größe φ (Skalar, Vektor oder Tensor) die Position in der Referenzkonfiguration \mathbf{X} und Zeit t als die unabhängigen Variablen:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.11)$$

Sind dagegen der Ortsvektor \mathbf{x} und die Zeit t die unabhängigen Variablen,

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

dann handelt es sich um eine Eulersche Darstellung. Zur Vereinfachung der Notation wird hier und im folgenden nicht zwischen Funktionen und Funktionswerten unterschieden. Für jede Eulersche Größe $\varphi(\mathbf{x}, t)$ läßt sich eine entsprechende Lagrangesche Größe $\varphi(\mathbf{X}, t)$ durch die Variablenwechselformel

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\chi(\mathbf{X}), t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

definieren. Im folgenden wird sowohl die Lagrangesche als auch Eulersche Darstellung verwendet und oft zum Wechseln der Beschreibung von (2.13) Gebrauch gemacht.

2.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} und die Beschleunigung \mathbf{a} eines Teilchens \mathbf{X} von B ergeben sich aus der ersten und zweiten materiellen Ableitung von $\chi(\mathbf{X}, t)$ nach der Zeit:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\chi}{dt}(\mathbf{X}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{X}, t) = \frac{d^2\chi}{dt^2}(\mathbf{X}, t). \quad (2.15)$$

Wird die Geschwindigkeit in räumlichen Koordinaten vorgegeben, dann gilt für die Beschleunigung \mathbf{a} die Beziehung

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\text{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Der Tensor $\text{grad} \mathbf{v}$ wird mit \mathbf{L} bezeichnet und räumlicher Geschwindigkeitsgradient genannt, siehe Abschnitt 2.9. Hier und im folgenden wird unterschieden zwischen Grad mit großem Anfangsbuchstaben, wo es nach \mathbf{X} abgeleitet, und grad mit kleinem Anfangsbuchstaben, bei der nach \mathbf{x} abgeleitet wird. Entsprechendes gilt für Div und div.

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Größen, die vom Beobachter abhängen. Betrachtet man den durch Gleichung (2.2) gegebenen Beobachterwechsel, folgt daraus, daß der Beobachter \mathcal{O}^* die Deformation (2.7) als

$$\chi^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\chi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t) \quad (2.17)$$

aufnimmt. Er mißt deshalb die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{c}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) \quad (2.18)$$

und die Beschleunigung

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}\mathbf{a} + \ddot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) - \|\boldsymbol{\omega}\|^2(\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad (2.19)$$

wobei $\boldsymbol{\omega}$ den axialen Vektor zu dem antisymmetrischen Tensor $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ bezeichnet, d. h. $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{E}$, und $\|(\bullet)\|$ die Norm oder Betrag des Vektors (\bullet) bezeichnet. Die Beziehungen (2.18) und (2.19) stellen die Transformationsgleichungen für die Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer Beobachtertransformation dar und verdeutlichen ihre Abhängigkeit vom Beobachter.

2.4 Deformationsgradient

Für die Deformation des Körpers B von der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in eine beliebige Konfiguration \mathcal{B} gilt

$$x_i = \chi_i(X_\alpha, t). \quad (2.20)$$

Bildet man das Differential dieser Gleichung, folgt daraus die Beziehung

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} dX_\alpha \quad (2.21)$$

bzw.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (2.22)$$

in absoluter Notation. Der zweistufige Tensor

$$\mathbf{F} = \text{Grad}\chi(\mathbf{X}) = \nabla \otimes \chi(\mathbf{X}) \quad (2.23)$$

ist vom materiellen Punkt \mathbf{X} und von der Zeit abhängig und wird als Deformationsgradient bezüglich der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 bezeichnet. Der Deformationsgradient stellt eine grundlegende kinematische Größe dar, da er den lokalen Deformationszustand in der Umgebung eines Teilchens \mathbf{X} beschreibt. \mathbf{F} hat bezüglich der orthonormalen Basen \mathbf{E}_α in \mathcal{B}_0 und \mathbf{e}_i in \mathcal{B} die Darstellung

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_\alpha \quad (2.24)$$

und ist demzufolge ein sogenannter Zweipunkt-Tensor, da er mit dem einen Bein \mathbf{E}_α in der Anfangs- und dem anderen Bein \mathbf{e}_i in der Momentankonfiguration steht. Der Vektor $d\mathbf{X}$ (bzw. $d\mathbf{x}$) im Punkt \mathbf{X} (\mathbf{x}) in der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 (Momentankonfiguration \mathcal{B}) wird ein Lagrange-sches (Eulersches) Linienelement genannt und Gleichung (2.22) gibt an, wie unter der Deformation χ sich $d\mathbf{X}$ in $d\mathbf{x}$ transformiert. Für die Determinante J des Deformationsgradienten gilt

$$J = \det(\mathbf{F}) > 0 \quad (2.25)$$

wegen der lokalen Undurchdringbarkeit des Materials, d. h. \mathbf{F} ist nicht singulär und die Umkehrabbildung \mathbf{F}^{-1} , ein Zweipunkt-Tensor, existiert. Die Umkehrbeziehung zu (2.22) lautet

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Man erhält aus Gleichung (2.17) die Transformationsbeziehung

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad (2.27)$$

für den Deformationsgradienten \mathbf{F} bei einem Beobachterwechsel. Der Deformationsgradient ist deshalb ein objektiver Zweipunkt-Tensor.

Die drei nicht koplanaren Linienelemente $d\mathbf{X}$, $d\mathbf{Y}$ und $d\mathbf{Z}$ spannen an einem Punkt \mathbf{X} in \mathcal{B}_0 ein infinitesimales Volumenelement mit dem Volumen

$$dV = d\mathbf{X} \cdot (d\mathbf{Y} \times d\mathbf{Z}) = \det(d\mathbf{X}, d\mathbf{Y}, d\mathbf{Z}) \quad (2.28)$$

auf. Nach der Deformation gehen die Linienelemente in $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$ und $d\mathbf{z}$ über. Für das Volumen des von ihnen aufgespannten Volumenelementes gilt

$$dv = \det(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, d\mathbf{z}). \quad (2.29)$$

Mit (2.22), (2.25) und (2.28) folgt aus der letzten Gleichung die Formel von Euler

$$dv = J dV. \quad (2.30)$$

Das von $d\mathbf{Y}$ und $d\mathbf{Z}$ aufgespannte infinitesimale Flächenelement $d\mathbf{A}$ geht nach der Deformation in $d\mathbf{a}$ über. Mit (2.30) gilt

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{a} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.31)$$

und mit (2.22) folgt daraus die Formel von Nanson

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}, \quad \mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \quad (2.32)$$

Der Vektor \mathbf{N} bzw. \mathbf{n} stellt den nach außen zeigenden Normalenvektor der Fläche in \mathcal{B}_0 bzw. \mathcal{B} dar. Der Flächennormalenvektor ist nicht im Material eingebettet und transformiert sich deshalb anders als das materielle Linienelement.

2.5 Objektivität

Hier und im folgenden wird der Begriff Objektivität im Sinne von Ogden (1984a, 1984b) verwendet, d. h. ein Zweipunkt-Tensor, der von \mathcal{B}_0 nach \mathcal{B} abbildet, ist dann objektiv, wenn er sich genauso wie \mathbf{F} bei einem Beobachterwechsel transformiert. Ein Zweipunkt-Tensor \mathbf{P} , z. B. \mathbf{F}^{-1} , der

von \mathcal{B} nach \mathcal{B}_0 abbildet, wird dann als objektiv bezeichnet, wenn er sich wie folgt transformiert

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T. \quad (2.33)$$

Ein Lagrangescher Skalar $\phi(\mathbf{X}, t)$, Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ und Tensor zweiter Stufe $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ werden dann als objektiv bezeichnet, wenn bei einer Beobachtertransformation (2.2) sich $\phi(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ und $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{X}, t) &= \phi(\mathbf{X}, t), \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \\ \mathbf{T}^*(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{T}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ein Eulerscher Skalar $\phi(\mathbf{x}, t)$, Vektor $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ und Tensor zweiter Stufe $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ sind objektiv, wenn sie sich bei einem Beobachterwechsel wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{x}, t) &= \phi(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{z}^*(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(t) \star \mathbf{z}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{G}^*(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}(t) \star \mathbf{G}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Unter der Annahme oder Bedingung, daß \mathcal{O} und \mathcal{O}^* die gleiche Referenzkonfiguration verwenden, ergeben sich die Beziehungen (2.27) und (2.33) – (2.35) aus der Invarianz von Längen und Winkeln gegenüber einer Beobachtertransformation, siehe Green & Naghdi (1979).

2.6 Polarzerlegung und Spektralzerlegung

Der Deformationsgradient \mathbf{F} kann mit Hilfe des Polarzerlegungssatzes der linearen Algebra multiplikativ in

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.36)$$

zerlegt werden. Gleichung (2.36)₁ stellt die sogenannte rechte und (2.36)₂ die linke Polarzerlegung dar. \mathbf{R} wird Rotationstensor oder Drehungstensor genannt und ist ein orthogonaler Tensor:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1}, \quad \det(\mathbf{R}) = 1, \quad (2.37)$$

wobei $\mathbf{1}$ hier den Einheitstensor zweiter Stufe bezeichnet. \mathbf{U} und \mathbf{V} , da der Deformationsgradient \mathbf{F} invertierbar ist, sind symmetrische und positiv

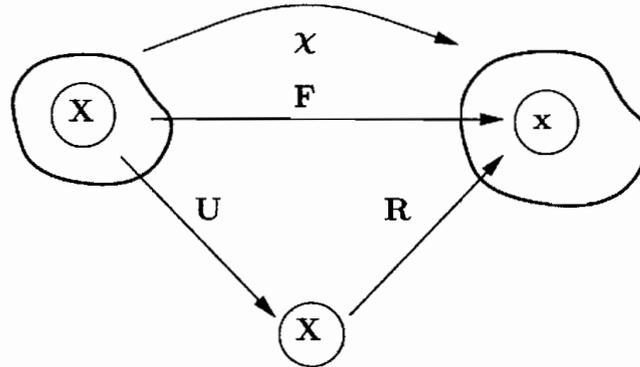


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der rechten Polarzerlegung des Deformationsgradienten

definite Tensoren. \mathbf{U} wird der rechte Strecktensor genannt und \mathbf{V} der linke Strecktensor. Aus (2.36) und (2.37) folgt die Verknüpfung

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \star \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{V} \quad (2.38)$$

zwischen \mathbf{U} und \mathbf{V} . Nach der Polarzerlegung setzt sich jede Deformation entweder aus einer reinen Rotation \mathbf{R} mit einer anschließenden Streckung \mathbf{V} oder aus einer Streckung \mathbf{U} mit einer anschließenden Rotation \mathbf{R} zusammen, siehe Abbildung 2.2. Der rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} und linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{B} werden wie folgt definiert:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.40)$$

Aus (2.39) bzw. (2.40) folgt, daß der rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} bzw. der linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{B} symmetrisch ist. Es gilt

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} \star \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Demnach ergibt sich \mathbf{B} aus \mathbf{C} durch eine Vorwärtsdrehung mit \mathbf{R} bzw. \mathbf{C} aus \mathbf{B} durch eine Rückwärtsdrehung. \mathbf{U} und \mathbf{C} (\mathbf{V} und \mathbf{B}) sind objektive Lagrangesche (Eulersche) Tensoren und \mathbf{R} ist ein objektiver Zweipunkt-Tensor, d. h. es gilt

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{V}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{B} \quad (2.43)$$

und

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{Q} \mathbf{R} \quad (2.44)$$

bei einer Beobachtertransformation. Die lokale Rotation eines deformierenden Körpers wird durch den Rotationstensor \mathbf{R} erfaßt. Die Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} und die Cauchy-Green Tensoren \mathbf{C} und \mathbf{B} beschreiben die Deformation des Körpers ohne die Starrkörperdeformation und werden deshalb als Verzerrungsmaße bezeichnet.

Die Spektraldarstellung von \mathbf{U} lautet

$$\mathbf{U} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{N}^A \otimes \mathbf{N}^A, \quad \|\mathbf{N}^A\| = 1. \quad (2.45)$$

Hier bezeichnen $\lambda_A > 0$ die Eigenwerte von \mathbf{U} und \mathbf{N}^A die entsprechenden orthonormalen Eigenvektoren. Mit Gleichung (2.38) ergibt sich für \mathbf{V} die Spektralform

$$\mathbf{V} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^A, \quad \|\mathbf{n}^A\| = 1, \quad (2.46)$$

wobei $\mathbf{n}^A = \mathbf{R} \star \mathbf{N}^A$ die Vorwärtsdrehung von \mathbf{N}^A mit \mathbf{R} bezeichnet. \mathbf{U} und \mathbf{V} haben demzufolge die gleichen Eigenwerte λ_A . Die Eigenvektoren von \mathbf{V} ergeben sich aus denen von \mathbf{U} durch eine Vorwärtsdrehung mit \mathbf{R} . Aus den Spektraldarstellungen für \mathbf{U} und \mathbf{V} folgen für \mathbf{F} , \mathbf{R} , \mathbf{C} und \mathbf{B} die folgenden Hauptachsenformen:

$$\mathbf{F} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{N}^A, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{A=1}^3 \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{N}^A, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \chi_A \mathbf{N}^A \otimes \mathbf{N}^A \quad \text{und} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{A=1}^3 \chi_A \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^A. \quad (2.50)$$

Hier bezeichnen $\chi_A = \lambda_A^2$ die Eigenwerte von \mathbf{B} und diese ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom

$$p(\chi) = \chi^3 - I_1 \chi^2 + I_2 \chi - I_3 = 0 \quad (2.51)$$

als

$$\begin{cases} \chi_i = \frac{1}{3} \left(I_1 + 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \cos \frac{1}{3}(\varphi - 2\pi i) \right), \\ \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{2I_1^3 - 9I_1 \cdot I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (2.52)$$

wobei I_1 , I_2 und I_3 die Hauptinvarianten von \mathbf{B} bezeichnen.

Für den Fall, daß \mathbf{B} mehrfache Eigenwerte hat, sind die Eigenvektoren nicht mehr eindeutig. In diesem Fall ist es vorteilhaft, Eigenprojektionen \mathbf{B}_σ zu verwenden, da sie immer eindeutig bestimmt werden können. Mit Eigenprojektionen lautet die Hauptachsenform für \mathbf{B} wie folgt

$$\mathbf{B} = \sum_{\sigma=1}^n \chi_\sigma \mathbf{B}_\sigma. \quad (2.53)$$

Hier kennzeichnet n die Anzahl ungleicher Eigenwerte. Die Eigenprojektionen \mathbf{B}_σ des linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{B} sind eindeutig definiert, symmetrisch und gehorchen zusätzlich den folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{B}_\sigma \mathbf{B}_\tau = \delta_{\sigma\tau} \mathbf{B}_\tau \quad (\text{keine Summation}), \quad (2.54)$$

$$\sum_{\sigma=1}^n \mathbf{B}_\sigma = \mathbf{1}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B}_\sigma \mathbf{B} = \chi_\sigma \mathbf{B}_\sigma. \quad (2.56)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{1}$ den Einheitstensor zweiter Stufe und $\delta_{\sigma\tau}$ das Kronecker-Delta. Mit (2.54) – (2.56) läßt sich die Sylvesterformel

$$\mathbf{B}_\sigma = \delta_{n1} \mathbf{1} + \prod_{\tau \neq \sigma}^n \frac{\mathbf{B} - \chi_\tau \mathbf{1}}{\chi_\sigma - \chi_\tau} \quad (2.57)$$

herleiten, aus der die Eigenprojektionen dann berechnet werden können. Für $n = 1$ verschwindet das durch $\prod_{\sigma \neq \tau}^n$ gekennzeichnete Produkt.

2.7 Dehnungstensoren

Ein Verzerrungs- oder Dehnungsmaß muß eine objektive und isotrope Tensorfunktion sein. Desweiteren muß es eine monoton steigende Funktion sein, damit jede Längenzunahme mit einer Zunahme des Verzerrungstensors verknüpft ist. Außerdem muß für eine Starrkörperbewegung der

Dehnungstensor (Verzerrungstensor) verschwinden (zur Einheit werden). Es wird zusätzlich gefordert, daß bei kleinen Formänderungen alle Dehnungsmaße in erster Näherung identisch sein sollen und den infinitesimalen Dehnungstensor ergeben. Ein allgemeiner Lagrangescher Dehnungstensor $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{U})$ bzw. Eulerscher Dehnungstensor $\mathbf{e}^{(m)}(\mathbf{V})$ muß deshalb nach Hill (1968, 1978) die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{1}) = \mathbf{e}^{(m)}(\mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

und

$$\left(\mathbf{E}^{(m)}\right)' \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{1}} = \left(\mathbf{e}^{(m)}\right)' \Big|_{\mathbf{V}=\mathbf{1}} = \mathbf{I}. \quad (2.59)$$

Die Zahl m ist ganzzählig und \mathbf{I} bezeichnet den symmetrischen Einheits-tensor vierter Stufe. $(\bullet)'$ kennzeichnet in Gleichung (2.59)₁ den Gradienten von (\bullet) nach \mathbf{U} und in (2.59)₂ den Gradienten nach \mathbf{V} . Unter Berücksichtigung der Bedingungen (2.58) und (2.59) lassen sich bezogen auf die Referenzkonfiguration

$$\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{U}) = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{1}), & m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U}, & m = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

und bezogen auf die Momentankonfiguration

$$\mathbf{e}^{(m)}(\mathbf{V}) = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{V}^m - \mathbf{1}), & m \neq 0 \\ \ln \mathbf{V}, & m = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

als allgemeine symmetrische, isotrope und objektive Dehnungstensoren angeben. Im folgenden werden Dehnungsmaße nach (2.60) und (2.61) auch als Verzerrungsmaße bzw. -tensoren bezeichnet. Mit (2.38) erhält man die folgende Verknüpfung zwischen $\mathbf{e}^{(m)}$ und $\mathbf{E}^{(m)}$:

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{R} \star \mathbf{E}^{(m)}, \quad \mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{e}^{(m)}. \quad (2.62)$$

Demnach ist der Lagrangesche Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(m)}$ eine Rückwärtsdrehung des Eulerschen Verzerrungstensors $\mathbf{e}^{(m)}$ mit dem Rotationstensor \mathbf{R} und umgekehrt.

Mit (2.54) – (2.56) kann man für $\mathbf{e}^{(m)}$ und $\mathbf{E}^{(m)}$ die folgenden Spektral-
darstellungen angeben:

$$\mathbf{e}^{(m)} = \sum_{\sigma=1}^n f(\lambda_{\sigma}) \mathbf{B}_{\sigma}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{\sigma=1}^n f(\lambda_{\sigma}) \mathbf{C}_{\sigma}, \quad (2.64)$$

$$f(\lambda_{\sigma}) = \frac{1}{m} (\lambda_{\sigma}^m - 1). \quad (2.65)$$

Hier bezeichnen

$$\mathbf{C}_{\sigma} = \mathbf{R}^{\top} \star \mathbf{B}_{\sigma} = \delta_{n1} \mathbf{1} + \prod_{\tau \neq \sigma}^n \frac{\mathbf{C} - \chi_{\tau} \mathbf{1}}{\chi_{\sigma} - \chi_{\tau}} \quad (2.66)$$

die Eigenprojektionen des rechten Cauchy-Green Tensors \mathbf{C} . Die Skalierungs-
funktion $f(\lambda_{\sigma})$ ist eine objektive, isotrope und monoton steigende
Funktion von λ_{σ} , und (2.58) und (2.59) können jetzt als Eigenschaft von
 $f(\lambda_{\sigma})$ in der Form

$$f(1) = f'(1) - 1 = 0 \quad (2.67)$$

angegeben werden.

Für $m = 2$ erhält man aus (2.60) bzw. (2.64) den auf \mathcal{B}_0 bezogenen
Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor \mathbf{E} und für $m = -2$ aus (2.61)
bzw. (2.63) den auf \mathcal{B} bezogenen Almansi-Eulerschen Verzerrungstensor
 \mathbf{e} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} (\lambda_{\sigma}^2 - 1) \mathbf{C}_{\sigma}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} (1 - \lambda_{\sigma}^{-2}) \mathbf{B}_{\sigma}. \quad (2.69)$$

Mit \mathbf{E} und \mathbf{e} läßt sich die Differenz der Quadrate eines Linienelementes
in der Momentan- und der Referenzkonfiguration wie folgt angeben:

$$\|\mathbf{dx}\|^2 - \|\mathbf{dX}\|^2 = 2\mathbf{dX} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{dX} = 2\mathbf{dx} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{dx}. \quad (2.70)$$

Durch ein pull-back des Almansi-Eulerschen Verzerrungstensors erhält man den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor bzw. ein push-forward des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors ergibt den Almansi-Eulerschen Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.71)$$

Man erhält aus Gleichung (2.71) für die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{E}}$ von \mathbf{E} die Beziehung

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \overset{\circ}{\mathbf{e}}^L \mathbf{F}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}^L = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.72)$$

mit

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L = \mathbf{F}^{-T} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \right] \mathbf{F} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{e}. \quad (2.73)$$

Hier bezeichnet \mathbf{L} den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten. Der räumliche Tensor $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L$ ist objektiv und stellt die konvektive oder sogenannte Cotter-Rivlin Zeitableitung von \mathbf{e} dar, siehe Truesdell & Noll (1965). Die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{E}}$ des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors ist demnach ein pull-back der konvektiven Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L$ des Almansi-Eulerschen Verzerrungstensors bzw. $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L$ ist das push-forward von $\dot{\mathbf{E}}$.

Streng genommen können hier keine push- und pull-Operationen durchgeführt werden. Diese Operationen sind nur in einem geometrischen Rahmen eindeutig definiert, und in diesem Rahmen ist $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L$ eine fundamentale geometrische Größe, die man als die Lie Ableitung von \mathbf{e} bezeichnet, siehe Guo (1963), Marsden & Hughes (1983) und Stumpf & Hoppe (1997). Die Zusammenhänge in Gleichung (2.71) wurden hier aus Gleichung (2.70) hergeleitet. \mathbf{E} (\mathbf{e}) ist vielmehr in unserem Rahmen nach Ogden (1984a) der induzierte Lagrangesche (Eulersche) Tensor von \mathbf{e} (\mathbf{E}). Mit pull-back und push-forward sollen trotzdem in dieser Arbeit dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend Verknüpfungen zwischen Lagrangeschen und Eulerschen Größen in der Form (2.71)₁ bzw. (2.71)₂ bezeichnet werden.

Wählt man $m = 0$, d. h. die Skalierungsfunktion als $\ln \lambda$, erhält man aus (2.64) und (2.63) die referentiellen und räumlichen Henckyschen Deh-

nungstensoren

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} \ln \chi_{\sigma} \mathbf{C}_{\sigma}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} \ln \chi_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma}. \quad (2.75)$$

Die Dehnungsmaße \mathbf{H} und \mathbf{h} stellen eine dreidimensionale oder tensorielle Verallgemeinerung der eindimensionalen natürlichen Dehnung dar und besitzen einige Vorzüge gegenüber anderen Verzerrungsmaßen. Zusammen mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor \mathbf{E} , dem für $m = 1$ nach Biot benannten Tensor

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} - \mathbf{1} = \sum_{\sigma=1}^n (\lambda_{\sigma} - 1) \mathbf{C}_{\sigma}, \quad (2.76)$$

spielen die Henckysche Verzerrungstensoren in der Anwendung der nicht-linearen Elastizitätstheorie eine zentrale Rolle. In Xiao, Bruhns & Meyers (1997a) wird eine besondere Eigenschaft von \mathbf{h} gezeigt: der räumliche Henckysche Dehnungstensor \mathbf{h} ist das einzige Verzerrungsmaß, dessen mitrotierende Zeitableitung genau die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ergibt, siehe Abschnitt 2.10 und Anhang A.

Für die Verschiebung \mathbf{u} eines Teilchens X von \mathcal{B}_0 in \mathcal{B} gilt

$$\mathbf{u} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.77)$$

Der Verschiebungsgradient ergibt sich demzufolge als

$$\text{Grad}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.78)$$

und damit folgt aus (2.68) für \mathbf{E} die Beziehung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\text{Grad}(\mathbf{u}) + (\text{Grad}(\mathbf{u}))^T + (\text{Grad}(\mathbf{u}))^T \text{Grad}(\mathbf{u})). \quad (2.79)$$

Für kleine Verschiebungen können in der letzten Gleichung quadratische Terme in \mathbf{u} vernachlässigt werden. In diesem Fall entfällt auch die Unterscheidung zwischen einer Eulerschen and einer Lagrangeschen Beschreibung, und es gilt $\text{Grad}(\bullet) = \text{grad}(\bullet)$, da \mathbf{F} ungefähr gleich dem Einheits-tensor ist. Man kann in diesem Fall

$$\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u})^T) \quad (2.80)$$

schreiben. Hier bezeichnet $\boldsymbol{\epsilon}$ den aus der linearen Elastizitätstheorie bekannten infinitesimalen Verzerrungstensor.

2.8 Zerlegung der finiten Deformation

Bei Deformationsprozessen mit elastischen und plastischen Formänderungen sind die elastischen und die plastischen Anteile der Deformation festzulegen. Bei kleinen Verzerrungen verwendet man eine additive Zerlegung des infinitesimalen Verzerrungstensors ϵ in einen elastischen Anteil ϵ^e und einen plastischen Anteil ϵ^p :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p. \quad (2.81)$$

Für große elastoplastische Formänderungen spaltet man dafür nach Kroe-ner (1960) und Lee (1969) den Deformationsgradienten multiplikativ in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und einen plastischen und isochoren Anteil \mathbf{F}^p auf²:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p, \quad (2.82)$$

$$\det(\mathbf{F}^p) = 1, \quad J = \det(\mathbf{F}^e). \quad (2.83)$$

Eine mögliche Motivation für diese Zerlegung bieten die Modelle der Kristallplastizität. Aus einer mikromechanischen Betrachtungsweise stellt \mathbf{F}^p eine interne Zustandsvariable dar, die den Verfestigungszustand des Materials beschreibt. Von einem phänomenologischen Standpunkt definiert \mathbf{F}^{-e} eine lokale, spannungsfreie, elastisch-entlastete Zwischenkonfiguration, siehe Simo (1992). Man beachte, daß die multiplikative Zerlegung (2.82) nur bis auf eine beliebige Rotation der Zwischenkonfiguration eindeutig ist, d. h. für $\mathbf{Q} \in SO_3$ gilt auch

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p = \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^p, \quad (2.84)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{Q}, \quad \bar{\mathbf{F}}^p = \mathbf{Q}^T \mathbf{F}^p. \quad (2.85)$$

Die durch $(\bar{\mathbf{F}}^e)^{-1}$ definierte lokale elastisch-entlastete Zwischenkonfiguration ist auch spannungsfrei, da sie sich aus der durch \mathbf{F}^e definierten Zwischenkonfiguration durch die Starrkörperrotation \mathbf{Q}^T ergibt.

²Eine weitere mögliche Zerlegung der finiten Deformation im Rahmen der Elastoplastizität ist die von Green & Naghdi (1965) eingeführte additive Aufspaltung $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$ des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors.

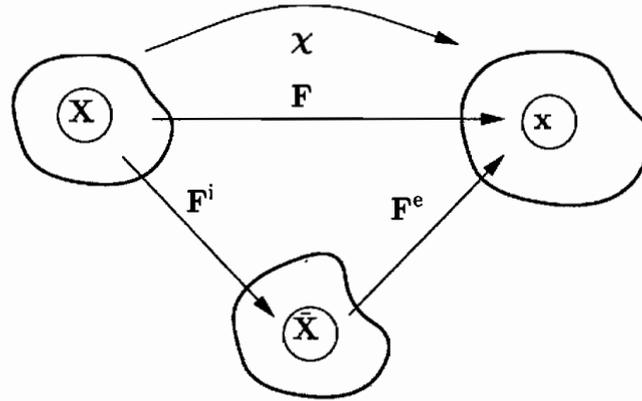


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} in \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i

Da hier elastoplastisches Materialverhalten mit Schädigung betrachtet werden soll, wird als Teil des konstitutiven Gesetzes eine Zerlegung des Deformationsgradienten wie folgt vorgenommen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i. \quad (2.86)$$

\mathbf{F}^e bezeichnet den rein elastischen Anteil von \mathbf{F} und \mathbf{F}^i den inelastischen Anteil aufgrund entweder rein plastischer Formänderung oder plastischer Formänderung und Schädigung. Die durch die Zerlegung (2.86) eingeführte Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ soll also sowohl plastisch deformiert als auch geschädigt sein, siehe Abbildung 2.3. \mathbf{F}^e stellt eine Abbildung von der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ in die Momentankonfiguration \mathcal{B} dar und \mathbf{F}^i bildet ein Linienelement von der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in die Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ ab. Da im folgenden die fiktive ungeschädigte Zwischenkonfiguration nicht explizit verwendet wird, ist es hier nicht von Bedeutung, wie sich \mathbf{F}^i aus \mathbf{F}^p , dem rein plastischen Anteil und \mathbf{F}^d , dem Schädigungsanteil, zusammensetzt. Man beachte, daß die Determinante von \mathbf{F}^i ungleich Eins ist, da Schädigungsdeformationen mit einer Volumenänderung verbunden sind.

Eine Anwendung der Polarzerlegung auf \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i ergibt

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{V}^i \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^i \mathbf{U}^i, \quad (2.88)$$

wobei \mathbf{U}^e bzw. \mathbf{U}^i und \mathbf{V}^e bzw. \mathbf{V}^i den rechten elastischen bzw. inelastischen und linken Strecktensor bezeichnen. \mathbf{R}^e bzw. \mathbf{R}^i bezeichnet den

elastischen bzw. inelastischen Rotationstensor³.

Hier wird nach Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) die multiplikative Zerlegung (2.86) zusammen mit einer additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} verwendet. Mit dieser Kombination und einer geeigneten elastischen Beziehung für den linken elastischen Strecktensor \mathbf{V}^e können \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i und alle mit ihnen zusammenhängenden kinematischen Größen konsistent und eindeutig bestimmt werden, siehe Anhang B. Der von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) vorgeschlagene Rahmen für finite Elastoplastizität wird hier als Basis verwendet. Für die multiplikative Zerlegung (2.86) kann deshalb auch die Objektivität im allgemeinen Sinne (Casey & Naghdi 1981) erfüllt werden, d. h. \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i transformieren sich

$$\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^e\bar{\mathbf{Q}}^T, \quad \mathbf{F}^{i*} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^i \quad (2.89)$$

bei einer Beobachtertransformation. Hier stellt der Rotationstensor $\bar{\mathbf{Q}} \in SO_3$ den Unterschied in dem Bezugssystem \mathcal{O}^* zwischen der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}^*$ und der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0^* zum Zeitpunkt $t = 0$ dar, siehe Anhang B.

2.9 Geschwindigkeitsgradient

Der räumliche Gradient des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} ergibt einen Eulerschen Tensor 2. Stufe \mathbf{L} , der als räumlicher Geschwindigkeitsgradient bezeichnet wird, und die Rate der lokalen Deformation und Rotation angibt:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.90)$$

oder

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.91)$$

in Komponentenschreibweise. Aus Gleichung (2.23) folgt

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}, \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \quad (2.92)$$

und mit Gleichung (2.22) erhält man

$$d\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}d\mathbf{x}, \quad (2.93)$$

³Definiert man einen gesamten Rotationstensor als $\mathbf{R} = \mathbf{R}^e\mathbf{R}^i$ und einen zurückgedrehten elastischen Strecktensor als $\bar{\mathbf{U}}^e = \mathbf{R}^{iT} \star \mathbf{U}^e$, kann man die folgende Zerlegung für \mathbf{F} angeben: $\mathbf{F} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{U}}^e \mathbf{U}^i$. Diese Zerlegung ist eindeutig und wurde von Schieck & Stumpf (1993, 1995) vorgeschlagen.

wobei hier $\dot{\mathbf{F}}$ die materielle Zeitableitung von \mathbf{F} bezeichnet. Der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} läßt sich eindeutig additiv in einen symmetrischen Tensor \mathbf{D} und einen antisymmetrischen Tensor \mathbf{W} zerlegen:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.94)$$

mit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.95)$$

Der symmetrische Anteil \mathbf{D} wird als Streckgeschwindigkeitstensor, Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit oder einfach Verzerrungsgeschwindigkeit bezeichnet. Er gibt die Änderungsgeschwindigkeit von Längen und Winkeln materieller Linienelemente an. Der Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} , der auch Spintensor oder einfach Spin genannt wird, gibt die Drehgeschwindigkeit materieller Linienelemente an.

Bei Stoffgesetzen, die in Raten- oder Inkrementalform formuliert werden, wird \mathbf{D} als ein Maß für die Deformationsrate verwendet und spielt damit eine entscheidende Rolle. Generell gibt es aber weder einen Eulerschen noch einen Lagrangeschen Verzerrungstensor, dessen materielle Zeitableitung genau den Streckgeschwindigkeitstensor ergibt. Oder anders ausgedrückt, das Integral der Verzerrungsgeschwindigkeit über die Zeit ergibt nur in speziellen Fällen ein bekanntes Verzerrungsmaß, siehe Ogden (1984a, Seite 123). Die Verzerrungsgeschwindigkeit galt deshalb nicht als eine Verzerrungsrate. Es wird im nächsten Abschnitt gezeigt, daß die mit dem logarithmischen Spin $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ gebildete mitrotierende Zeitableitung des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors \mathbf{h} genau \mathbf{D} ergibt. Verwendet man deshalb \mathbf{h} als Verzerrungsmaß und die logarithmische Rate als objektive Zeitableitung, kann \mathbf{D} als eine Verzerrungsrate betrachtet werden.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.92) und (2.95) erhält man die folgende Beziehung zwischen der Rate des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors und der Verzerrungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}. \quad (2.96)$$

Mit (2.96) folgt aus Gleichung (2.72) die Beziehung

$$\mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^L = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{e}, \quad (2.97)$$

d. h. die konvektive oder Cotter-Rivlin Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^L$ des Almansi-Eulerschen Verzerrungstensors \mathbf{e} ergibt die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} .

Bei einem Beobachterwechsel (2.2) transformieren sich \mathbf{L} , \mathbf{D} und \mathbf{W} wie folgt

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{L} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{D}, \quad (2.99)$$

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{W} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (2.100)$$

Die Gleichung (2.98) folgt direkt aus (2.18). \mathbf{L} und \mathbf{W} sind demzufolge nicht objektiv, und \mathbf{D} ist objektiv.

Man erreicht durch die Zerlegung (2.86) von \mathbf{F} eine (lokale) Aufteilung der gesamten Deformation in elastische und inelastische Anteile. Damit folgen für $\dot{\mathbf{F}}$ und \mathbf{L} die folgenden Beziehungen:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^i + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i \quad (2.101)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^i \mathbf{F}^{-e} \quad (2.102)$$

mit

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{-e}, \quad \mathbf{L}^i = \dot{\mathbf{F}}^i \mathbf{F}^{-i}. \quad (2.103)$$

Der Tensor \mathbf{L}^e bezieht sich auf die Momentankonfiguration und \mathbf{L}^i bezieht sich auf die Zwischenkonfiguration. Aus den Gleichungen (2.102) und (2.95) erhält man für die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und den Spintensor \mathbf{W} die Beziehungen

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{D}}^{ei} \mathbf{F}^{eT}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^e + \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{W}}^{ei} \mathbf{F}^{eT} \quad (2.104)$$

mit

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{eT}), \quad \bar{\mathbf{D}}^{ei} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^i \mathbf{F}^{-e} \mathbf{F}^{-eT} + \mathbf{F}^{-e} \mathbf{F}^{-eT} \mathbf{L}^{iT}), \quad (2.105)$$

und

$$\mathbf{W}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e - \mathbf{L}^{eT}), \quad \bar{\mathbf{W}}^{ei} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^i \mathbf{F}^{-e} \mathbf{F}^{-eT} - \mathbf{F}^{-e} \mathbf{F}^{-eT} \mathbf{L}^{iT}). \quad (2.106)$$

Man beachte, daß Gleichung (2.104) eine additive Aufteilung der Verzerrungsgeschwindigkeit impliziert, und daß (2.104) auch eine natürliche und direkte Verknüpfung zwischen einer additiven Aufteilung von \mathbf{D} und der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.86) darstellt. Der Anteil \mathbf{D}^e hängt nur von dem elastischen Deformationsgradienten \mathbf{F}^e

ab und bezeichnet demzufolge den rein elastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit.

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{D}}^{\text{ei}} \mathbf{F}^{eT} \quad (2.107)$$

hängt von \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i ab und stellt den elastisch-inelastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit dar. \mathbf{D}^{ei} ist in der Momentankonfiguration definiert und $\bar{\mathbf{D}}^{\text{ei}}$ in der Zwischenkonfiguration. Die letzte Beziehung stellt also die push-forward-Operation von $\bar{\mathbf{D}}^{\text{ei}}$ in die Momentankonfiguration dar.

2.10 Log-Spin und Log-Rate

Eine allgemeine Beobachtertransformation wird durch die Gleichung (2.2) gegeben. Dadurch ergibt sich für die Deformation $\chi(\mathbf{X}, t)$ die Transformation

$$\chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t) \chi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t), \quad t^* = t - a, \quad (2.108)$$

wobei $\mathbf{Q} \in SO_3$ einen Drehtensor bezeichnet, $\mathbf{c}(t)$ einen zeitabhängigen Vektor, und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Der Einfachheit halber wird hier von $a = 0$ bzw. $t^* = t$ ausgegangen. Aus einem objektiven, symmetrischen, Eulerschen Tensor zweiter Stufe \mathbf{G} wird durch den Beobachter- oder Bezugssystemwechsel der Tensor

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{Q} \star \mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T. \quad (2.109)$$

Hier wird mit Ω^* der zeitabhängige Spintensor, d. h. der antisymmetrische Eulersche Tensor zweiter Stufe bezeichnet, der wie folgt definiert ist

$$\Omega^* = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}. \quad (2.110)$$

Der Beobachter bzw. das Bezugssystem \mathcal{O}^* kann entweder durch den eigentlich orthogonalen Drehtensor \mathbf{Q} festgelegt werden oder durch den Spin Ω^* und eine vorgegebene konstante Anfangsrotation. Die letztere Möglichkeit wird hier verwendet. Für die materielle Zeitableitung von \mathbf{G}^* gilt nun

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}}^* &= \mathbf{Q} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{G} \dot{\mathbf{Q}}^T \\ &= \mathbf{Q} \star \overset{\circ}{\mathbf{G}}^*, \end{aligned} \quad (2.111)$$

wobei der symmetrische Tensor zweiter Stufe

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^* = \mathbf{Q}^T \star \left[\frac{d}{dt} \mathbf{Q} \star \mathbf{G} \right] = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega}^* \mathbf{G}, \quad (2.112)$$

die durch den Spintensor $\boldsymbol{\Omega}^*$ definierte mitrotierende Zeitableitung des Eulerschen Tensors \mathbf{G} bezeichnet. Sie stellt die materielle Zeitableitung des Eulerschen Tensors \mathbf{G} in dem mit dem Spin $\boldsymbol{\Omega}^*$ rotierenden Bezugssystem \mathcal{O}^* dar.

Für ein in Ratenform formuliertes Stoffgesetz muß die verwendete Zeitableitung objektiv sein, damit eine überlagerte Starrkörperrotation keinen Einfluß auf das Materialverhalten hat (Prinzip der materiellen Objektivität oder Bezugsindifferenz, siehe Truesdell & Noll (1965)). Es gibt eine unendliche Anzahl von mitrotierenden Zeitableitungen, aber nicht alle sind objektiv. Die Objektivität einer mitrotierenden Zeitableitung hängt von dem definierenden Spintensor ab. Damit eine mitrotierende Zeitableitung objektiv ist, muß ihr Spintensor mit der Rotation und Deformation des betrachteten Körpers eng verbunden sein.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} und der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} beschreiben den lokalen Deformationszustand und die lokale Deformationsgeschwindigkeit. Es erscheint deshalb sinnvoll für die Bestimmung von $\boldsymbol{\Omega}^*$ von der allgemeinen Form

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega}^*(\mathbf{F}, \mathbf{L}) \quad (2.113)$$

auszugehen, wobei $\boldsymbol{\Omega}^*(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ eine antisymmetrische tensorielle Funktion von \mathbf{F} und \mathbf{L} bezeichnet. Für eine sinnvolle objektive Zeitableitung muß der Spintensor (2.113) bestimmte Bedingungen erfüllen (Xiao, Bruhns & Meyers 1998c, Section 3). Diese Bedingungen ermöglichen bzw. erleichtern die Bestimmung von konkreten Spintensoren aus (2.113). Unter Beachtung dieser Bedingungen leiten Xiao, Bruhns & Meyers (1998c) die folgende allgemeine Beziehung für $\boldsymbol{\Omega}^*$ ab:

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{W} + \sum_{\sigma \neq \tau}^n h \left(\frac{\chi_\sigma}{\chi_\tau} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau, \quad (2.114)$$

$$h(z^{-1}) = -h(z) \quad (\forall z > 0). \quad (2.115)$$

Die Funktion h wird Spinfunktion genannt. Hier und im folgenden bedeutet die Notation $\sum_{\sigma \neq \tau}^n$ die Summe für $\sigma, \tau = 1, \dots, n$ und $\sigma \neq \tau$

und es wird angenommen, daß für $n = 1$ diese Summe verschwindet. χ_σ bezeichnen die Eigenwerte von \mathbf{B} , \mathbf{B}_σ die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen, n kennzeichnet die Anzahl ungleicher Eigenwerte.

Weit verbreitete objektive Zeitableitungen nach (2.113) bzw. (2.114) sind z. B. die nach Zaremba und Jaumann benannte Zeitableitung

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^J = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{G} \quad (2.116)$$

für

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{W} \quad (2.117)$$

und die Green-Naghdi-Rate

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^R = \mathbf{R} \star \left[\frac{d}{dt} \mathbf{R}^T \star \mathbf{G} \right] = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\mathbf{\Omega}^R - \mathbf{\Omega}^R\mathbf{G} \quad (2.118)$$

für

$$\mathbf{\Omega}^* = \mathbf{\Omega}^R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T. \quad (2.119)$$

Die Zaremba-Jaumann-Rate (2.116) hat sich aufgrund der Oszillation der Spannung beim ebenen Scherversuch – siehe z. B. Lehmann (1972), Dienes (1979) und Dafalias (1983) – als ungeeignet zur Formulierung von Stoffgesetzen erwiesen. Die Green-Naghdi-Rate (2.118), die hier stellvertretend für eine Vielzahl anderer Zeitableitungen steht, hat beim Scherversuch dieses Problem nicht. Wie aber von Simo & Pister (1984) gezeigt wurde, ist weder für die Zaremba-Jaumann-Rate noch die Green-Naghdi-Rate das entsprechende Ratenmodell für elastisches Materialverhalten im allgemeinen exakt integrierbar. Dies ist inkonsistent mit der Idee der Elastizität, insbesondere der Hyperelastizität. Aufbauend auf dieses Ergebnis wird deshalb in Bruhns, Xiao & Meyers (1999a) der Begriff der Selbstkonsistenz eines elastoplastischen Modells eingeführt: *ein elastoplastisches Stoffgesetz ist dann als selbstkonsistent zu bezeichnen, wenn für $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e$ die Ratenformulierung für elastisches Materialverhalten exakt integrierbar ist und eine elastische, insbesondere hyperelastische, Beziehung liefert.* Die Green-Naghdi-Rate, genauso wie die Zaremba-Jaumann-Rate, ist nicht selbstkonsistent und gilt deshalb als ungeeignet zur Formulierung von Stoffgesetzen.

Bei Stoffgesetzen, die in Raten- oder Inkrementalform formuliert werden, wird \mathbf{D} als ein Maß für die Deformationsrate verwendet und spielt

damit eine entscheidende Rolle. Bisher gab es generell, abgesehen von einigen Sonderfällen, keinen Eulerschen oder Lagrangeschen Verzerrungstensor, dessen materielle oder mitrotierende Zeitableitung genau die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ergibt. In einer Reihe von Arbeiten sind Xiao, Bruhns & Meyers (1997a, 1997b, 1998d) deshalb den folgenden Fragen nachgegangen:

1. Gibt es einen Eulerschen Verzerrungstensor \mathbf{e} , dessen mitrotierende Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{e}}$ genau \mathbf{D} ergibt? D. h. für welchen Tensor \mathbf{e} gilt

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}\boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega}^*\mathbf{e} = \mathbf{D}, \quad \text{und} \quad (2.120)$$

2. welchen Spintensor $\boldsymbol{\Omega}$ muß man zur Erzielung dieses Ergebnisses verwenden?

Mit Hilfe von Eigenprojektionen stellt sich heraus, daß die Gleichung (2.120) nur für den Spintensor $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ und den räumlichen Henckyschen Verzerrungstensor \mathbf{h} erfüllt wird, d. h. für

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{1 + (\chi_\sigma/\chi_\tau)}{1 - (\chi_\sigma/\chi_\tau)} + \frac{2}{\ln(\chi_\sigma/\chi_\tau)} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau \quad (2.121)$$

gilt

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h}\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}\mathbf{h} = \mathbf{D}. \quad (2.122)$$

Xiao, Bruhns & Meyers (1997a, 1997b) zeigen, daß \mathbf{h} der einzige Verzerrungstensor ist, der diese Eigenschaft aufweist. Im Anhang A wird die Herleitung dieser Ergebnisse in einer verkürzten Form der Vollständigkeit halber wiedergegeben und die basisfreie Darstellung für den Spintensor

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{\text{Log}} \quad (2.123)$$

angegeben, siehe Gleichungen (A.49) und (A.50). Der Spintensor $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ wird logarithmischer Spin (Log-Spin) genannt, die mit dem logarithmischen Spin gebildete Zeitableitung

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}} = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}\mathbf{G} \quad (2.124)$$

einer Eulerschen Größe \mathbf{G} logarithmische Rate (Log-Rate). Der eigentlich orthogonale Drehtensor \mathbf{R}^{Log} , der durch die lineare tensorielle Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}^{\text{Log}} = -\mathbf{R}^{\text{Log}}\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}, \quad \mathbf{R}^{\text{Log}}|_{t=0} = \mathbf{1} \quad (2.125)$$

festgelegt wird, wird als logarithmische Rotation bzw. Log-Rotation bezeichnet. Die Log-Rate ist im Sinne von Bruhns, Xiao & Meyers (1999a) selbstkonsistent und wird deshalb in dieser Arbeit für die Formulierung von Stoffgesetzen verwendet werden.

Zwischen der Log-Rate und Green-Naghdi-Rate besteht der folgende Zusammenhang

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}} = \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{R}} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}\mathbf{G}, \quad (2.126)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}$ hier die Differenz aus dem Log-Spin und dem Polar-Spin $\boldsymbol{\Omega}^{\text{R}}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{R}} = \mathbf{W} + \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{1 - \sqrt{\chi_{\sigma}/\chi_{\tau}}}{1 + \sqrt{\chi_{\sigma}/\chi_{\tau}}} \right) \mathbf{B}_{\sigma} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\tau}, \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} &= \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{R}} \\ &= \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{2\sqrt{\chi_{\sigma}/\chi_{\tau}}}{1 - (\chi_{\sigma}/\chi_{\tau})} + \frac{2}{\ln(\chi_{\sigma}/\chi_{\tau})} \right) \mathbf{B}_{\sigma} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\tau}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Man beachte, daß für moderate Verzerrungen der Log-Spin und der Polar-Spin bzw. die Log-Rotation und der Rotationstensor näherungsweise identisch sind.

Für einen beliebigen Eulerschen Tensor zweiter Stufe \mathbf{G} gelten die folgenden Beziehungen:

$$\overline{\mathbf{R}^{\text{Log}} \star \mathbf{G}} = \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}}, \quad (2.129)$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}} ds. \quad (2.130)$$

Gleichung (2.129) entspricht der Beziehung (2.111), die hier noch einmal explizit für die Lograte angegeben wird, da sie im folgenden mehrfach verwendet wird. Eine Zeitintegration von (2.129) mit einer anschließenden links und rechts Multiplikation mit $(\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}}$ und \mathbf{R}^{Log} ergibt dann Gleichung (2.130). Die Gleichung (2.130) läßt auch die folgende Interpretation zu: die (Eulersche) Größe $\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}}$ wird in die Lagrangesche Konfiguration zurückgedreht; dort wird das Integral gebildet und das Ergebnis

dann anschließend wieder nach vorne in die Eulersche Konfiguration gedreht. Sie stellt demzufolge die Formel oder das Rezept für die sogenannte mitrotierende Integration (*corotational integration*) dar (Khan & Huang 1995).

Kapitel 3

Bilanzgleichungen, Spannungstensoren und konjugierte Spannungsanalyse

3.1 Einleitung

Für die thermodynamischen Betrachtungen in Kapitel 4 werden die Bilanzgleichungen für die Masse, den Impuls und Drehimpuls und die mechanische Energie benötigt. Diese Gleichungen werden hier in Lagrangescher und Eulerscher Form zusammengestellt. Die hier verwendete Darstellung und Notation lehnt sich an die Monographien von Chadwick (1976), Ogden (1984a) und Simo & Hughes (1998) an.

Desweiteren sollen die für die späteren Betrachtungen benötigten Spannungstensoren und -raten eingeführt werden. Der Zusammenhang zwischen der Lie Ableitung und der logarithmischen Rate des Kirchhoffschen Spannungstensors wird bereitgestellt. Die schwache Form des Impulssatzes und die Ratenform der schwachen Form des Impulssatzes – beide Ausgangspunkte für die numerische Implementation – werden außerdem angegeben.

Auf die Zuordnung von Lagrangeschen Spannungs- und Dehnungstensoren nach Hill (1968, 1978) wird eingegangen. Die natürliche Erweiterung dieser Zuordnung auf Eulersche Spannungs- und Verzerrungstensoren wird ebenfalls behandelt. Die basisfreien Formeln zur Berechnung der konjugierten Spannungen zu den referentiellen und räumlichen Henckyschen Dehnungstensoren werden angegeben. Für weiterführende Betrachtungen diesbezüglich wird hier auf Xiao, Bruhns & Meyers (1998b) und die dort zitierten Arbeiten verwiesen.

3.2 Massenbilanz

Für jeden Körper B existiert eine stetige Funktion m , die Masse des Körpers, für die $m(B) \geq 0$ gilt, so daß ein Skalarfeld, die Dichte, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ in \mathcal{B} bzw. $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X}, t)$ in \mathcal{B}_0 existiert, und für die Masse

$$m = \int_{\mathcal{B}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \, dV \quad (3.1)$$

gilt. Die Masse stellt eine vom Beobachter und von der Zeit unabhängige Größe dar. Sie ist sowohl gegenüber Änderung der Referenzkonfiguration als auch des Beobachters oder Bezugssystems invariant. Folglich verschwindet ihre materielle Zeitableitung:

$$\dot{m}(B) = 0. \quad (3.2)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\dot{J} = J \operatorname{div}(\mathbf{v}) = J \operatorname{tr} [\mathbf{D}] \quad (3.3)$$

für die materielle Zeitableitung von J und

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}), \quad (3.4)$$

wobei \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor bezeichnet, folgt aus (3.2) die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}} [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v})] \, dv = 0 \quad (3.5)$$

oder in lokaler Form die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.6)$$

3.3 Impulsbilanz

In \mathcal{B} wird der Impuls des Körpers B definitionsgemäß durch

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} \, dv \quad (3.7)$$

gegeben. Die Summe aller an den Körper angreifenden äußeren Kräfte setzt sich zusammen aus den Volumenkräften und den Oberflächenkräften:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} da, \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ die Massenkraftdichte bezeichnet und $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B}, t)$ den Spannungsvektor. Hier und im folgenden werden mit $\partial\mathcal{B}$ und $\partial\mathcal{B}_0$ der Rand von \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}_0 bezeichnet.

Nach dem Impulssatz muß die Änderung des Impulses des Körpers B gleich der Summe aller an den Körper angreifenden äußeren Kräfte sein:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} da. \quad (3.9)$$

Gleichung (3.9) ist die Impulsbilanzgleichung und stellt die Verallgemeinerung des 2. Grundgesetzes der Mechanik auf deformierbare Körper dar.

3.4 Drehimpulsbilanz

Nach dem Drehimpulssatz muß die Änderung des Drehimpulses des Körpers B bezüglich eines raumfesten Punktes \mathbf{x}_0 gleich dem resultierenden Moment aller an den Körper angreifenden Volumen- und Oberflächenkräften sein.

Der auf einen beliebigen Punkt \mathbf{x}_0 des Euklidischen Raumes bezogene Drehimpuls oder Drall des Körpers wird wie folgt definiert:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} dv. \quad (3.10)$$

Hier werden flächenhaft und volumenhaft angreifende Momente vernachlässigt, d. h. die Betrachtungen beschränken sich auf nicht polare Medien. Es gilt für das auf den Punkt \mathbf{x}_0 bezogene resultierende Moment der Volumen- und Oberflächenkräfte die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t} da. \quad (3.11)$$

Die Drehimpulsbilanzgleichung lautet damit wie folgt

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} \, dv = \int_B \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{t} \, da. \quad (3.12)$$

3.5 Bewegungsgleichungen

Nach dem Fundamentalpostulat von Cauchy hängt der Spannungsvektor \mathbf{t} an einem Punkt \mathbf{x} einer Fläche nur von dem Normalenvektor \mathbf{n} zu der Fläche ab:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t). \quad (3.13)$$

Für \mathbf{t} stetig in \mathbf{x} ist die Abhängigkeit linear (Fundamentalsatz von Cauchy) und lautet

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (3.14)$$

wobei die lineare Transformation $\boldsymbol{\sigma}$, ein objektiver Eulerscher Tensor zweiter Stufe, den Cauchyschen Spannungstensor bezeichnet. Mit (3.14) nimmt (3.9) die Form

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \mathbf{v} \, dv = \int_B \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da \quad (3.15)$$

an. Seien $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{b}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ stetig und $\boldsymbol{\sigma}$ stetig differenzierbar, ergibt eine Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems die Beziehung

$$\int_B \left[\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} - \rho \mathbf{b} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T \right] \, dv = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

oder in lokaler Form die erste Cauchysche Bewegungsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v}, \quad (3.17)$$

bzw.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad (3.18)$$

in Indexnotation, wobei hier für den Cauchyschen Spannungstensor der zweite Index die Schnittrichtung angibt und der erste Index die Spannungskomponenten. Mit (3.17) folgt aus (3.12) die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T dv = \int_{\partial \mathcal{B}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da. \quad (3.19)$$

Diese Gleichung kann auch in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T] - [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T] \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} dv \\ = \int_{\partial \mathcal{B}} \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] - [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} da. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wendet man das Gaußsche Divergenztheorem auf der rechten Seite dieser Gleichung an und berücksichtigt die Beziehung

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}^T \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] = [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T] \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.21)$$

erhält man die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}} [\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T] dv = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

oder in lokaler Form die zweite Cauchysche Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.23)$$

Für nicht polare Medien ist der Cauchysche Spannungstensor demnach symmetrisch.

3.6 Spannungstensoren

Der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist in der Momentankonfiguration \mathcal{B} definiert und hängt von der Position \mathbf{x} des Teilchens \mathbf{X} und der Zeit t ab. $\boldsymbol{\sigma}$ ist eine Eulersche Größe und ist demzufolge für eine Eulersche Beschreibung der Deformation vorgesehen. Für eine Lagrangesche und gemischte Beschreibung werden andere Spannungsmaße benötigt, die im folgenden eingeführt werden sollen.

Für die Summe der Oberflächenkräfte auf dem Rand $\partial\mathcal{B}$ in der Momentankonfiguration \mathcal{B} gilt

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{B}) \mathbf{n} \, da. \quad (3.24)$$

Dieses Integral über $\partial\mathcal{B}$ in \mathcal{B} kann mit der Formel von Nanson (2.32) auf ein Integral über einen entsprechenden Rand $\partial\mathcal{B}_0$ in \mathcal{B}_0 zurücktransformiert werden:

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dA = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{T} \mathbf{N} \, dA, \quad (3.25)$$

mit

$$\mathbf{T} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.26)$$

wobei hier \mathbf{N} den nach außen zeigenden Normalenvektor zu $\partial\mathcal{B}_0$ darstellt. Den Tensor \mathbf{T} bezeichnet man als den 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Die Transponierte \mathbf{P} von \mathbf{T} wird als nomineller Spannungstensor bezeichnet und stellt die dreidimensionale Verallgemeinerung der eindimensionalen nominellen Spannung dar:

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad P_{\alpha i} = J F_{\alpha m}^{-1} \sigma_{mi}, \quad (3.27)$$

wobei hier die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ berücksichtigt wurde. Der nominelle Spannungstensor \mathbf{P} und der 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{T} sind Zweipunkt-Tensoren und besitzen bezüglich orthonormalen Basen \mathbf{E}_α in \mathcal{B}_0 und \mathbf{e}_i in \mathcal{B} die Darstellungen

$$\mathbf{P} = P_{\alpha i} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{T} = T_{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_\alpha. \quad (3.28)$$

Zur Einführung eines nur auf die Referenzkonfiguration bezogenen Spannungstensors wird die Oberflächenkraft

$$d\mathbf{l} = t da = \boldsymbol{\sigma} da = \mathbf{T} d\mathbf{A} \quad (3.29)$$

auf ein Oberflächenelement da in \mathcal{B} betrachtet. Durch Links-Multiplikation von (3.29) mit \mathbf{F}^{-1} wird eine fiktive Lagrangesche Kraft $d\mathbf{L}$ in \mathcal{B}_0 eingeführt:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{l} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}^T d\mathbf{A} = \mathbf{S} d\mathbf{A}, \quad (3.30)$$

mit

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}. \quad (3.31)$$

Der symmetrische, zweistufige und objektive Lagrangesche Tensor \mathbf{S} wird 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor genannt.

Der Kirchhoffsche oder gewichtete Cauchysche Spannungstensor – bevorzugte Bezeichnung von Lehmann (1991) – wird wie folgt definiert

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.32)$$

Der Kirchhoffsche Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ ist, genauso wie $\boldsymbol{\sigma}$, symmetrisch, objektiv und in \mathcal{B} definiert. Der Zusammenhang zwischen \mathbf{S} und $\boldsymbol{\tau}$ lautet

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (3.33)$$

Der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{S} bzw. der Kirchhoffsche (gewichtete Cauchysche) Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ ist demzufolge ein pull-back bzw. push-forward von $\boldsymbol{\tau}$ bzw. \mathbf{S} .

Ganz analog und entweder mit Hilfe der Polarzerlegung oder multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten lassen sich weitere Spannungstensoren einführen, siehe z. B. Hoppe (1996, Tabelle 1.6). Hier sei nur noch der zurückgedrehte Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\tau} \quad (3.34)$$

angegeben. Spannungsmaße können auch über die Zuordnung von Spannungs- und Dehnungstensoren definiert werden. Siehe dazu den Abschnitt 3.10 über konjugierte Spannungsanalyse und die Einführung der arbeitskonjugierten Spannungstensoren zu den Henckyschen Dehnungstensoren.

3.6.1 Lagrangesche Form der Feldgleichungen

Mit Hilfe des nominellen Spannungstensors \mathbf{P} kann jetzt die Bilanzgleichung für den Impuls (3.9) auch als Integralausdruck über \mathcal{B}_0 und $\partial \mathcal{B}_0$ der Referenzkonfiguration angegeben werden:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{P}^T \mathbf{N} dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}} dV, \quad (3.35)$$

wobei $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}), t)$ gilt. Eine Anwendung des Divergenztheorems ergibt die erste Cauchysche Bewegungsgleichung in der Lagrangeschen Darstellung

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}_0 &= \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}} \\ \frac{\partial P_{\alpha i}}{\partial X_\alpha} + \rho_0 b_{0i} &= \rho_0 \ddot{\chi}_i. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aus (3.27) folgen unter Beachtung der Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}$ die folgenden Lagrangeschen Formen der zweiten Cauchyschen Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{F} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{P} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}^T. \quad (3.37)$$

Die Erhaltung der Masse in der Form

$$\rho_0 = J \rho \quad (3.38)$$

vervollständigt die Feldgleichungen in der Lagrangeschen Darstellung.

3.6.2 Spannungsraten

Für die materielle Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ gilt

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.39)$$

Da $\boldsymbol{\sigma}$ eine objektive Eulersche Größe ist, gilt

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t) \star \boldsymbol{\sigma} \quad (3.40)$$

bei einer Beobachtertransformation. Aus (3.39) und (3.40) folgt

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{Q}(t) \star \dot{\boldsymbol{\sigma}} + [\dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t)] \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^* [\dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t)]. \quad (3.41)$$

Die materielle Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ ist also nicht objektiv. Zur inkrementellen Formulierung von Stoffgesetzen werden objektive Zeitableitungen benötigt. Hier seien als Beispiele von mitrotierenden objektiven Zeitableitungen die Zaremba-Jaumann Rate $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J$, die Green-Naghdi Rate $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^R$ und die Lograte $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}}$ des Kirchhoffschen Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ genannt:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{W} - \mathbf{W} \boldsymbol{\tau}, \quad (3.42)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^R = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}^R - \boldsymbol{\Omega}^R \boldsymbol{\tau}, \quad (3.43)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.44)$$

Hier und im folgenden bezeichnet \mathbf{L} den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten, \mathbf{D} die Verzerrungsgeschwindigkeit, \mathbf{W} den Drehgeschwindigkeits-tensor, $\boldsymbol{\Omega}^R$ den Polar-Spin und $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ den Log-Spin.

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-1}) = -\mathbf{F}^{-1} \frac{d}{dt}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \quad (3.45)$$

erhält man aus (3.33)₁ für $\dot{\mathbf{S}}$ die Beziehung

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{-1} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L \mathbf{F}^{-T}, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T, \quad (3.46)$$

mit

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L = \mathbf{F} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \right] \mathbf{F}^T = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \boldsymbol{\tau}.$$

Der räumliche Tensor $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ ist objektiv und wird als konvektive oder Oldroydsche Zeitableitung von $\boldsymbol{\tau}$ bezeichnet, siehe Truesdell & Toupin (1960). Eigentlich aber ist $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ die Lie Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$. $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ tritt ganz natürlich in der Ratenform der schwachen Form der Momentenbilanzgleichungen auf. Im folgenden soll deshalb der Zusammenhang zwischen der Lie Ableitung und Lograte von $\boldsymbol{\tau}$ hergeleitet werden.

Mit (2.94) und (3.42) kann die folgende Beziehung zwischen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ und $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \boldsymbol{\tau} \\ &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} (\mathbf{W} + \mathbf{D})^T - (\mathbf{W} + \mathbf{D}) \boldsymbol{\tau} \\ &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Mit (A.49) folgt die folgende Beziehung zwischen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}}$ und $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J$:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^J + \boldsymbol{\tau} \mathbf{N}^{\text{Log}} - \mathbf{N}^{\text{Log}} \boldsymbol{\tau}, \quad (3.48)$$

wobei \mathbf{N}^{Log} durch Gleichung (A.50) vorgegeben wird. Damit und mit Hilfe von (3.47) läßt sich dann der folgende Zusammenhang zwischen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ und $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}}$ angeben:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{N}^{\text{Log}} + \mathbf{N}^{\text{Log}} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} \\ &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\tau} (\mathbf{B} : \mathbf{D}) + (\mathbf{B} : \mathbf{D}) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} \\ &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} + \mathbf{G} : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.49)$$

mit

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{X}_{ijkl} - \delta_{ik}\tau_{jl} - \delta_{jl}\tau_{ik}. \quad (3.50)$$

Der Tensor vierter Stufe \mathbb{X} ist symmetrisch (siehe Anhang C) und wird aus

$$\mathbb{X}_{ijkl} = \mathbb{B}_{irkl}\tau_{rj} - \mathbb{B}_{rjkl}\tau_{ri} \quad (3.51)$$

berechnet. Der Tensor \mathbb{B}_{ijkl} ist Null für den Fall, daß alle Eigenwerte des linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{B} gleich sind, d. h. für $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3$ bzw. $n = 1$ gilt

$$\mathbb{B}_{ijkl} = 0. \quad (3.52)$$

Für zwei verschiedene Eigenwerte, d. h. $\chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3$ bzw. $n = 2$ gilt

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \nu(B_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}B_{jl}), \quad (3.53)$$

mit

$$\nu = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\frac{1 + \chi_1/\chi_2}{1 - \chi_1/\chi_2} + \frac{2}{\ln(\chi_1/\chi_2)} \right). \quad (3.54)$$

Für den Fall, daß \mathbf{B} drei verschiedene Eigenwerte hat, d. h. $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_1$ bzw. $n = 3$, wird \mathbb{B}_{ijkl} durch die folgende Beziehung definiert:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{ijkl} = & \nu_3(B_{ik}^2 B_{jl} - B_{ik} B_{jl}^2) \\ & + \nu_2(B_{ik}^2 \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}^2) + \nu_1(B_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}B_{jl}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

mit

$$\begin{cases} \nu_k = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^3 (-\chi_i)^{3-k} \left(\frac{1 + \epsilon_i}{1 - \epsilon_i} + \frac{2}{\ln \epsilon_i} \right), & k = 1, 2, 3 \\ \epsilon_1 = \chi_2/\chi_3, \epsilon_2 = \chi_3/\chi_1, \epsilon_3 = \chi_1/\chi_2, \end{cases} \quad (3.56)$$

und

$$\Delta = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1). \quad (3.57)$$

Diese Formeln für \mathbb{B} werden aus der im Anhang A angegebenen basisfreien Darstellung für \mathbf{N}^{Log} hergeleitet.

3.7 Schwache Form des Impulssatzes

Die Gleichungen (3.17) bzw. (3.36) stellen die sogenannte starke Form des Impulssatzes dar. Hier wird das Prinzip der virtuellen Arbeit oder die schwache Form des Impulssatzes angegeben, von der bei der numerischen Lösung eines mechanischen Randwertproblems ausgegangen wird.

Der Teil des Randes $\partial\mathcal{B}_0$, auf dem die Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben sind, wird mit $\partial_u\mathcal{B}_0$ bezeichnet und der restliche Teil des Randes, auf dem die statischen Randbedingungen vorgegeben sind, mit $\partial_\sigma\mathcal{B}_0$. Es wird außerdem angenommen, daß $\partial_u\mathcal{B}_0$ und $\partial_\sigma\mathcal{B}_0$ disjunkte Mengen sind, d. h.

$$\partial_u\mathcal{B}_0 \cap \partial_\sigma\mathcal{B}_0 = \emptyset \quad (3.58)$$

und daß

$$\partial\mathcal{B}_0 = \partial_u\mathcal{B}_0 \cup \partial_\sigma\mathcal{B}_0 \quad (3.59)$$

gilt. Der vorgeschriebene Kraftvektor wird mit $\bar{\mathbf{t}}_0$ und der vorgegebene Verschiebungsvektor mit $\bar{\mathbf{u}}$ bezeichnet:

$$\mathbf{P}^T\mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma\mathcal{B}_0, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial_u\mathcal{B}_0. \quad (3.61)$$

Ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ über \mathcal{B}_0 wird als kinematisch zulässig bezeichnet, falls es die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt. Eine virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ wird als die Differenz der kinematisch zulässigen Verschiebungsfelder $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ und $\mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t)$ definiert. Die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ verschwindet also auf dem Rand $\partial_u\mathcal{B}_0$ von $\partial\mathcal{B}_0$:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad (3.62)$$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \partial_u\mathcal{B}_0. \quad (3.63)$$

Wird die Lagrangesche Form (3.36) der ersten Cauchyschen Bewegungsgleichung mit der virtuellen Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ skalar multipliziert und anschließend das Ergebnis über das Volumen integriert, folgt die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \text{Div}\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0\ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV. \quad (3.64)$$

Hier werden nur quasi-statische Prozesse betrachtet. Der Trägheitsterm kann deshalb wegfallen, und man erhält mit Hilfe des Gaußschen Divergenztheorems die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P}^T : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}) dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{P}^T \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV. \quad (3.65)$$

Die virtuelle Verschiebung verschwindet auf dem Rand $\partial_u \mathcal{B}_0$, und auf dem Rand $\partial_\sigma \mathcal{B}_0$ sind die Kräfte vorgeschrieben. Mit der Bezeichnung $\delta \mathbf{F}$ für den Gradienten $\text{Grad}(\delta \mathbf{u})$ der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ erhält man schließlich

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P}^T : \delta \mathbf{F} dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV. \quad (3.66)$$

Gleichung (3.66) wird Prinzip der virtuellen Arbeit genannt und stellt die schwache Form der Momentenbilanzgleichung dar.

Die Eulersche Form der Randbedingungen und des Prinzips der virtuellen Arbeit lauten

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \partial_\sigma \mathcal{B}, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial_u \mathcal{B} \quad (3.68)$$

und

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dv. \quad (3.69)$$

Zur Herleitung von (3.69) sind (2.30) und (2.32) verwendet worden. Außerdem wurden die Beziehung

$$\text{Grad}(\delta \mathbf{u}) = \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \mathbf{F}, \quad (3.70)$$

die Gleichung (3.27) und die Variablenwechselformel (2.13) mehrfach angewendet.

3.8 Ratenform der schwachen Form des Impulssatzes

Für eine Änderung $\dot{\mathbf{b}}$ und $\dot{\mathbf{t}}_0$ der Belastung nehmen für quasi-statische Prozesse die Gleichgewichtsbedingungen die folgende Form an:

$$\text{Div} \dot{\mathbf{P}} + \rho_0 \dot{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ sei ein virtuelles Geschwindigkeitsfeld in \mathcal{B} , das über zulässige Geschwindigkeitsfelder – analog zum virtuellen Verschiebungsfeld – definiert wird. Der Vektor $\boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{X}, t)$ sei das entsprechende virtuelle Geschwindigkeitsfeld in \mathcal{B}_0 . Mit dem Gaußschen Divergenztheorem folgt

$$\int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{P}}^T : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dA - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dV = 0 \quad (3.72)$$

für alle zulässigen virtuellen Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{\eta}_0$. Die Beziehung (3.72) ist die Ratenform von (3.66). Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^T : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 &= [\dot{\mathbf{F}}\mathbf{S} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}] : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [\mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{S} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}] : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [\mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T]\mathbf{F}^{-T} : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L] : \text{Grad} \boldsymbol{\eta}_0 \mathbf{F}^{-T} \\ &= [\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L] : \text{grad} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

wobei hier (1.33)₄, (2.92), (3.31) (3.46) und (3.70) angewendet wurden. Damit nimmt (3.72) die Form

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L] : \text{grad} \boldsymbol{\eta} dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{b}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dV \quad (3.74)$$

an. Diese Gleichung stellt die Ratenform oder linearisierte Form der Momentenbilanzgleichung dar. Man beachte, daß die Lie Ableitung $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ des Kirchhoffschen Spannungstensors in (3.74) ganz natürlich auftritt. Mit (2.30), (2.32) und (3.49) ergibt sich

$$\int_{\mathcal{B}} [\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} + \mathbf{G} : \mathbf{D}] : \text{grad} \boldsymbol{\eta} \frac{dv}{J} = \int_{\partial \mathcal{B}} \dot{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da + \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} dv \quad (3.75)$$

für die Ratenform der Momentenbilanzgleichung in der Eulerschen Form. Der Tensor vierter Stufe \mathbf{G} ist in Gleichung (3.50) angegeben. Die Gleichung (3.75) stellt den Ausgangspunkt für die numerische Implementation des Materialmodells dar, das in dieser Arbeit auf Basis der Log-Rate entwickelt wird.

3.9 Mechanische Energiebilanz

Eine skalare Multiplikation von (3.17) mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} unter Berücksichtigung von (3.23) ergibt

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (3.76)$$

bzw.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) - \operatorname{tr} [(\boldsymbol{\sigma} \operatorname{grad} \mathbf{v})] + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.77)$$

Die Integration über das Volumen in \mathcal{B} unter Anwendung des Divergenztheorems und Beachtung von (3.2) ergibt die mechanische Energiebilanzgleichung

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \operatorname{tr} [(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D})] \, dv. \quad (3.78)$$

Die linke Seite von (3.78) stellt die Leistung der äußeren Kräfte dar. Das erste Integral auf der rechten Seite ist die materielle Zeitableitung der kinetischen Energie. Das zweite Integral auf der rechten Seite

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{tr} [(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D})] \, dv = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{tr} [(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L})] \, dv \quad (3.79)$$

stellt die Spannungsleistung oder Formänderungsleistung dar. Mit (2.92), (3.27) und (3.79) kann man die Formänderungsleistung pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in der folgenden Form angeben:

$$\dot{w} = \operatorname{tr} [(\mathbf{P} \dot{\mathbf{F}})] = \operatorname{tr} [(\mathbf{P}(\mathbf{L}\mathbf{F}))] = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}. \quad (3.80)$$

Damit bekommt man die folgende Lagrangesche Form der mechanischen Energiebilanzgleichung:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \ddot{\boldsymbol{\chi}} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\mathbf{P}^T \mathbf{N}) \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dA = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \text{tr} [(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}})] dV. \quad (3.81)$$

Die Beziehung (3.81) ist in ähnlicher Art und Weise wie (3.78) direkt aus (3.36) ableitbar.

3.10 Konjugierte Spannungsanalyse

Der Lagrangesche Spannungstensor $\mathbf{T}^{(m)}$ ist zum Lagrangeschen Verzerrungstensor $\mathbf{E}^{(m)}$ arbeitskonjugiert, falls das doppelte Skalarprodukt aus $\mathbf{T}^{(m)}$ und der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{E}}^{(m)}$ von $\mathbf{E}^{(m)}$ die Spannungsleistung \dot{w} pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 ergibt:

$$\dot{w} = \mathbf{T}^{(m)} : \dot{\mathbf{E}}^{(m)} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}. \quad (3.82)$$

Die auf diese Art und Weise definierten Paare $(\mathbf{T}^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)})$ von Lagrange-schen Spannungs- und Verzerrungstensoren werden nach Hill (1968, 1978) arbeitskonjugierte Spannungs- und Verzerrungstensoren genannt. Danach bilden z. B. der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{S} und der Green-Lagrangesche Dehnungstensor \mathbf{E} ein arbeitskonjugiertes Paar, ebenso wie der nominelle Spannungstensor \mathbf{P} und der Deformationsgradient \mathbf{F} . Für isotropes Material bilden der zurückgedrehte Kirchhoffsche Spannungstensor $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ und der referentielle Henckysche Dehnungstensor \mathbf{H} ebenfalls ein arbeitskonjugiertes Paar.

Nach Xiao, Bruhns & Meyers (1998b) wird die folgende, mögliche Erweiterung der Zuordnung (3.82) auf Eulersche Spannungs- und Verzerrungstensoren betrachtet: (\mathbf{e}, \mathbf{t}) sei ein Paar aus einem objektiven, symmetrischen Eulerschen Verzerrungstensor \mathbf{e} und einem Spannungsmaß \mathbf{t} . Im \mathcal{O}^* Bezugssystem wird das Paar als $(\mathbf{Q} \star \mathbf{e}, \mathbf{Q} \star \mathbf{t})$ aufgefaßt. Folglich bildet der Beobachter \mathcal{O}^* das innere Produkt

$$(\mathbf{Q} \star \mathbf{t}) : \overline{(\mathbf{Q} \star \mathbf{e})}. \quad (3.83)$$

Für den \mathcal{O}^* Beobachter ist (\mathbf{e}, \mathbf{t}) ein arbeitskonjugiertes Paar, falls das innere Produkt (3.83) die Spannungsleistung \dot{w} ergibt:

$$\dot{w} = (\mathbf{Q} \star \mathbf{t}) : \overline{(\mathbf{Q} \star \mathbf{e})} = \mathbf{t} : \mathring{\mathbf{e}}^*, \quad (3.84)$$

wobei $\mathring{\mathbf{e}}^*$ die durch den Spintensor $\mathbf{\Omega}^* = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}$ definierte mitrotierende Zeitableitung von \mathbf{e} bezeichnet:

$$\mathring{\mathbf{e}}^* = \mathbf{Q}^T \star \left[\frac{d}{dt} \mathbf{Q} \star \mathbf{e} \right] = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{\Omega}^* - \mathbf{\Omega}^* \mathbf{e}. \quad (3.85)$$

Die Erweiterung (3.84) ist in einem mitbewegten System definiert. Da der Spannungstensor \mathbf{t} und die spezifische Formänderungsleistung \dot{w} objektiv sind, ist diese Erweiterung nur für Spintensoren, die eine objektive mitrotierende Zeitableitung ergeben, definiert.

Ausgehend von der Spektraldarstellung des Verzerrungstensors

$$\mathbf{e} = \sum_{\sigma=1}^n g(\chi_\sigma) \mathbf{B}_\sigma, \quad g(\chi_\sigma) = f(\sqrt{\chi_\sigma}) \quad (3.86)$$

und mit Gleichung (A.12) folgt für die mitrotierende Zeitableitung $\mathring{\mathbf{e}}^*$ die Beziehung

$$\mathring{\mathbf{e}}^* = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\beta + \mathbf{e} \mathbf{W}_{\alpha\beta} - \mathbf{W}_{\alpha\beta} \mathbf{e} \quad (3.87)$$

mit

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} g'(\chi_\alpha) & \text{für } \alpha = \beta \\ \frac{g(\chi_\alpha) - g(\chi_\beta)}{\chi_\alpha - \chi_\beta} & \text{für } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (3.88)$$

siehe Anhang **A**, und

$$\mathbf{W}_{\alpha\beta} = \mathbf{W} + \sum_{\alpha \neq \beta}^n h(\chi_\alpha / \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta, \quad (3.89)$$

wobei hier für den Spintensor $\mathbf{\Omega}^*$ die Beziehung (2.114) verwendet wurde. χ_σ bezeichnen die Eigenwerte des linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{B} , \mathbf{B}_σ die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen, und f ist die Skalierungsfunktion aus Gleichung (2.65). Mit

$$\mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta (\chi_\alpha + \chi_\beta) - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\beta (\chi_\alpha - \chi_\beta) \quad (3.90)$$

folgt

$$\mathring{\mathbf{e}}^* = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left[g_{\sigma\tau}(\chi_\alpha + \chi_\beta) + (g(\chi_\alpha) - g(\chi_\beta))h\left(\frac{\chi_\alpha}{\chi_\beta}\right) \right] \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta, \quad (3.91)$$

$$\mathring{\mathbf{e}}^* = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \rho(\chi_\alpha, \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta = \mathbf{L}(\mathbf{B})[\mathbf{D}], \quad (3.92)$$

$$\rho(\chi_\alpha, \chi_\beta) = [(\chi_\alpha + \chi_\beta) + (\chi_\alpha - \chi_\beta)h(\chi_\alpha/\chi_\beta)] g_{\alpha\beta}. \quad (3.93)$$

Der Tensor vierter Stufe $\mathbf{L}(\mathbf{B})$ wird durch die Beziehung (3.92) definiert. \mathbf{L} ist invertierbar und besitzt die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbb{L}_{ijkl} = \mathbb{L}_{jikl} = \mathbb{L}_{ijlk} = \mathbb{L}_{klij}, \quad (3.94)$$

siehe (3.104). Mit (3.92) kann die Spannungsleistung \dot{w} in der folgenden Form angegeben werden:

$$\dot{w} = \mathbf{t} : \mathbf{L}[\mathbf{D}]. \quad (3.95)$$

Daraus und aus Gleichung (3.82) folgt

$$\mathbf{t} : \mathbf{L}[\mathbf{D}] = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \quad (3.96)$$

für alle $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{D} . Da \mathbf{L} eine symmetrische lineare Transformation ist, folgt aus der letzten Beziehung

$$\mathbf{L}[\mathbf{t}] = \boldsymbol{\tau} \quad (3.97)$$

bzw. die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}^{-1}[\boldsymbol{\tau}] \quad (3.98)$$

für die Spannung \mathbf{t} . Mit Hilfe der Identität (1.33)₃ kann die Beziehung für \dot{w} in die Form

$$\dot{w} = (\mathbf{R}^T \star \mathbf{t}) : (\mathbf{R}^T \star \mathring{\mathbf{e}}^*) \quad (3.99)$$

gebracht werden. \mathbf{R} ist der Rotationstensor. Das Spannungsmaß $(\mathbf{R}^T \star \mathbf{t})$ ist eine Rückwärtsrotation von \mathbf{t} und folglich ein Lagrangescher Spannungstensor.

Die Zuordnung nach (3.99) bzw. (3.84) stimmt dann mit der Zuordnung nach Hill (1968) überein, wenn $(\mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{e}}^*)$ die materielle Zeitableitung eines Lagrangeschen Verzerrungsmaßes ist:

$$\mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{e}}^* = \mathbf{R}^T \star \mathbf{Q}^T \star \overline{(\mathbf{Q} \star \mathbf{e})}. \quad (3.100)$$

Für den Fall $\mathbf{Q}^T = \mathbf{R}$ ist $(\mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{e}}^*)$ die materielle Zeitableitung des Lagrangeschen Verzerrungstensors $(\mathbf{R}^T \star \mathbf{e})$, und die Zuordnung nach Gleichung (3.99) bzw. (3.84) stimmt mit der Zuordnung nach Hill (1968) überein. Die objektive mitrotierende Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^*$ ist dann einfach die Green-Naghdi-Rate:

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}^* = \overset{\circ}{\mathbf{e}}^R = \mathbf{L}(\mathbf{B})[\mathbf{D}] = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \rho(\chi_\alpha, \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta, \quad (3.101)$$

wobei die Funktion $\rho(\chi_\alpha, \chi_\beta)$ durch Gleichung (3.93) gegeben wird und für die Green-Naghdi Rate

$$h = \left[1 - \sqrt{\chi_\alpha / \chi_\beta} \right] \left[1 + \sqrt{\chi_\alpha / \chi_\beta} \right]^{-1} \quad (3.102)$$

gilt.

Im folgenden soll mit Hilfe der Eigenschaften (2.54)–(2.56) von Eigenprojektionen der vierstufige Tensor $\mathbf{L}(\mathbf{B})$ bestimmt werden und durch (3.98) ebenfalls die zu jedem Eulerschen Verzerrungstensor \mathbf{e} arbeitskonjugierte Spannung \mathbf{t} nach Hill (1978) angegeben werden. $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ seien zwei Tensoren zweiter Stufe. Nach Xiao, Bruhns & Meyers (1998b) wird das Kroneckerprodukt $\mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_2$ von \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 durch die folgende Beziehung eingeführt:

$$(\mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_2)[\mathbf{X}] = \mathbf{H}_1 \mathbf{X} \mathbf{H}_2, \quad (3.103)$$

wobei \mathbf{X} einen beliebigen Tensor zweiter Stufe bezeichnet. Das Kroneckerprodukt $(\mathbf{H}_1 * \mathbf{H}_2)$ ist eine lineare Transformation, die einen Tensor zweiter Stufe auf einen anderen Tensor zweiter Stufe abbildet, d. h. ein Tensor vierter Stufe. Mit Hilfe des Kroneckerproduktes (3.103) läßt sich dann aus (3.92) die Beziehung

$$\mathbf{L}(\mathbf{B}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \rho(\chi_\alpha, \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha * \mathbf{B}_\beta \quad (3.104)$$

ableiten. Die Beziehung (3.104) ist die Spektraldarstellung des vierstufigen Tensors \mathbf{L} . Die Inverse wird also durch die Beziehung

$$\mathbf{L}^{-1} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \rho^{-1}(\chi_\alpha, \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha * \mathbf{B}_\beta \quad (3.105)$$

gegeben und existiert unter der Bedingung, daß $\rho(\chi_\alpha, \chi_\beta) \neq 0$ bzw.

$$(\chi_\alpha + \chi_\beta) + (\chi_\alpha - \chi_\beta)h(\chi_\alpha/\chi_\beta) \neq 0, \quad (3.106)$$

$$\forall \chi_\alpha, \chi_\beta > 0, \quad \chi_\alpha \neq \chi_\beta$$

gilt. Aufgrund der Tatsache, daß $g(\chi_\alpha)$ eine monoton steigende Funktion ist, gilt die Bedingung $g_{\alpha\beta} \neq 0$. Diese Bedingung ist bei der Herleitung von (3.106) berücksichtigt worden. Der Polar-Spin $\mathbf{\Omega}^R$ bzw. die Spinfunktion (3.102) erfüllt die Bedingung (3.106). Aus (3.98) und (3.105) folgt die Beziehung

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}^{-1}[\boldsymbol{\tau}] = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \rho^{-1}(\chi_\alpha, \chi_\beta) \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\beta \quad (3.107)$$

bzw.

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n (2\sqrt{\chi_\alpha \chi_\beta})^{-1} \left(\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{g(\chi_\alpha) - g(\chi_\beta)} \right) \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\beta \quad (3.108)$$

für die arbeitskonjugierte Spannung eines beliebigen Eulerschen Verzerrungstensors \mathbf{e} nach Hill (1978).

Für den räumlichen Henckyschen Dehnungstensor \mathbf{h} ist

$$g(\chi_\alpha) = \frac{1}{2} \ln \chi_\alpha. \quad (3.109)$$

Die zu \mathbf{h} arbeitskonjugierte Spannung wird mit $\boldsymbol{\pi}$ bezeichnet. Mit (3.109) folgt aus (3.108)

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \sqrt{\chi_\alpha^{-1} \chi_\beta^{-1}} \left(\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{\ln \chi_\alpha - \ln \chi_\beta} \right) \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\beta. \quad (3.110)$$

Diese Beziehung ist unabhängig von den jeweiligen Symmetrieeigenschaften des Materials und ist demzufolge auch gültig für anisotropes Materialverhalten. Mit (1.33)₃, der Beziehung (2.129) und Gleichung (2.62) ergibt sich für die Spannungsleistung die Beziehung

$$\dot{w} = \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{h}}^R = (\mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi}) : (\mathbf{R}^T \star \dot{\mathbf{h}}^R) = \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{H}} \quad (3.111)$$

mit

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{R} \star \mathbf{\Pi}, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{\alpha, \sigma=1}^n \sqrt{\chi_\alpha^{-1} \chi_\beta^{-1}} \left(\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{\ln \chi_\alpha - \ln \chi_\beta} \right) \mathbf{C}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{C}_\beta. \quad (3.113)$$

Der Lagrangesche Spannungstensor $\mathbf{\Pi}$ ist die Rückwährtsdrehung von $\boldsymbol{\pi}$ mit \mathbf{R} und bildet unabhängig von den jeweiligen Symmetrieeigenschaften nach (3.111)₃ mit dem referentiellen Henckyschen Dehnungstensor \mathbf{H} ein arbeitskonjugiertes Paar.

Für isotropes Material ist \mathbf{B}_β auch eine Eigenprojektion des Kirchhoffschen Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$. $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{B} sind coaxial und die Reihenfolge von $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{B}_β in Gleichung (3.110) kann deshalb vertauscht werden. Unter Beachtung von Gleichungen (2.54) und (2.55) und der Tatsache, daß für $\alpha \rightarrow \beta$, $(\chi_\alpha - \chi_\beta)/(\ln \chi_\alpha - \ln \chi_\beta) \rightarrow \chi_\alpha$ gilt, erhält man für isotropes Material aus Gleichung (3.110) und aus (3.113)

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\alpha}^n \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{\Pi} = \sum_{\alpha}^n \tau_\alpha \mathbf{C}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (3.114)$$

Durch Einsetzen der Sylvesterformel (2.57) in (3.108) bzw. (3.97) folgt die folgende basisfreie Darstellung für \mathbf{t} bzw. für $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{t} = \sum_{i,j=0}^{r-1} \varrho_{ij} \mathbf{B}^i \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}^j, \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j=0}^{r-1} \eta_{ij} \mathbf{B}^i \mathbf{t} \mathbf{B}^j. \quad (3.115)$$

Die Koeffizienten ϱ_{ij} und η_{ij} sind symmetrisch und Funktionen der Eigenwerte χ_i von \mathbf{B} . η_{ij} erhält man aus den folgenden Formeln für ϱ_{ij} , indem man ρ_{ij}^{-1} durch ρ_{ij} ersetzt:

$$1. \ r = 1: \chi_1 = \chi_2 = \chi_3.$$

$$\varrho_{00} = \rho_{11}^{-1} \quad (3.116)$$

$$2. \ r = 2: \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3.$$

$$\varrho_{00} = (\chi_1 - \chi_2)^{-2} [\chi_2^2 \rho_{11}^{-1} + \chi_1^2 \rho_{22}^{-1} - 2\chi_1 \chi_2 \rho_{12}^{-1}] \quad (3.117)$$

$$-\varrho_{01} = (\chi_1 - \chi_2)^{-2} [\chi_2 \rho_{11}^{-1} + \chi_1 \rho_{22}^{-1} - (\chi_1 + \chi_2) \rho_{12}^{-1}] \quad (3.118)$$

$$\varrho_{11} = (\chi_1 - \chi_2)^{-2} [\rho_{11}^{-1} + \rho_{22}^{-1} - 2\rho_{12}^{-1}] \quad (3.119)$$

3. $r = 3$: $\chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3$.

$$\varrho_{00} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 \chi_{jk}^2 + 2\rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki} \chi_j^k \chi_k^i) \quad (3.120)$$

$$\varrho_{11} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 \chi_{jk}^2 + 2\rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki} \chi_{jk} \chi_{ki}) \quad (3.121)$$

$$\varrho_{22} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 + 2\rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki}) \quad (3.122)$$

$$\varrho_{01} = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 \chi_{jk} \chi_j^k + \rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki} (I_3 + I_2 \chi_k)) \quad (3.123)$$

$$\varrho_{02} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 \chi_j^k + \rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki} \chi_k \chi_{ij}) \quad (3.124)$$

$$\varrho_{12} = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{(ijk)} (\rho_{ii}^{-1} \bar{\chi}_{jk}^2 \chi_{jk} + \rho_{ij}^{-1} \bar{\chi}_{jk} \bar{\chi}_{ki} (I_1 + \chi_k)) \quad (3.125)$$

Die Funktion ρ wird durch die Beziehung

$$\rho^{-1}(\chi_\alpha, \chi_\beta) = (2\sqrt{\chi_\alpha \chi_\beta})^{-1} \left[\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{g(\chi_\alpha) - g(\chi_\beta)} \right] \quad (3.126)$$

gegeben. Hier bedeutet $\sum_{(ijk)}$ die Summe für $(ijk) = (123), (231), (312)$, $g'_k = g'(\chi_k)$, $\bar{\chi}_{jk} = \chi_j - \chi_k$, $\chi_{jk} = \chi_j + \chi_k$, $\chi_j^k = \chi_j \chi_k$, $\rho_{ij} = \rho(\chi_i, \chi_j)$, $\rho_{ii} = \lim_{\chi_i \rightarrow \chi_j} \rho(\chi_i, \chi_j)$, I_1, I_2 und I_3 bezeichnen die Hauptinvarianten von \mathbf{B} . Δ wird durch Gleichung (3.57) gegeben.

Kapitel 4

Thermodynamische Grundlagen

Das Verhalten eines Materials wird durch konstitutive Beziehungen festgelegt. Die mechanischen konstitutiven Gleichungen werden in Form von tensoriellen Verknüpfungen zwischen der Spannung und dem Verzerrungsmaß eines der im Kapitel 3 besprochenen arbeitskonjugierten Paare angegeben. Zur Festlegung der allgemeinen Form dieser konstitutiven Beziehungen sowie zur Angabe der Restriktionen, die durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bzw. die Entropieungleichung auf die allgemeine Form der konstitutiven Gleichungen auferlegt wird, wird in diesem Kapitel auf die *Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen* eingegangen. Die hier gewählte Darstellung der Theorie lehnt sich an Arbeiten von Coleman & Noll (1963), Coleman & Gurtin (1967) und Lehmann (1984, 1991) an.

4.1 Einleitung

Zusätzlich zu der Wärmeleitung treten bei der Deformation von Körpern weitere dissipative Effekte auf. Zur phänomenologischen Beschreibung der Effekte existieren drei mögliche unabhängige Konzepte: die Einführung dissipativer Spannungen, eine Funktionalbeschreibung (Geschichtsintegrale) und eine Parameterbeschreibung (interne Zustandsvariablen), siehe Coleman & Gurtin (1967). Keine der drei Methoden kann so allgemein formuliert werden, daß sich die anderen daraus ableiten lassen. Jedes der genannten Konzepte besitzt seinen Anwendungsbereich.

Die Parameterbeschreibung hat sich für die Plastizitätstheorie und Schädigungsmodellierung bewährt und wird deshalb auch in dieser Arbeit verwendet. Bei diesem Konzept wird zur Beschreibung des inneren Zustands und der Geschichtabhängigkeit des Materials zusätzlich zu den

externen unabhängigen Zustandsvariablen eine Menge \mathbf{a} von sogenannten internen Zustandsvariablen eingeführt:

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N\}. \quad (4.1)$$

Es wird dabei von den folgenden grundlegenden Annahmen ausgegangen (Lehmann 1991):

- Der geschädigte materielle Körper kann trotz der vorhandenen Mikrodefekte als ein klassisches Kontinuum behandelt werden.
- Der thermodynamische Zustand jedes Materialelementes wird durch die Angabe der aktuellen Werte eines Satzes externer und der Menge der internen Zustandsvariablen eindeutig und vollständig beschrieben, auch wenn der Körper nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist.

Es bedeutet, daß die lokalen, mechanischen und thermischen Variablen, wie der nominelle Spannungstensor \mathbf{P} , der Wärmeflußvektor \mathbf{q} , die spezifische freie Helmholtzsche Energie ψ und die Entropie s oder die Temperatur Θ durch Konstitutivgleichungen bestimmt werden können, wenn die externen unabhängigen Zustandsvariablen, wie z. B.

- der Deformationsgradient \mathbf{F} oder die Verzerrung,
- die absolute Temperatur Θ oder die Entropie s

und die Menge \mathbf{a} der internen Zustandsvariablen bekannt sind. Die interne Zustandsvariable \mathbf{a}_i kann ein Vektor oder Tensor gerader Stufe sein. Für eine mathematisch exakte Beschreibung werden unendlich viele interne Zustandsvariablen benötigt. Im Rahmen einer phänomenologischen Theorie ist aber eine Beschränkung auf eine endliche Anzahl N von Zustandsvariablen erforderlich. Im Falle von elastisch-plastischem Materialverhalten mit Schädigung ist \mathbf{a} die Menge

$$\mathbf{a} = \{\boldsymbol{\alpha}, \kappa, \mathbf{d}\}, \quad (4.2)$$

wobei $\boldsymbol{\alpha}$ die kinematische Verfestigungsvariable bezeichnet, κ die isotrope Verfestigungsvariable und \mathbf{d} die Schädigungsvariable. Die Evolutionsgleichung für die interne Zustandsvariable \mathbf{a}_i wird durch eine nicht lineare

Funktion gegeben, die von der Temperatur Θ , und dem Deformationsgradienten \mathbf{F} und allen inneren Zustandsvariablen, also der Menge \mathbf{a} abhängt:

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i(\Theta, \mathbf{F}, \mathbf{a}), \quad (4.3)$$

wobei der übergestellte Kreis \circ eine geeignete objektive Zeitableitung kennzeichnet.

Das Ziel der thermodynamischen Betrachtung bzw. Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen ist es, die Einschränkungen, die von dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung auf die konstitutiven Beziehungen auferlegt werden, zu bestimmen. Es wird deshalb hier wie folgt vorgegangen: Zuerst werden der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik angegeben. Danach wird mit Hilfe des 1. Hauptsatzes die spezifische Wärmequelle aus dem 2. Hauptsatz eliminiert und die Clausius-Duhem-Ungleichung bestimmt. Anschließend wird dann ein thermodynamischer Prozeß definiert und die Notwendigkeit von konstitutiven Gleichungen gezeigt. Zum Schluß werden dann die allgemeinen Formen der konstitutiven Beziehungen angegeben und die Folgerungen aus dem 2. Hauptsatz in Form der kalorischen und thermischen Zustandsgleichungen und der dissipativen Ungleichung.

4.2 Energiebilanz

Die Gesamtenergie des Körpers B wird mit W bezeichnet. Sie besteht aus der kinetischen Energie K und der inneren Energie U :

$$W = K + U. \quad (4.4)$$

Für die kinetische Energie K gilt

$$K = \frac{1}{2} \int_B \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv \quad (4.5)$$

und für die innere Energie U gilt

$$U = \int_m u dm = \int_B \rho u dv, \quad (4.6)$$

wobei ρ die Dichte bezeichnet, \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor und u die spezifische innere Energie. Die zugeführte Leistung besteht aus der Wärmeleistung Q und der Leistung der äußeren Kräfte P_a . Die Leistung der

äußeren Kräfte setzt sich aus der Leistung der Volumen- ($\rho \mathbf{b}$) und der Oberflächenkräfte \mathbf{t} zusammen:

$$P_a = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da. \quad (4.7)$$

Die sich im Körper befindenden spezifischen Wärmequellen werden mit r bezeichnet und der über die Oberfläche einfließende Wärmestromvektor und die Wärme mit \mathbf{q} und h . Es gilt

$$h = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}, \quad (4.8)$$

wobei \mathbf{n} den nach außen zeigenden Normalenvektor der Fläche da bezeichnet. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß einfließende Wärmeströme eine Zunahme der Energie des Körpers ergeben. Für die Wärmeleistung gilt dann

$$Q = \int_{\mathcal{B}} \rho r \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} h \, da. \quad (4.9)$$

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik besagt, daß die zeitliche Änderung \dot{W} der Gesamtenergie W des Körpers gleich der zugeführten Leistung sein muß:

$$\dot{W} = P_a + Q. \quad (4.10)$$

Mit (4.4) – (4.9) und unter Berücksichtigung von (3.14) und (3.17) erhält man aus (4.10) die schwache Form des 1. Hauptsatzes

$$\int_{\mathcal{B}} \rho \dot{u} \, dv = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r) \, dv. \quad (4.11)$$

Die lokale Form von (4.11) lautet

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r. \quad (4.12)$$

Mit (2.30), (2.32) und (4.11) läßt sich die folgende Lagrangesche Darstellung der Energiebilanz angeben:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} (\operatorname{tr} [(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}})] - \operatorname{Div} \mathbf{Q} + \rho_0 r) \, dV \quad (4.13)$$

oder in lokaler Form

$$\rho_0 \dot{u} = \operatorname{tr} [(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}})] - \operatorname{Div} \mathbf{Q} + \rho_0 r, \quad (4.14)$$

wobei hier

$$\mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} \quad (4.15)$$

den auf die Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 bezogenen Wärmestromvektor bezeichnet.

4.3 Entropieungleichung

Für die gesamte Entropie S des Körpers gilt

$$S = \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dv, \quad (4.16)$$

wobei s die spezifische Entropie bezeichnet. Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik muß die zeitliche Änderung der Entropie S größer oder gleich der zugeführten Wärmeleistung sein:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dv \geq \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho r}{\Theta} \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} \, da. \quad (4.17)$$

Hier bezeichnet $\Theta > 0$ die absolute Temperatur. Eine Anwendung des Divergenztheorems ergibt

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\Theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) \, dv \geq 0 \quad (4.18)$$

bzw. in lokaler Form die sogenannte Gibbs-Duhem-Ungleichung

$$\rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\Theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \geq 0. \quad (4.19)$$

Mit (2.30), (2.32) und (4.15) erhält man die folgende materielle Form der Gibbs-Duhem-Ungleichung:

$$\rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r}{\Theta} + \operatorname{Div} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \geq 0. \quad (4.20)$$

Die spezifische Entropieerzeugungsrate $\dot{\gamma}$ wird wie folgt definiert

$$\rho \dot{\gamma} = \rho \dot{s} - \frac{\rho r}{\Theta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta}, \quad (4.21)$$

$$\rho_0 \dot{\gamma} = \rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r}{\Theta} + \text{Div} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}. \quad (4.22)$$

Damit lautet die Gibbs-Duhem-Ungleichung in Eulerscher und Lagrange-scher Form wie folgt

$$\rho \dot{\gamma} \geq 0, \quad (4.23)$$

$$\rho_0 \dot{\gamma} \geq 0. \quad (4.24)$$

4.4 Clausius-Duhem-Ungleichung

Man erhält die folgenden fundamentalen Ungleichungen, die sowohl den 1. als auch den 2. Hauptsatz der Thermodynamik beinhalten, indem man die spezifische Wärmequelle r mit Hilfe der Energiebilanzgleichungen (4.12) und (4.14) aus den Gibbs-Duhem-Ungleichungen eliminiert:

$$\rho \dot{s} + \text{div} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} - \frac{1}{\Theta} (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \text{div} \mathbf{q}) \geq 0, \quad (4.25)$$

$$\rho_0 \dot{s} + \text{Div} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} - \frac{1}{\Theta} (\rho \dot{u} - \text{tr} [(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}})] + \text{Div} \mathbf{Q}) \geq 0. \quad (4.26)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right) = \frac{\text{div} \mathbf{q}}{\Theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad} \Theta}{\Theta^2} \quad (4.27)$$

und der entsprechenden Beziehung für $\text{Div} (\mathbf{Q}/\Theta)$ und mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{g} = \text{grad} \Theta, \quad \mathbf{G} = \text{Grad} \Theta \quad (4.28)$$

erhält man

$$\Theta \rho \dot{\gamma} = \rho (\Theta \dot{s} - \dot{u}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, \quad (4.29)$$

$$\Theta \rho_0 \dot{\gamma} = \rho_0 (\Theta \dot{s} - \dot{u}) + \text{tr} [(\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}})] - \Theta^{-1} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \quad (4.30)$$

Durch die einfache Legendre-Transformation

$$\psi = u - \Theta s \quad (4.31)$$

wird hier die spezifische freie Energie ψ eingeführt. Leitet man die Gleichung (4.31) nach der Zeit ab und setzt das Ergebnis in die letzten Ungleichungen ein, erhält man die Clausius-Duhem-Ungleichung in der Eulerschen und in der Lagrangeschen Darstellung:

$$\Theta \rho \dot{\gamma} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s \dot{\Theta}) - \Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, \quad (4.32)$$

$$\Theta \rho_0 \dot{\gamma} = \text{tr} \left[(\mathbf{P} \dot{\mathbf{F}}) \right] - \rho_0(\dot{\psi} + s \dot{\Theta}) - \Theta^{-1} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \quad (4.33)$$

4.5 Zerlegung der Spannungsleistung

Mit Gleichung (2.101) kann die Spannungsleistung \dot{w} additiv in einen elastischen oder reversiblen Anteil \dot{w}^e und einen inelastischen oder nicht reversiblen Anteil \dot{w}^i wie folgt zerlegt werden:

$$\dot{w} = \dot{w}^e + \dot{w}^i \quad (4.34)$$

mit

$$\dot{w}^e = \text{tr} \left[(\mathbf{P} \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^i) \right], \quad \dot{w}^i = \text{tr} \left[(\mathbf{P} \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i) \right]. \quad (4.35)$$

Nach Lehmann (1984) kann eine weitere Zerlegung von \dot{w}^i in einen gespeicherten Anteil und einen rein dissipativen Anteil vorgenommen werden. Der gespeicherte Anteil kann unter besonderen Umständen reversibel sein. Hier wird kein Gebrauch von dieser Zerlegung gemacht.

Mit (4.34) nimmt die Clausius-Duhem-Ungleichung (4.32) die folgende Form an:

$$\Theta \rho \dot{\gamma} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{tr} \left[(\bar{\mathbf{P}} \dot{\mathbf{F}}^e) \right] + \dot{w}^i - \rho(\dot{\psi} + s \dot{\Theta}) - \Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0, \quad (4.36)$$

wobei hier die Bezeichnungen

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^i \mathbf{P}, \quad (4.37)$$

$$\dot{w}^i = \frac{\rho}{\rho_0} \text{tr} \left[(\bar{\mathbf{P}} \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i \mathbf{F}^{-i}) \right] \quad (4.38)$$

verwendet werden. Die Spannung $\bar{\mathbf{P}}$ ist ein Zweipunkt-Tensor mit einem Bein in der fiktiven Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ und einem in der Momentankonfiguration \mathcal{B} , siehe Nemat-Nasser (1982).

Hier wird eine additive Aufspaltung der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{H}}$ des referentiellen Henckyschen Verzerrungstensors \mathbf{H} in einen elastischen Anteil $\dot{\mathbf{H}}^e$ und einen elastisch-inelastischen Anteil $\dot{\mathbf{H}}^{ei}$ angenommen:

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^e + \dot{\mathbf{H}}^{ei}.$$

Für den elastischen Anteil \dot{w}^e und inelastischen Anteil \dot{w}^i der Spannungsleistung gelten deshalb

$$\dot{w}^e = \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}^e, \quad \dot{w}^i = \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}^{ei}, \quad (4.39)$$

wobei $\mathbf{\Pi}$ den zu \mathbf{H} arbeitskonjugierten Spannungstensor bezeichnet. Damit erhält man die folgende Lagrangesche Form der Clausius-Duhem-Ungleichung:

$$\Theta \rho_0 \dot{\gamma} = \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}^e + \dot{w}^i - \rho_0(\dot{\psi} + s \dot{\Theta}) - \Theta^{-1} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0. \quad (4.40)$$

4.6 Thermodynamischer Prozeß

Ein thermodynamischer Prozeß oder ein inelastischer Deformationsvorgang wird durch die 9 Funktionen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ortsvektor } \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \\ \text{nomineller Spannungstensor } \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{X}, t), \\ \text{Volumenkraftvektor } \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t), \\ \text{Wärmeflußvektor } \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{X}, t), \\ \text{Wärmequelle } r = r(\mathbf{X}, t), \\ \text{spezifische innere Energie } u = u(\mathbf{X}, t), \\ \text{spezifische Entropie } s = s(\mathbf{X}, t), \\ \text{absolute Temperatur } \Theta = \Theta(\mathbf{X}, t) > 0 \text{ und} \\ \text{Menge der inneren Zustandsvariablen } \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t), \end{array} \right. \quad (4.41)$$

die alle vom materiellen Punkt \mathbf{X} und der Zeit t abhängen, beschrieben. Die Menge (4.41) stellt einen *thermodynamischen Prozeß* dar, falls sie für alle Punkte \mathbf{X} des Körpers B und für alle Zeiten t definiert ist, die Bilanzgleichungen für den Impuls und Drehimpuls (3.36) und (3.37) erfüllt und mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik (4.14) kompatibel ist.

Die Menge (4.41) und die Bilanzgleichungen für den Impuls (3.36), Drehimpuls (3.37) und Energie (4.12) stellen aber ein unterbestimmtes Gleichungssystem zur Festlegung eines thermodynamischen Prozesses dar.

Um das System bestimmt bzw. lösbar zu machen, werden deshalb konstitutive Gleichungen, die die Abhängigkeit von u bzw. ψ , s , $\bar{\mathbf{P}}$ und \mathbf{q} von den Zustandsvariablen angeben, postuliert.

4.7 Konstitutive Annahmen – Dehnungsraum

Nach Lehmann (1984) wird hier angenommen, daß die spezifische innere Energie u eine eindeutige Funktion der Zustandsvariablen ist. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß der inelastische Anteil \mathbf{F}^i des Deformationsgradienten keine Zustandsvariable ist. Die spezifische innere Energie u hängt demzufolge nur von dem elastischen Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten, der spezifischen Entropie s und der Menge \mathbf{a} der internen Zustandsvariablen ab:

$$u = u(\mathbf{F}^e, s, \mathbf{a}). \quad (4.42)$$

Daraus folgt, daß die spezifische freie Energie ψ eine Funktion des elastischen Anteils \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten, der absoluten Temperatur Θ und der Menge \mathbf{a} der internen Zustandsvariablen ist, da sie durch die einfache Legendre-Transformation (4.31) definiert wird:

$$\psi = \psi(\mathbf{F}^e, \Theta, \mathbf{a}). \quad (4.43)$$

Für s , $\bar{\mathbf{P}}$ und \mathbf{q} werden die folgenden konstitutiven Beziehungen postuliert:

$$\begin{cases} s = s(\mathbf{F}^e, \Theta, \mathbf{a}), \\ \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^e, \Theta, \mathbf{a}), \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{F}^e, \Theta, \mathbf{a}). \end{cases} \quad (4.44)$$

Sind \mathbf{b} und r vorgegeben und \mathbf{a} aus (4.3) bekannt, u aus (4.42) bzw. ψ aus (4.43) und s , $\bar{\mathbf{P}}$ und \mathbf{q} aus (4.44), können dann die Deformation $\boldsymbol{\chi}$ und das Temperaturfeld Θ aus (3.36) und (4.14) bestimmt werden. Ein thermodynamischer Prozeß (4.41) soll zulässig sein, wenn er die konstitutiven Beziehungen (4.44) erfüllt. Zur Einschränkung der konstitutiven Gleichungen werden das Prinzip der lokalen Wirkung, der materiellen Objektivität, der Äquipräsenz etc. verwendet. Bei der Aufstellung von (4.44) wurde das Prinzip der Äquipräsenz und der lokalen Wirkung verwendet, siehe Truesdell & Toupin (1960) und Truesdell & Noll (1965). Das Prinzip der materiellen Objektivität beschränkt die konstitutiven Funktionen auf isotrope Tensorfunktionen.

Für die thermodynamische Konsistenz muß jeder Prozeß die Clausius-Duhem-Ungleichung (4.32) für jeden materiellen Punkt \mathbf{X} von B und Zeitpunkt t erfüllen. Für die materielle Zeitableitung $\dot{\psi}$ der freien Energie ψ folgt aus (4.43) die Beziehung

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}^e} : \dot{\mathbf{F}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}}. \quad (4.45)$$

Setzt man (4.45) in (4.33) ein, folgt daraus die folgende Beziehung für die spezifische Entropieproduktionsrate in einem zulässigen Prozeß:

$$\dot{w}^i + \left(\frac{\rho}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}^e} \right) : \dot{\mathbf{F}}^e - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + s \right) \dot{\Theta} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} - (\Theta)^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \quad (4.46)$$

Damit diese Ungleichung für jede Wahl von $\dot{\mathbf{F}}^e$ und $\dot{\Theta}$ befriedigt wird, müssen ihre Koeffizienten in Gleichung (4.46) verschwinden. Diese Überlegung oder Argumentation ist Standard und geht auf Coleman & Noll (1963) zurück. Man erhält daraus die thermische und kalorische Zustandsgleichung

$$\bar{\mathbf{P}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}^e}, \quad (4.47)$$

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \quad (4.48)$$

und die dissipative Ungleichung

$$-\dot{w}^i + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \leq 0. \quad (4.49)$$

Die beiden ersten Terme der dissipativen Ungleichung (4.49) stellen den mechanischen Anteil der Dissipation dar, der dritte Term den thermischen Anteil. Es wird gefordert, daß die auf reiner Wärmeleitung basierende Dissipation stets positiv ist. Dadurch ergibt sich die Verschärfung

$$-\dot{w}^i + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}} \leq 0, \quad (4.50)$$

$$\Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \leq 0 \quad (4.51)$$

der dissipativen Ungleichung (4.49).

Die thermodynamischen Kräfte können in einem Vektor \mathbf{Y} zusammengefaßt werden und die thermodynamischen Flüsse in einem Vektor \mathbf{J} :

$$\mathbf{Y} = \left\{ \frac{\rho}{\rho_0} \bar{\mathbf{P}}, -\rho(\partial\psi/\partial \mathbf{a}), -\Theta^{-1} \mathbf{g} \right\}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{J} = \{ \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i \mathbf{F}^{-i}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{q} \}. \quad (4.53)$$

Die dissipative Ungleichung (4.49) nimmt mit der vereinfachten Notation die folgende Form an:

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{J} \geq 0. \quad (4.54)$$

Im allgemeinen hängt jede Komponente $(\mathbf{J})_i$ des generalisierten Flußvektors \mathbf{J} von der Geschichte aller anderen Komponenten des thermodynamisch arbeitskonjugierten Kraftvektors \mathbf{Y} ab. Wird aber angenommen, daß die Komponente $(\mathbf{J})_i$ nur von der entsprechenden thermodynamisch arbeitskonjugierten Kraft $(\mathbf{Y})_i$ abhängt, läßt sich die Existenz eines Dissipationspotentials

$$F = F[(\mathbf{Y})_i; \mathbf{a}] \quad (4.55)$$

nachweisen. Die Größen in (4.55), die vor dem Semikolon stehen, bezeichnen die Variablen; die nachfolgenden die Parameter. $(\mathbf{J})_i$ kann dann nach Rice (1971) aus der partiellen Ableitung des Potentials (4.55) nach der Kraft bestimmt werden:

$$(\mathbf{J})_i = \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{Y})_i}. \quad (4.56)$$

Wenn man das Dissipationspotential F_i als eine homogene und konvexe Funktion von $(\mathbf{Y})_i$ wählt, wird die Dissipationsungleichung (4.49) bzw. der 2. Hauptsatz der Thermodynamik automatisch erfüllt.

4.8 Konstitutive Annahmen – Spannungsraum

Durch eine doppelte Legendre-Transformation wird hier die spezifische freie Enthalpie oder das Gibbsche Potential Φ eingeführt:

$$\Phi = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{H}^e - u + \Theta s, \quad (4.57)$$

wobei \mathbf{H}^e den elastischen Anteil des referentiellen Henckyschen Dehnungstensors bezeichnet und $\mathbf{\Pi}$ den zu \mathbf{H} arbeitskonjugierten Spannungstensor. Leitet man die Gleichung (4.57) nach der Zeit ab und setzt das Ergebnis in die Ungleichung (4.29) ein, erhält man die folgende Form der Clausius-Duhem-Ungleichung:

$$\Theta \rho_0 \dot{\gamma} = \dot{w}^i - \dot{\mathbf{\Pi}} \mathbf{H}^e + \rho_0 (\dot{\Phi} - s \dot{\Theta}) - \frac{\rho_0}{\rho} \Theta^{-1} \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{G}} \geq 0, \quad (4.58)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{g}, \quad (4.59)$$

wobei \mathbf{R} den Rotationstensor bezeichnet und Gleichung (1.33)₃ verwendet wurde. Aus (4.42) und (4.57) folgt, daß die freie Enthalpie Φ eine eindeutige Funktion der Spannung $\mathbf{\Pi}$, der Temperatur Θ und der Menge \mathbf{a} der internen Zustandsvariablen ist:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{\Pi}, \Theta, \mathbf{A}), \quad (4.60)$$

wobei hier \mathbf{A} die zurückgedrehte Menge der internen Zustandsvariablen bezeichnet:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{a}. \quad (4.61)$$

Mit der letzten Beziehung und durch eine analoge Vorgehensweise wie im letzten Abschnitt erhält man aus (4.58) die thermische und die kalorische Zustandsgleichung

$$\mathbf{H}^e = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{\Pi}}, \quad (4.62)$$

$$s = \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \quad (4.63)$$

und die dissipative Ungleichung

$$\mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{H}}^{ei} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \frac{\rho_0}{\rho} \Theta^{-1} \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{G}} \geq 0. \quad (4.64)$$

Mit (1.33)₃ ergibt sich in der Eulerschen Form die folgende Verschärfung der dissipativen Ungleichung:

$$\boldsymbol{\pi} : \overset{\circ}{(\mathbf{h}^{ei})^R} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}^R \geq 0, \quad (4.65)$$

$$-\Theta^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \quad (4.66)$$

Hier bezeichnet \mathbf{h}^{ei} den elastisch-inelastischen Anteil von \mathbf{h} . Mit (2.126) kann der mechanische Anteil der dissipativen Ungleichung in der folgenden Form angegeben werden:

$$\boldsymbol{\pi} : (\mathbf{D}^{\text{ei}} - \mathbf{h}^{\text{i}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} + \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} \mathbf{h}^{\text{i}}) + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} : (\mathring{\mathbf{a}}^{\text{Log}} - \mathbf{a} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} + \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} \mathbf{a}) \geq 0. \quad (4.67)$$

Darin bezeichnet \mathbf{D}^{ei} den elastisch-inelastischen Anteil von \mathbf{D} und $\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}$ die Differenz aus $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ und $\boldsymbol{\Omega}^{\text{R}}$, siehe (2.127) und (2.128). Für moderate Verzerrungen ist $\dot{\mathbf{H}}$ ungefähr gleich der zurückgedrehten Verzerrungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{R}^{\text{T}} \star \mathbf{D} + \mathcal{O}(\mathbf{H}^2), \quad (4.68)$$

wobei hier $\mathcal{O}(\mathbf{H}^2)$ das Landausche Ordnungssymbol bezeichnet, siehe Hill (1978). Daraus folgt, daß für moderate Verzerrungen das Spannungsmaß $\boldsymbol{\pi}$ näherungsweise gleich dem Kirchhoffschen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ ist. Es bedeutet auch, daß für moderate Dehnungen die Transponierte $(\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}}$ von \mathbf{R}^{Log} näherungsweise gleich \mathbf{R} ist:

$$(\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \approx \mathbf{R}. \quad (4.69)$$

Die Näherung (4.69) kann unter Beachtung von $\ln(\chi_\sigma/\chi_\tau) \approx \chi_\sigma - \chi_\tau$ und $\sqrt{\chi_\sigma} \approx 1$ für moderate Verzerrungen direkt aus der Beziehung (2.128) hergeleitet werden. In erster Näherung können deshalb die $\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}$ -Glieder in den dissipativen Ungleichungen vernachlässigt werden und man erhält für den mechanischen Anteil der dissipativen Ungleichung die Beziehung

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}^{\text{ei}} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \mathring{\mathbf{a}}^{\text{Log}} \geq 0. \quad (4.70)$$

Es wird später in Kapitel 7 bei der Überprüfung der thermodynamischen Konsistenz des Stoffgesetzes von (4.70) ausgegangen.

Kapitel 5

Schädigungsmechanik

5.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die weitverbreiteten Konzepte der Schädigungsmechanik gegeben werden: es werden das sogenannte Effektivspannungs-, das Effektivverzerrungs- und Energieäquivalenzkonzept vorgestellt. Die Betrachtungen beschränken sich auf kleine Formänderungen und außerdem wird angenommen, daß das betrachtete Material im jungfräulichen Zustand isotrop und mikrodefektfrei ist. Nur linear elastisches Materialverhalten wird betrachtet. Die Schädigungseffektensoren für isotrope and anisotrope Schädigung werden angegeben. Insbesondere wird auf die Modelle nach Murakami (1988) und Cordebois & Sidoroff (1979) eingegangen. Ein anisotropes Modell für sprödes Material, das den Nachgiebigkeitstensor als Schädigungsvariable verwendet, wird ebenfalls vorgestellt.

Es gibt eine große Anzahl an Schädigungsmodellen, die hier nicht alle vorgestellt werden können. Für weiterführende Betrachtungen und die Behandlung der Modelle, die in den Rahmen der im folgenden vorgestellten Konzepte nicht passen, wird hier auf Krajcinovic (1989), Krajcinovic & Lemaitre (1987) und Lemaitre & Chaboche (1990) verwiesen.

Das Hauptanliegen ist, hier auf die Schwäche der klassischen Konzepte zur dreidimensionalen Erweiterung des Modells von Kachanov hinzuweisen und dadurch die später gewählte Interpretation des Schädigungsparameters und Vorgehensweise zu motivieren. Insbesondere soll darauf hingewiesen werden, daß das sogenannte isotrope Schädigungsmodell experimentell festgestellte Veränderung der Querkontraktionszahl nicht wiedergeben kann und deshalb als ungeeignet gilt.

Weiterhin soll auch herausgestellt werden, daß die Spannung, die in der Arbeit von z. B. Murakami (1988) mit σ^* bezeichnet wird, eine Art 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (ein Zweipunkt-Tensor) ist, der eine bilineare Abbildung zwischen der Momentankonfiguration und einer fiktiven ungeschädigten Konfiguration darstellt. Der Sinn der Symmetrisierung von σ^* zur Bildung einer symmetrischen Effektivspannung ist deshalb fraglich, da aus den thermodynamischen Überlegungen aus Kapitel 4 hervorgeht, daß zur Formulierung von geometrisch nichtlinearen Stoffgesetzen ein Zweipunkt-Tensor verwendet werden kann. Es wird auch gezeigt, daß trotz der Symmetrisierung anisotrope Modelle nach Murakami (1988) und Cordebois & Sidoroff (1979) für isotropes Verhalten auch die Änderung der Querkontraktionszahl nicht wiedergeben können.

5.2 Effektivspannungskonzept und Hypothese der Verzerrungsäquivalenz

Dieses Konzept stellt die älteste und weitestverbreitete Vorgehensweise bei der Schädigungsmodellierung dar (Lemaitre & Chaboche 1978; Lemaitre & Chaboche 1990). Es ermöglicht eine direkte Verallgemeinerung des eindimensionalen Modells von Kachanov (1958). Man definiert nach Gleichung (1.7) den allgemeinen Effektivspannungstensor $\hat{\sigma}$ als

$$\hat{\sigma} = \mathbf{M}_\sigma : \sigma, \quad (5.1)$$

wobei der vierstufige Tensor \mathbf{M}_σ den Schädigungseffektstensor bezeichnet und σ den Cauchyschen Spannungstensor. Der Schädigungseffektstensor charakterisiert den Schädigungszustand des Materials und ist deshalb eine Funktion des Schädigungsparameters:

$$\mathbf{M}_\sigma = \mathbf{M}_\sigma(\mathbf{d}). \quad (5.2)$$

Weil σ symmetrisch ist und damit der Effektivspannungstensor $\hat{\sigma}$ ebenfalls symmetrisch ist, muß \mathbf{M}_σ die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbb{M}_{\sigma ijkl} = \mathbb{M}_{\sigma jikl} = \mathbb{M}_{\sigma jilk} \quad (5.3)$$

besitzen. Mit Hilfe der Effektivspannung $\hat{\sigma}$ wird dann zur Bestimmung der elastischen Konstanten des geschädigten Materials nach der *Hypothese der Verzerrungsäquivalenz* (Lemaitre & Chaboche 1978; Lemaitre & Chaboche 1990) verlangt, daß

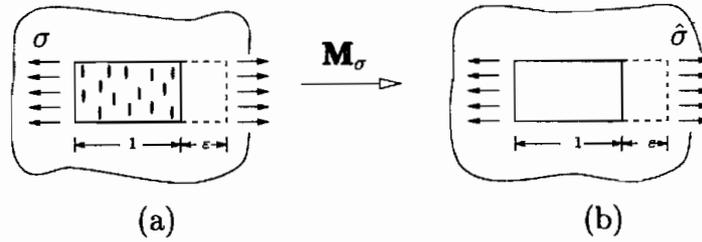


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Effektivspannungskonzeptes und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz: (a) geschädigter Zustand; (b) fiktiver, ungeschädigter Zustand

die durch die wahren Cauchyschen Spannungen σ im geschädigten Material verursachten Verzerrungen genau denen eines unter der Wirkung der Effektivspannung $\hat{\sigma}$ stehenden ungeschädigten Materials entsprechen.

In Abbildung 5.1 ist diese Vorgehensweise schematisch dargestellt, vergleiche z. B. Simo & Ju (1987, Seite 823).

Der Nachgiebigkeitstensor des geschädigten Materials wird hier mit \mathbf{D} bezeichnet und der des ungeschädigten Materials mit \mathbf{D}^0 . Für linear elastisches Materialverhalten lauten die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das ungeschädigte und geschädigte Material wie folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^0 : \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.5)$$

Aus der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^0 : \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (5.6)$$

Mit (5.1) erhält man aus (5.6) den Nachgiebigkeitstensor \mathbf{D} als eine Funktion von \mathbf{D}^0 und \mathbf{M}_σ :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 : \mathbf{M}_\sigma \quad (5.7)$$

bzw.

$$\mathbf{M}_\sigma = \mathbf{C}^0 : \mathbf{D}, \quad (5.8)$$

wobei \mathbf{C}^0 den Elastizitätstensor des ungeschädigten Materials bezeichnet. Die vorletzte Beziehung stellt eine Verallgemeinerung der Beziehung (1.17)

des Modells von Kachanov (1958) dar. Die Annahme, daß \mathbf{D} die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{jikl} = \mathbb{D}_{jilk} = \mathbb{D}_{klij} \quad (5.9)$$

besitzt, sowie seine Berechnung aus der Gleichung (5.7) stellen große Anforderungen bezüglich der Symmetrie an den Schädigungseffekttensor \mathbf{M}_σ . Dies erschwert die Bestimmung von \mathbf{M}_σ und schränkt die Anwendung des Effektivspannungskonzeptes ein.

5.3 Effektivverzerrungskonzept und Hypothese der Spannungsäquivalenz

Das Effektivverzerrungskonzept ist die Inverse des Effektivspannungskonzeptes (Cordebois & Sidoroff 1979). Hier definiert man den Effektivverzerrungstensor $\hat{\epsilon}$ als

$$\hat{\epsilon} = \mathbf{M}_\epsilon : \epsilon, \quad (5.10)$$

wobei der vierstufige Tensor \mathbf{M}_ϵ den Schädigungseffekttensor bezeichnet und ϵ den infinitesimalen Verzerrungstensor. Der Schädigungseffekttensor beschreibt den Schädigungszustand des Materials und ist deshalb eine Funktion des Schädigungsparameters:

$$\mathbf{M}_\epsilon = \mathbf{M}_\epsilon(\mathbf{d}). \quad (5.11)$$

Weil der Verzerrungstensor ϵ symmetrisch ist und damit der Effektivverzerrungstensor $\hat{\epsilon}$ ebenfalls symmetrisch ist, werden die folgenden Symmetrieeigenschaften von \mathbf{M}_ϵ gefordert:

$$M_{\epsilon ijkl} = M_{\epsilon jikl} = M_{\epsilon jilk}. \quad (5.12)$$

Mit dem Effektivverzerrungstensor $\hat{\epsilon}$ werden die elastischen Konstanten des geschädigten Materials bestimmt, indem nach der *Hypothese der Spannungsäquivalenz* verlangt wird, daß

die zur Erzeugung der wahren Verzerrungen ϵ im geschädigten Material benötigten Spannungen im ungeschädigten Material die Effektivverzerrungen $\hat{\epsilon}$ hervorrufen sollen.

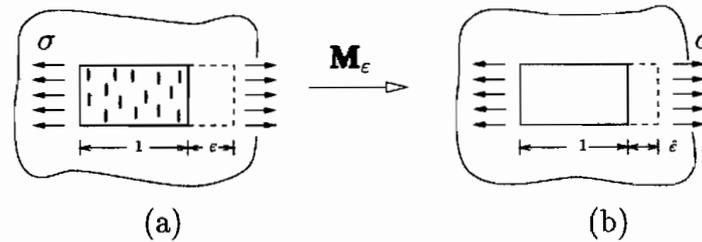


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des Effektivverzerrungskonzeptes und der Hypothese der Spannungsäquivalenz: (a) geschädigter Zustand; (b) fiktiver, ungeschädigter Zustand

Eine schematische Erklärung dieses Konzeptes kann man der Abbildung 5.2 entnehmen, vergleiche Simo & Ju (1987, Seite 823).

Für linear elastisches Materialverhalten gilt für das ungeschädigte Material

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.13)$$

und für das geschädigte Material

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.14)$$

wobei \mathbf{C} den Elastizitätstensor des geschädigten Materials bezeichnet. Die Hypothese der Spannungsäquivalenz lautet formelmäßig wie folgt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^0 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (5.15)$$

Mit (5.10) erhält man aus (5.15) für \mathbf{C} die Beziehung

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^0 : \mathbf{M}_\varepsilon \quad (5.16)$$

bzw.

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \mathbf{D}^0 : \mathbf{C}. \quad (5.17)$$

Die Beziehung (5.16) ist eine Verallgemeinerung der Inverse von (1.17). Die Annahme, daß \mathbf{C} die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{jilk} = \mathbb{C}_{klij} \quad (5.18)$$

besitzt, und seine Bestimmung aus (5.16) stellen schwere Anforderungen an \mathbf{M}_ε und schränken die Anwendung dieses Konzeptes stark ein.

Damit der aus dem Effektivspannungskonzept und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz erhaltene Nachgiebigkeitstensor \mathbf{D} gleich der Inversen des aus dem Effektivverzerrungskonzept und der Hypothese der

Spannungsäquivalenz bestimmten Elastizitätstensors \mathbf{C} ist, müssen beide Schädigungseffektensoren symmetrisch sein und \mathbf{M}_σ die Inverse $\mathbf{M}_\varepsilon^{-1}$ von \mathbf{M}_ε :

$$\mathbf{M}_\sigma = \mathbf{M}_\varepsilon^{-1}. \quad (5.19)$$

Man beachte aber, daß die zwei Konzepte völlig unabhängig voneinander formuliert und angewendet werden können und die letzte Beziehung im allgemeinen nicht erfüllt werden muß.

5.4 Effektivspannung und Hypothese der Äquivalenz der komplementären elastischen Energie

Man definiert – siehe Abschnitt 5.2 – den allgemeinen Effektivspannungstensor $\hat{\sigma}$ als

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \mathbf{M}_\sigma : \sigma, \\ \mathbf{M}_\sigma = \mathbf{M}_\sigma(\mathbf{d}), \\ M_{\sigma ijkl} = M_{\sigma jikl} = M_{\sigma jilk}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Hier wird aber – im Gegensatz zum Abschnitt 5.2 – zur Bestimmung von \mathbf{D} eine von Cordebois & Sidoroff (1979, 1982) und Sidoroff (1981) eingeführte *Hypothese der Äquivalenz der komplementären elastischen Energie* verwendet. Die Hypothese besagt, daß

die komplementäre Verzerrungsenergie $\Sigma(\sigma, \mathbf{d})$ eines durch die wahre Spannung σ belasteten geschädigten Materials gleich der komplementären Verzerrungsenergie $\Sigma^0(\hat{\sigma}, \mathbf{d} = \mathbf{0})$ eines durch die Effektivspannung $\hat{\sigma}$ belasteten ungeschädigten Materials ist.

Für linear elastisches Verhalten gilt für die komplementäre Energie des geschädigten Materials

$$\Sigma(\sigma, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{D} : \sigma, \quad (5.21)$$

und für die des ungeschädigten

$$\Sigma^0(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{D}^0 : \sigma. \quad (5.22)$$

Nach der Hypothese von Cordebois & Sidoroff (1979) gilt

$$\Sigma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}) = \Sigma^0(\hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^0 : \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (5.24)$$

Mit (5.1) folgt aus (5.23) die Beziehung

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}_\sigma^T : \mathbf{D}^0 : \mathbf{M}_\sigma \quad (5.25)$$

für den Nachgiebigkeitstensor des geschädigten Materials. Bezüglich der Symmetrieeigenschaften von \mathbf{D} stellt die Gleichung (5.25) keine besondere Anforderungen an den Schädigungseffektstensor \mathbf{M}_σ . Die hier vorgestellte Vorgehensweise ist deswegen sehr beliebt und wird oft angewendet. Setzt man die Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.26)$$

in die komplementäre elastische Energie ein und berücksichtigt die Hypothese der Äquivalenz der elastischen Verzerrungsenergie, ergibt sich die Effektivverzerrung $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}_\varepsilon : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.27)$$

mit \mathbf{M}_ε als Inverse von \mathbf{M}_σ :

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \mathbf{M}_\sigma^{-1}. \quad (5.28)$$

5.5 Isotropes Schädigungsmodell

Für eine praktische Anwendung der vorgestellten Konzepte fehlen noch die Schädigungseffektensoren \mathbf{M}_σ und \mathbf{M}_ε . Hier wird auf den Fall eingegangen, daß die Schädigung isotrop ist und als Schädigungsvariable ein Skalar d verwendet wird.

Das sogenannte isotrope Schädigungsmodell – siehe Lemaitre (1985a, 1985b, 1987) und Chaboche (1998) und de Souza Neto, Perić & Owen (1992) und Steinmann, Miehe & Stein (1994) für mögliche Erweiterungen auf große Formänderungen – stellt die einfachste Verallgemeinerung des Modells von Kachanov (1958) dar. Für dieses Modell wird

$$\mathbf{M}_\sigma = (1 - d)^{-1} \mathbf{I} \quad (5.29)$$

bzw.

$$\mathbf{M}_\varepsilon = (1 - d)\mathbf{I} = \mathbf{M}_\sigma^{-1} \quad (5.30)$$

gewählt. Hier bezeichnet \mathbf{I} den Einheitstensor vierter Stufe. Damit folgt aus dem Effektivspannungskonzept und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz

$$\mathbf{D} = (1 - d)^{-1}\mathbf{D}^0. \quad (5.31)$$

Aus dem Effektivverzerrungskonzept und der Hypothese der Spannungsäquivalenz erhält man

$$\mathbf{C} = (1 - d)\mathbf{C}^0 = \mathbf{D}^{-1}. \quad (5.32)$$

Die zwei Konzepte liefern in diesem Fall das gleiche Ergebnis. Für den Fall, daß das ungeschädigte Material isotrop ist, folgt aus (5.32) für \mathbf{C} die Beziehung

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{kj}), \quad (5.33)$$

wobei für die Laméschen Konstanten λ und μ

$$\lambda = (1 - d)\lambda^0, \quad \mu = (1 - d)\mu^0 \quad (5.34)$$

gilt und λ^0 und μ^0 die Laméschen Konstanten des ungeschädigten Materials bezeichnen. Mit (5.33) lautet das konstitutive Gesetz des geschädigten Materials wie folgt

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e. \quad (5.35)$$

Zur Vervollständigung des Modells fehlen noch die Evolutionsgleichung für d und ein Versagenskriterium.

Für elastoplastisches Verhalten wird die folgende additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ und der freien Energie ψ angenommen:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p, \quad (5.36)$$

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, d) + \psi^p(p), \quad (5.37)$$

wobei hier p die plastische Vergleichsdehnung

$$\dot{p}^2 = \frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p \quad (5.38)$$

bezeichnet. Mit Gleichung (5.32) kann das elastische Potential in der Form

$$\rho\psi^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}(1-d)\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

geschrieben werden. Die zu d arbeitskonjugierte Größe Y ergibt sich als

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = \rho \frac{\psi^e}{(1-d)}. \quad (5.39)$$

Nach Lemaitre (1985a) wird von dem folgenden Dissipationspotential für die Schädigung ausgegangen:

$$\varphi^* = \frac{S_0}{s_0 + 1} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0+1} \dot{p}, \quad (5.40)$$

wobei S_0 und s_0 Materialparameter bezeichnen. Die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable ergibt sich damit zu

$$\dot{d} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} = \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{p}. \quad (5.41)$$

Für die Fließbedingung oder das plastische Dissipationspotential folgt

$$F = \frac{\sigma_{eq}}{(1-d)} - \sigma_Y - k, \quad (5.42)$$

wobei

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{1/2} \quad (5.43)$$

die von Misessche Vergleichsspannung bezeichnet, $\boldsymbol{\sigma}'$ den Spannungsdeviator, σ_Y die Anfangsfließspannung und k die Verfestigungsfunktion. Mit der assoziierten Fließregel ergibt sich dann die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \frac{3}{2} \frac{1}{(1-d)} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}. \quad (5.44)$$

Hier bezeichnet λ den Proportionalitätsfaktor, der aus der Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = 0 \quad (5.45)$$

bestimmt wird und die Be- und Entlastungsbedingungen

$$\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \lambda F = 0 \quad (5.46)$$

erfüllt. Für das Versagenskriterium wird hier nach Lemaitre (1985a) $d_c < 1$ gewählt. Das Modell ist in der Tabelle 5.1 zusammengefaßt.

ELASTISCHES STOFFGESETZ:	$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$ $\mathbb{C}_{ijkl}(1-d)^{-1} = \lambda^0 \delta_{ij} \delta_{km} + \mu^0 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{kj})$
FLIESSFUNKTION:	$F = \frac{\sigma_{eq}}{(1-d)} - \sigma_Y - k$
FLIESSREGEL:	$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3\lambda}{2(1-d)} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_{eq}}$
EVOLUTIONSGLEICHUNG:	$\dot{d} = \left(\frac{Y}{S_0}\right)^{s_0} \dot{p}, \quad \dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p : \dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}}$
VERSAGENSKRITERIUM:	$d_c < 1$

Tabelle 5.1: Dreidimensionales isotropes Schädigungsmodell

Anmerkung 5.1. Das isotrope Schädigungsmodell gilt als fragwürdig. Wie von Rabier (1989) und Ju (1990) gezeigt wurde, ist das Modell nicht in der Lage, die Veränderung der Querkontraktionszahl zu modellieren. Aus den Beziehungen für λ und μ ergeben sich der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl des geschädigten Materials zu

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = (1-d)E^0, \quad (5.47)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu^0. \quad (5.48)$$

Nach diesem Modell bleibt ν unverändert und die im Experiment beobachtete Änderung von ν – siehe z. B. Tang & Lee (1995) – kann nicht wiedergegeben werden. \square

5.6 Anisotrope Schädigungsmodelle

Die Entstehung, das Wachstum und die Vereinigung von Mikrodefekten sind stark richtungsabhängige Phänomene. Mikrodefekte entstehen überwiegend an den Korngrenzen, die senkrecht zu den Hauptspannungsrichtungen stehen. Für eine realitätsnähere Beschreibung der Schädigung reicht der skalare Damageparameter d nicht mehr aus. Man benötigt einen Tensor \mathbf{d} als Schädigungsvariable, der in der Lage sein muß

- die Dichte,
- die Abmessungen und Abmessungsverhältnisse und

- die Orientierung und Verteilung

der Mikrodefekte zu beschreiben. Aus geometrischen Gesichtspunkten bietet sich ein Vektor, dessen Betrag der Mittelfläche des Mikrodefektes entspricht, und der in Hauptspannungsrichtung zeigt, als Schädigungsvariable an. Hier wird auf Modelle mit einem Vektor als interne Zustandsvariable nicht eingegangen. Diese Modelle können als Sonderfall des in Kapitel 6 vorgestellten Modells angesehen werden. In diesem Abschnitt werden Modelle vorgestellt, die mit Hilfe eines Tensors zweiter Stufe einen Schädigungseffektensor oder eine Effektivspannung berechnen und dann zur Bestimmung des konstitutiven Gesetzes des geschädigten Materials entweder die Hypothese der Verzerrungs-, Spannungs- oder Energieäquivalenz verwenden.

Anmerkung 5.2. Die Verwendung eines Vektors als interne Zustandsvariable ist nur bei sogenannten “orientierten” oder “gerichteten” Medien zulässig, siehe Lubliner (1972, Seite 238). Das geschädigte Material kann aber als orientiert oder gerichtet betrachtet werden. Die Verwendung von vektoriellen, internen Zustandsvariablen zur anisotropen Schädigungsmodellierung ist deshalb zulässig. \square

5.6.1 Modelle nach Murakami (1988)

Zur Definition einer anisotropen Schädigungsvariablen betrachten Murakami & Ohno (1981) und Murakami (1988) ein infinitesimales Dreieckselement mit den Eckpunkten P , Q und R in der aktuellen geschädigten Konfiguration \mathcal{B} . Die Vektoren PQ , PR und die gerichtete Fläche des Elementes werden mit \mathbf{dx} , \mathbf{dy} und $\mathbf{n}da$ bezeichnet. Durch eine fiktive Deformation mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F}^d wird das Dreieck PQR auf ein entsprechendes Dreieckselement $P^*Q^*R^*$ in eine fiktive ungeschädigte Konfiguration \mathcal{B}_* abgebildet. Es wird angenommen, daß das fiktive Dreieckselement $P^*Q^*R^*$ die gleiche lasttragende Fläche wie PQR besitzt. Die fiktive ungeschädigte Konfiguration \mathcal{B}_* ist demzufolge mechanisch äquivalent zur geschädigten Konfiguration \mathcal{B} . Der fiktive Deformationsgradient \mathbf{F}^d bildet \mathbf{dx} in \mathbf{dx}^* und \mathbf{dy} in \mathbf{dy}^* ab:

$$\mathbf{dx}^* = \mathbf{F}^d \mathbf{dx}, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{dy}^* = \mathbf{F}^d \mathbf{dy}. \quad (5.50)$$

Mit Hilfe der Formel von Nanson (2.32) erhält man für \mathbf{da}^* , die Fläche von $P^*Q^*R^*$, die Beziehung

$$\mathbf{da}^* = K \mathbf{F}^{\mathbf{d}-\mathbf{T}} \mathbf{da}, \quad (5.51)$$

wobei K die Determinante des fiktiven Deformationsgradienten $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$ bezeichnet:

$$K = \det(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}). \quad (5.52)$$

Mit der Umbezeichnung

$$K \mathbf{F}^{\mathbf{d}-\mathbf{T}} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}) \quad (5.53)$$

erhält man

$$\mathbf{da}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{d}) \mathbf{da}, \quad (5.54)$$

wobei $\mathbf{1}$ hier den Einheitstensor zweiter Stufe bezeichnet und \mathbf{d} den Schädigungstensor zweiter Stufe, der den allgemeinen anisotropen Schädigungszustand des Materials beschreibt. Für $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ – genau wie beim Modell von Kachanov (1958) – ist das Material ungeschädigt und $\mathbf{da}^* = \mathbf{da}$. Für $\mathbf{d} = \mathbf{1}$ verschwindet die lasttragende Fläche. Die Beziehung (5.54) stellt demzufolge eine Verallgemeinerung der Gleichung (1.13) dar. Die Summe der Oberflächenkräfte auf $\partial\mathcal{B}$ in \mathcal{B} ist

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da, \quad (5.55)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchyschen Spannungstensor bezeichnet. Dieses Integral über $\partial\mathcal{B}$ in \mathcal{B} kann mit der Formel von Nanson (2.32) auf ein Integral über einen entsprechenden Rand $\partial\mathcal{B}_*$ von \mathcal{B}_* transformiert werden

$$\int_{\partial\mathcal{B}_*} \boldsymbol{\sigma}^{*\mathbf{T}} \mathbf{n}^* \, da^* \quad (5.56)$$

mit

$$\boldsymbol{\sigma}^* = K^{-1} \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-\mathbf{T}} \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.57)$$

Man beachte die Ähnlichkeit der Bestimmung von $\boldsymbol{\sigma}^*$ mit der Herleitung des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors im Abschnitt 3.6. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^*$ ist deshalb eine Art 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor, ein Zweipunkt-Tensor. Er verbindet die Kraft in der Momentan-konfiguration \mathcal{B} mit einem fiktiven Flächenelement \mathcal{B}_* in der fiktiven ungeschädigten Konfiguration.

Murakami (1988) bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}^*$ als Effektivspannungstensor. Da dieser nach Murakami (1988) nicht symmetrisch ist, ist er nicht gut geeignet für das Effektivspannungskonzept. Murakami (1988) und Murakami & Ohno (1981) schlagen deshalb vor, nur den symmetrischen Anteil von $\boldsymbol{\sigma}^*$ als Effektivspannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ zu definieren:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} ([\mathbf{1} - \mathbf{d}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{1} - \mathbf{d}]^{-1}), \quad (5.58)$$

wobei hier zusätzlich angenommen wird, daß der Schädigungstensor symmetrisch ist. In Voyiadjis & Kattan (1990) wird mit (5.58) ein Modell zur Beschreibung großer elastoplastischer Formänderungen formuliert. In Voyiadjis & Thiagarajan (1997) wird ein auf (5.58) basierendes Modell zur Beschreibung des Schädigungsverhaltens von Metall-Matrix-Verbundwerkstoffen verwendet.

Anmerkung 5.3. Hier wird darauf hingewiesen, daß der Effektivspannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^*$ (5.57) ein Zweipunkt-Tensor ist. $\boldsymbol{\sigma}^*$ ist eine bilineare Abbildung, die von der Momentankonfiguration in die fiktive ungeschädigte Konfiguration abbildet. Die Frage nach der Symmetrie eines solchen Tensors ist sinnlos, da er nicht symmetrisch sein kann (Marsden & Hughes 1983). Man beachte auch die Tatsache, daß der nominelle Spannungstensor, auch ein Zweipunkt-Tensor, eine bedeutende Rolle in der finiten nichtlinearen Elastizitäts- und Elastoplastizitätstheorie spielt, siehe z. B. Ogden (1984a) und Hill (1978). Die thermodynamischen Überlegungen aus Kapitel 4 zeigen auch, daß man zur Formulierung von geometrisch nichtlinearen Stoffgesetzen den nominellen Spannungstensor verwenden kann. Für eine geometrisch nichtlineare Schädigungstheorie ist die Symmetrisierung von $\boldsymbol{\sigma}^*$ physikalisch unmotiviert. Modelle, die die symmetrisierte Effektivspannung (5.58) verwenden, gelten deshalb als fragwürdig, weil die Alternative zu dem unsymmetrischen Spannungstensor (5.57) der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\mathbf{S}^* = (\det \mathbf{F}^d)^{-1} \mathbf{F}^d \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{dT} \quad (5.59)$$

oder mit Gleichung (5.53)

$$\mathbf{S}^* = [\det(\mathbf{1} - \mathbf{d})]^{\frac{1}{2}} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-T} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-1} \quad (5.60)$$

wäre, der vollständig in der fiktiven ungeschädigten Konfiguration definiert und symmetrisch ist.

Der fiktive Deformationsgradient \mathbf{F}^d ist ein Zweipunkt-Tensor. Demzufolge ist der durch Gleichung (5.53) eingeführte Schädigungstensor auch ein Zweipunkt-Tensor. Die Standardannahme, die im Zusammenhang mit (5.58) gemacht wird, daß der Schädigungstensor symmetrisch ist, ist also vergleichbar mit der Annahme, daß der elastische Anteil \mathbf{F}^e der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten symmetrisch ist.

Zum Schluß sei hier angemerkt, daß mit der Effektivspannung $\boldsymbol{\sigma}^*$, einer sinnvollen Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable, einem Versagenskriterium, dem Effektivspannungskonzept und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz und Gleichung (4.47) im Prinzip ein geometrisch nichtlineares anisotropes Schädigungsmodell vorliegt. \square

5.6.2 Modelle nach Cordebois & Sidoroff (1979)

Im folgenden soll ein Schädigungseffektstensor vorgestellt werden, der auf die Arbeiten von Cordebois & Sidoroff (1979, 1982) und Sidoroff (1981) zurückgeht und mit der Hypothese der Energieäquivalenz zur Modellierung von anisotroper Schädigung angewendet wird.

Als Schädigungstensor wird ebenfalls ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe verwendet. Die Eigenwerte des Schädigungstensors werden mit d_1 , d_2 und d_3 bezeichnet. Für den Fall, daß Spannungs- und Schädigungstensor coaxial sind, schlagen Cordebois & Sidoroff (1979) die Verallgemeinerung

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-1} \quad (5.61)$$

der eindimensionalen Effektivspannungsbeziehung (1.7) vor. Da die Effektivspannung nach der letzten Gleichung im allgemeinen nicht symmetrisch ist, geben Cordebois & Sidoroff (1979) die folgenden drei Methoden zur Symmetrisierung von $\boldsymbol{\sigma}^*$ an:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.62)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-1}], \quad (5.63)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}) \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{1} - \mathbf{d}). \quad (5.64)$$

Die Effektivspannung (5.63) ist identisch mit der Effektivspannung von Murakami (1988) und Murakami & Ohno (1981). Im folgenden wird nur auf die Symmetrisierung (5.62) eingegangen. Unter der Annahme, daß die Schädigung nur die Hauptspannungen beeinflusst (Cordebois & Sidoroff

1979), kann (5.62) im Hauptspannungsraum in Matrixschreibweise in folgender Form geschrieben werden:

$$\{\hat{\sigma}\} = [\mathbf{M}_{\sigma\sigma}] \{\sigma\}. \quad (5.65)$$

Der Schädigungseffektensor $[\mathbf{M}_{\sigma\sigma}]$ hat die Darstellung

$$[\mathbf{M}_{\sigma\sigma}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_3)} \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Die Spaltenvektoren $\{\sigma\}$ und $\{\hat{\sigma}\}$ besitzen die Form

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \quad \{\hat{\sigma}\}^T = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}, \quad (5.67)$$

wobei hier σ_1 , σ_2 und σ_3 die Eigenwerte des Spannungstensors bezeichnen und $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ und $\hat{\sigma}_3$ die Eigenwerte des Effektivspannungstensors. Man beachte, daß für isotrope Schädigung mit

$$d_1 = d_2 = d_3 = d \quad (5.68)$$

die Effektivspannung (5.65) im Zusammenhang mit dem Effektivspannungskonzept und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz einen unsymmetrischen Nachgiebigkeitstensor ergibt, siehe Sidoroff (1981, Seite 240).

Die Annahme, daß Damage nur die Normalkomponenten des Spannungstensors beeinflusst, ist zu einschränkend. Zur Berücksichtigung des Einflusses der Schädigung auf die Schubkomponenten des Spannungstensors schlagen Chow & Wang (1987) vor, den folgenden "allgemeinen" Schädigungseffekttensor zu verwenden:

$$[\mathbf{M}_\sigma] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\sigma\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\sigma\tau} \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Der Tensor $\mathbf{M}_{\sigma\tau}$ wird wie folgt definiert

$$[\mathbf{M}_{\sigma\tau}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_3)}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-d_3)(1-d_2)}} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

und $\mathbf{0}$ bezeichnet hier eine drei mal drei Matrix, die überall mit Nullen besetzt ist. Zur Berechnung der Effektivspannung verwendet man im Hauptachsensystem des Schädigungstensors die folgende Beziehung:

$$\{\hat{\sigma}\} = [\mathbf{M}_\sigma] \{\sigma\}, \quad (5.71)$$

wobei $\{\hat{\sigma}\}$ und $\{\sigma\}$ die Spaltenvektoren

$$\{\hat{\sigma}\}^T = \{\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{23}\} \quad (5.72)$$

und

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \quad (5.73)$$

bezeichnen. Man beachte, daß der Vorschlag von Chow & Wang (1987) einfach einer Auswertung der Gleichung (5.62) von Cordebois & Sidoroff (1979) in den Hauptachsen des Schädigungstensors entspricht, und daß der Schädigungseffektstensor (5.66) ein Sonderfall von (5.69) ist. Der Schädigungseffektstensor (5.69) wird häufig in der Literatur verwendet, siehe z. B. Zhu & Cescotto (1995) und die darin zitierten Arbeiten.

Nach Gleichung (5.25) aus Abschnitt 5.4 gilt für den Nachgiebigkeitstensor des geschädigten Materials die Beziehung

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{M}_\sigma] [\mathbf{D}^0] [\mathbf{M}_\sigma] \quad (5.74)$$

mit $[\mathbf{M}_\sigma]$ aus Gleichung (5.69) bzw. $\hat{\sigma}$ aus (5.62). In Matrixschreibweise lautet die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in den Hauptachsen des Schädigungstensors wie folgt

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{D}] \{\sigma\}. \quad (5.75)$$

Zur Bestimmung der Evolutionsgleichung für \mathbf{d} wird genauso wie beim isotropen Modell vorgegangen. Aus dem komplementären elastischen Potential

$$\psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [\mathbf{D}] \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [\mathbf{M}_\sigma] [\mathbf{D}^0] [\mathbf{M}_\sigma] \{\sigma\}$$

wird die zu \mathbf{d} arbeitskonjugierte Größe \mathbf{Y} durch partielle Ableitung von ψ nach \mathbf{d} bestimmt:

$$-\mathbf{Y} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} \quad (5.76)$$

Mit \mathbf{Y} wird ein Dissipationspotential für die Schädigung

$$\varphi^* = \varphi^*(\mathbf{Y}, \mathbf{d}, \dots) \quad (5.77)$$

definiert, aus dem man dann die Evolutionsgleichung für \mathbf{d} durch partielles Ableiten von φ^* nach \mathbf{Y} erhält :

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{Y}}(\dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{d}, \dots). \quad (5.78)$$

Hier sollen diese kurzen Ausführungen ausreichen. Für weitergehende Betrachtungen wird noch einmal auf die Arbeit von Zhu & Cescotto (1995) verwiesen.

Anmerkung 5.4. Für isotrope Schädigung sind alle Eigenwerte des Schädigungstensor gleich. Daraus folgt

$$[\mathbf{M}_{\sigma\sigma}] = [\mathbf{M}_{\sigma\tau}] = \frac{1}{(1-d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.79)$$

Der Schädigungseffektstensor (5.69) vereinfacht sich demnach zu

$$\mathbf{M}_\sigma = (1-d)^{-1} \mathbb{I}, \quad (5.80)$$

wobei \mathbb{I} den Einheitstensor vierter Stufe bezeichnet, und man erhält für den Elastizitätstensor die Beziehung

$$\mathbf{C} = (1-d)^2 \mathbf{C}^0 = \mathbf{D}^{-1}. \quad (5.81)$$

Für anfänglich isotropes Material folgt daraus

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbb{I}, \quad (5.82)$$

wobei

$$\lambda = (1-d)^2 \lambda^0, \quad \mu = (1-d)^2 \mu^0 \quad (5.83)$$

gilt und λ^0 und μ^0 die Laméschen Konstanten des ungeschädigten Materials bezeichnen. Dieses Modell kann demnach genauso wie das isotrope Schädigungsmodell nicht die Änderung der Querkontraktionszahl wiedergeben. Siehe Anmerkung 5.1. \square

5.7 Modelle mit dem Nachgiebigkeitstensor als Schädigungsvariable

Selbstkonsistente und mikromechanische Berechnungen von z. B. Budiansky & O'Connell (1976) und Horii & Nemat-Nasser (1983) – siehe auch Quent (2001) – zeigen, daß der Nachgiebigkeitstensor eines Materials mit verteilten Mikrodefekten sich additiv in der Form

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \mathbf{D}^d \quad (5.84)$$

zusammensetzt. Hier bezeichnet \mathbf{D}^0 den Nachgiebigkeitstensor des ungeschädigten Materials und \mathbf{D}^d den Zuwachs aufgrund der Schädigung. \mathbf{D}^d kann als Maß für die Schädigung angesehen werden. Mit Hilfe dieser Erkenntnis haben unter anderem Dougill (1975), Ortiz (1985), Simo & Ju (1987), Ju (1989) und Lubarda & Krajcinovic (1995a) Modelle für sprödes Material mit dem Nachgiebigkeitstensor als Schädigungsvariable vorgestellt.

Das Modell, das hier kurz vorgestellt wird, geht auf die Arbeiten von Ortiz (1985) und Lubarda & Krajcinovic (1995a) zurück. Es wird bei diesem Modell von der folgenden allgemeinen Form der Gibbsschen Energie eines Materials mit einer stetigen Verteilung von Mikrodefekten ausgegangen:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{D} :: (\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \varepsilon_\gamma, \quad (5.85)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchyschen Spannungstensor und ε_γ die zur Erzeugung der Mikrodefekte benötigte Oberflächenenergie kennzeichnet. Mit der Zerlegung des Nachgiebigkeitstensors (5.84) nimmt die Rate der Gibbsschen Energie die Form

$$\dot{\Phi} = \mathbf{D} :: (\boldsymbol{\sigma} \otimes \dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \dot{\mathbf{D}}^d :: \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \dot{\varepsilon}_\gamma \quad (5.86)$$

an. Für einen isothermen Prozeß folgt aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{\Phi} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\epsilon} + \Theta \dot{s}, \quad (5.87)$$

wobei Θ die absolute Temperatur bezeichnet, s die Entropie. $(\Theta \dot{s})$ stellt demzufolge die Rate der Energie dar, die während des Schädigungsprozesses dissipiert wird. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt die Spannungs-Dehnungs-Beziehung

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \quad (5.88)$$

und die Gleichung

$$\Theta \dot{s} = \dot{\mathbf{D}}^d :: \mathbf{Y} - \dot{\epsilon}_\gamma, \quad (5.89)$$

wobei der Tensor vierter Stufe

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \quad (5.90)$$

die zu der Schädigungsvariable \mathbf{D} arbeitskonjugierte Größe bezeichnet.

Analog zur Fließfläche in der klassischen Plastizitätstheorie wird eine Schädigungsfläche

$$\varphi^* = \overline{\varphi^*}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{R}(\rho) = 0, \quad (5.91)$$

die elastisches Materialverhalten ohne und mit Schädigung trennt, angenommen und eine Fließregel für den Nachgiebigkeitstensor in der folgenden Form:

$$\dot{\mathbf{D}}^d = \dot{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Y}}, \quad (5.92)$$

wobei Ω ein Schädigungsdissipationspotential bezeichnet und eine Funktion der treibenden Kraft \mathbf{Y} ist:

$$\Omega = \Omega(\mathbf{Y}). \quad (5.93)$$

$\dot{\rho} \geq 0$ ist die Rate eines monoton wachsenden skalaren Parameters ρ und wird aus der Konsistenzbedingung $\dot{\varphi}^*$ bestimmt:

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{d\mathcal{R}}{d\rho} \dot{\rho} = 0, \quad (5.94)$$

mit

$$\dot{\rho} = \frac{1}{K} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right), \quad K = \frac{d\mathcal{R}}{d\rho}. \quad (5.95)$$

Analog zur Plastizitätstheorie können die Be- und Entlastungsbedingungen für die Schädigung in folgender Kuhn-Tucker-Form angegeben werden:

$$\dot{\rho} \geq 0, \quad \varphi^* \leq 0, \quad \dot{\rho} \varphi^* = 0. \quad (5.96)$$

In der Regel wird von einer assoziierten Fließregel, d. h. $\Omega = \varphi^*$, ausgegangen; die einzige und wesentliche Schwierigkeit bei diesem Modell besteht darin, ein sinnvolles Dissipationspotential, das die Richtungsabhängigkeit der Schädigung berücksichtigt, anzugeben.

Kapitel 6

Materialmodell – Elastisches Verhalten

6.1 Einleitung

Aus den Betrachtungen in Kapitel 5 geht hervor, daß Effektivspannungs- und -verzerrungskonzepte keine ausreichende Beschreibung des Materialverhaltens bieten. Das isotrope Schädigungsmodell, eine ad hoc Erweiterung des eindimensionalen Modells von Kachanov auf den dreidimensionalen Zustand, ist nicht in der Lage die Veränderung der Querkontraktionszahl wiederzugeben. Die Symmetrisierung des nominellen Spannungstensors zur Bildung der Effektivspannung bei anisotropen Schädigungsmodellen erscheint physikalisch unmotiviert. Und trotz der Symmetrisierung können für isotrope Schädigung anisotrope Effektivspannungsmodelle auch nur die Änderung einer einzigen elastischen Materialkonstante beschreiben.

Die Entstehung, das Wachstum und die Vereinigung von Mikrodefekten sind richtungsabhängige Phänomene, da die Mikrodefekte überwiegend an den Korngrenzen entstehen, die senkrecht zu den Hauptspannungsrichtungen stehen. Abgesehen also von dem einfachen aber nicht trivialen Sonderfall, bei dem das Material anfänglich isotrop ist und die Mikrodefekte alle Poren sind, führt die Schädigung zu einer Veränderung der Materialsymmetrie. In einem makroskopischen, phänomenologischen Rahmen wird die sogenannte Anfangs- oder Mikrostrukturanisotropie durch die Einführung von Struktur- oder Materialtensoren modelliert, siehe Doyle & Ericksen (1956), Spencer (1984) und Boehler (1987a, 1987b).

Die durch die Schädigung induzierte Anisotropie kann bei einer makro-

skopischen und phänomenologischen Modellierung von der Mikrostrukturisotropie nicht unterschieden werden. Zur Entwicklung eines neuen Schädigungsmodells wird deshalb zusätzlich der Schädigungsparameter als ein mit der Deformation sich entwickelnder Strukturtensor betrachtet. Mit Hilfe dieser neuen Interpretation kann bei der Beschreibung der Mikrostrukturänderung durch die Schädigung auf die Ergebnisse aus den Arbeiten von z. B. Spencer (1984) und Boehler (1987c) zurückgegriffen werden. Aus der klassischen Interpretation als interne Zustandsvariable ergeben sich die konstitutiven Gleichungen und die thermodynamischen Einschränkungen aus der Theorie der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen, siehe Coleman & Noll (1963), Coleman & Gurtin (1967) und Lehmann (1984). Mit dieser doppelten Interpretation wird die Schädigungsmodellierung reduziert auf

- die Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen für den Schädigungsparameter,
- die Festlegung von Versagenskriterien und
- die Bestimmung von Materialkonstanten.

Der Rahmen für finite Elastoplastizität, der vor kurzem von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) vorgeschlagen wurde, ist nicht auf eine bestimmte Materialsymmetrie beschränkt. Er ist deshalb gut geeignet für die Schädigungsmodellierung und wird als Basis für das Schädigungsmodell verwendet, d. h. Dehnungs- und Spannungsmaße sind die logarithmischen Henckyschen Dehnungstensoren und ihre arbeitskonjugierten Spannungen. Für die Ratenformulierung von konstitutiven Beziehungen wird die Log-Rate verwendet. Außerdem wird die additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit mit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten kombiniert. Es folgt, daß für das Schädigungsmodell die Diskrepanzen zwischen der Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit und des Deformationsgradienten verschwinden. Für die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten wird die Objektivitätsforderung im allgemeinen Sinne erfüllt, und das Materialmodell ist kinematisch konsistent.

Das im folgenden und im nächsten Kapitel vorgestellte Schädigungsmodell bezieht sich nur auf metallische Werkstoffe. Die Betrachtungen beschränken sich auf die sogenannte duktile plastische Schädigung, d. h.

es wird davon ausgegangen, daß die Entstehung, Ausbreitung und Vereinigung von Mikrodefekten nur durch (große) plastische Formänderungen hervorgerufen wird. Es werden desweiteren auch nur die Fälle betrachtet, bei denen Materialschädigung durch Normalbruch und Delamination hervorgerufen wird. Schädigung durch Mikroscherbandbildung und -wachstum, wie sie z. B. bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen auftritt, siehe Bruhns & Diehl (1989), wird ausgeschlossen. Die Betrachtungen beschränken sich außerdem auf isotherme Prozesse und das ungeschädigte oder jungfräuliche Material wird als isotrop und mikrodefektfrei angenommen. Die Vorgehensweise ist rein phänomenologisch, und auf Makroebene wird die Schädigung als eine mit der Belastung einhergehende Änderung der Materialeigenschaften und Materialsymmetrien angesehen. Es werden aber mikromechanisch abgeleitete Ergebnisse verwendet, um die Theorie abzusichern.

Die Überlegungen in diesem Kapitel beschränken sich auf die Motivation für die Wahl der Schädigungsvariable, das verwendete Versagenskriterium, die Modellierung von aktiver/passiver Schädigung und auf den elastischen Anteil des Materialmodells sowie auf die exakt integrierbare Eulerische Formulierung hyperelastischen Verhaltens, d. h. auf die Angabe des komplementären hyperelastischen Potentials Σ und des rein elastischen Anteils \mathbf{D}^e der Verzerrungsgeschwindigkeit in einer exakt integrierbaren Form. Auf das plastische Materialverhalten und die Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariable wird im nächsten Kapitel eingegangen.

6.2 Schädigungsvariable

Es wird angenommen, daß das Material in der spannungsfreien Ausgangskonfiguration mikrodefektfrei und isotrop ist. Durch die Schädigung entstehen Mikrodefekte, die eine Veränderung der Materialsymmetrie hervorrufen, siehe Abbildung 6.1. In einem makroskopischen, phänomenologischen Rahmen ist die durch Schädigung induzierte Anisotropie nach Belastungsende von der materiellen Anisotropie nicht mehr zu unterscheiden. Sie kann deshalb als eine materielle oder mikrostrukturelle Anisotropie behandelt oder angesehen werden.

Zur Beschreibung von allgemeiner mikrostruktureller Anisotropie, die sich mit der Deformation des Materials nicht weiterentwickelt, werden im

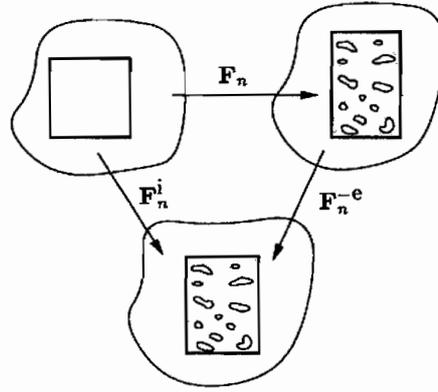


Abbildung 6.1: Schematisch dargestellt sind die Anfangs-, Momentan- und Zwischenkonfigurationen B_0 , \bar{B} und B . In B_0 ist das Material ungeschädigt und isotrop, in B und \bar{B} geschädigt und besitzt von der Schädigung induzierte Vorzugsrichtungen

allgemeinen sogenannte Struktur- oder Materialtensoren verwendet, siehe Doyle & Ericksen (1956), Spencer (1984), Boehler (1987c) und Boehler & Sawczuk (1976). Boehler (1987c) z. B. verwendet die Materialtensoren

$$\mathbf{m}_{ij} = (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

wobei $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ drei orthonormale Vektoren bezeichnen, d. h. $\|\mathbf{n}_i\| = 1$ und $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$. \otimes bezeichnet das dyadische oder tensorielle Produkt. Der Strukturtensor ist im allgemeinen ortsabhängig, d. h. $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ij}(\mathbf{x})$, und traditionell wird davon ausgegangen, daß er sich mit der Zeit nicht ändert.

Durch die Aufnahme von $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{11}$ in das elastische Potential, in die Fließbedingung und in das Fließpotential läßt sich ein in \mathbf{n}_1 -Richtung faserverstärktes Material modellieren. Für ein orthotropes Material verwendet man die Menge $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{11}, \mathbf{m}_{22}, \mathbf{m}_{33}\}$. Die vollständigen Ergebnisse für die hier genannten Fälle können der Arbeit von Spencer (1984) entnommen werden.

Zur Berücksichtigung der Schädigung wird hier ein symmetrischer, positiv semi-definiten Tensor zweiter Stufe \mathbf{d} als Schädigungsparameter eingeführt. Die Struktur­tensoren in Gleichung (6.1) stellen ein Basissystem dar. Der Schädigungstensor kann in der Form

$$\mathbf{d} = d_{ij} \mathbf{m}_{ij} \quad (6.2)$$

angegeben werden, wobei d_{ij} die Komponenten des Schädigungstensors bezüglich (6.1) darstellen. Der Schädigungstensor kann deshalb als ein

allgemeiner und sich mit der Deformation entwickelnder Materialtensor angesehen werden.

Aus dieser Deutung folgt z. B., daß zur Beschreibung von schädigungsinduzierter Anisotropie auf Ergebnisse, die mit Strukturensoren und zur Modellierung von faserverstärkten Werkstoffen hergeleitet wurden, zurückgriffen werden kann. Die im folgenden vorgestellte Schädigungsmodellierung geschieht deshalb in Anlehnung an die Arbeiten von Spencer (1984) und Boehler (1987a, 1987c). Es läßt sich damit auch auf natürliche Art und Weise eine Beziehung für die Transformation des Schädigungstensors zwischen den verschiedenen Konfigurationen angeben: ein Vektor \mathbf{n}_i bzw. der Strukturtensor \mathbf{m}_{ij} in der Referenzkonfiguration geht nach der Deformation in $\mathbf{F} \mathbf{n}_i$ bzw. $\mathbf{F} \mathbf{m}_{ij} \mathbf{F}^T$ über. Mit dieser Überlegung ergibt sich aus (6.2) die folgende Transformationsbeziehung für den Schädigungstensor:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \mathbf{d}(\mathbf{X}) \mathbf{F}^T, \quad (6.3)$$

wobei $\mathbf{d}(\mathbf{X})$ den Schädigungstensor in der Referenzkonfiguration bezeichnet. Nach Hill (1978) und Ogden (1984a) ist $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ der induzierte Tensor von $\mathbf{d}(\mathbf{X})$. $\mathbf{d}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ sind objektive Tensoren, d. h. bei einem Bezugssystemwechsel (2.2) transformieren sich $\mathbf{d}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ wie folgt

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{X}) = \mathbf{d}(\mathbf{X}), \quad (6.4)$$

$$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \star \mathbf{d}(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

Anmerkung 6.1. Der Tensor zweiter Stufe enthält natürlich zusätzlich zu dem trivialen Fall, daß er gleich Null und das Material somit mikrodefektfrei ist, zwei wichtige Sonderfälle: der erste Sonderfall liegt vor, wenn sich die Schädigung so entwickelt, daß nur eine Komponente des Schädigungstensors, z. B. $d_{11} = d$, von Null verschieden ist. Es gilt dann

$$\mathbf{d} = d (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1). \quad (6.6)$$

Diese Form entspricht dem vektoriellen Schädigungsparameter und dem Strukturtensor zur Modellierung von transversaler (An)Isotrope. Im zweiten Sonderfall, auf den später noch eingegangen wird und der in dieser Arbeit im Abschnitt 7.2.1 eine wichtige Rolle spielt, entspricht der Schädigungstensor dem Kugeltensor:

$$\mathbf{d} = d \mathbf{1}. \quad (6.7)$$

In diesem Fall liegt dann isotrope Schädigung vor. \square

6.2.1 Spektralzerlegung des Schädigungstensors

Die Eigenwerte des Schädigungstensors \mathbf{d} werden mit d_A kennzeichnet und die zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren mit \mathbf{n}^A . Die Spektralzerlegung des Schädigungstensors lautet

$$\mathbf{d} = \sum_{A=1}^3 d_A \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^A, \quad \|\mathbf{n}^A\| = 1. \quad (6.8)$$

Für den Fall, daß der Schädigungstensor mehrfache Eigenwerte hat, sind die Eigenvektoren nicht mehr eindeutig. In diesem Fall ist es vorteilhaft, Eigenprojektionen zu verwenden, da diese immer eindeutig angegeben werden können:

$$\mathbf{d} = \sum_{\sigma=1}^n d_{\sigma} \mathbf{d}_{\sigma}, \quad (6.9)$$

wobei n die Anzahl ungleicher Eigenwerte bezeichnet. Die Eigenprojektionen werden aus der Formel von Sylvester (2.57) berechnet.

Der Eigenwert d_{σ} stellt ein Maß für die Abnahme der lasttragenden Fläche in \mathbf{n}^{σ} -Richtung dar; für den Fall, daß alle Eigenwerte gleich sind, wird er als der Porenvolumenanteil betrachtet. Daraus folgt, daß

$$d_{\sigma} \geq 0, \quad \sigma = 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

gelten muß. Der Schädigungsparameter ist demzufolge aus physikalischen Gründen positiv semi-definit. Diese Tatsache ist bei der Aufstellung der Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable unbedingt zu berücksichtigen. Die Annahme, daß der Schädigungsparameter symmetrisch ist, wird damit gerechtfertigt und stellt demzufolge keine Einschränkung dar.

Für das eindimensionale Modell von Kachanov (1958) wird angenommen, daß Bruch oder Versagen des Materials erst bei

$$d_c = 1 \text{ bzw. } \psi_c = 0$$

eintritt. Diese Annahme ist experimentell nicht bestätigt worden (Lemaitre 1985a), und ein einfaches und repräsentatives Modell wie das Fibre-Modell von Hult (1987) zeigt, daß Versagen viel früher eintritt und zwar bei $d_c \leq 0,5$. Im Rahmen einer axiomatischen Schädigungstheorie ergibt

sich nach Mariano & Augusti (1997) ein modifiziertes Versagenskriterium unter Anwendung der Palmgren–Miner-Regel in der Form

$$d_c = \sum_{i=1} d_i \leq \eta, \quad 0 \leq \eta \ll 1, \quad (6.11)$$

wobei η eine von der Reihenfolge der Belastung abhängige Konstante ist. Demzufolge tritt das Versagen des Materials viel früher ein und der Fall $d_c = 1$ liegt nur bei den Testversuchen zur Bestimmung der Anzahl der Umdrehungen bis zum Versagen bzw. Lebensdauerzeit vor. Nach der selbstkonsistenten Methode ergibt sich auch $d_c = 0,5$ (Budiansky 1965). Mikromechanische Berechnungen von Hill (1965) und die Betrachtungen von Rabier (1989) bestätigen dieses Ergebnis. Deswegen wird hier

$$d_c = 0,5 \quad (6.12)$$

verwendet. Für isotrope Schädigung ist der Schädigungstensor ein Kugeltensor. Man kann in diesem Fall d_c als den kritischen Porenvolumenanteil ansehen. Daß das angenommene Versagenskriterium sinnvoll ist, folgt mit dieser Interpretation aus der Tatsache, daß ein Quader mit einer Pore in der Mitte keine Lasten mehr tragen kann, wenn der Porenvolumenanteil den Wert $\pi/6 \approx 0,52$ erreicht hat, siehe Rabier (1989).

6.2.2 Aktive/passive Schädigung

Ändert sich die Belastungsrichtung z. B. von Zug auf Druck kann die Schädigung inaktiv werden, da sich die Mikrodefekte schließen. Im geschlossenen Zustand beeinflussen die Mikrodefekte die elastischen Eigenschaften des Materials nicht mehr. Zur Modellierung dieses Effektes bzw. Berechnung des aktiven Anteils des Schädigungstensors wurden viele Vorschläge gemacht. Die folgenden kurzen Ausführungen beziehen sich aber auf eine Idee von Ortiz (1985), die von Hansen & Schreyer (1994, 1995) aufgenommen und weiter entwickelt wurde. Für Details wird auf diese Arbeiten verwiesen. Im folgenden werden aber Eigenprojektionen verwendet, im Gegensatz zu den Eigenvektoren in Hansen & Schreyer (1994, 1995).

Es wird von den folgenden Spektralzerlegungen des gesamten Verzerrungstensors \mathbf{h} und des elastischen Anteils \mathbf{h}^e des Verzerrungstensors ausgegangen:

$$\mathbf{h} = \sum_{\sigma=1}^n h_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma}, \quad \mathbf{h}^e = \sum_{\sigma=1}^n h_{\sigma}^e \mathbf{B}_{\sigma}^e, \quad (6.13)$$

wobei h_σ bzw. h_σ^e den σ -ten Eigenwert von \mathbf{h} bzw. \mathbf{h}^e bezeichnet und \mathbf{B}_σ bzw. \mathbf{B}_σ^e die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen und n die Anzahl ungleicher Eigenwerte. Damit werden die normalen Spektralprojektionstensoren

$$\mathbf{Q} = \sum_{\sigma=1}^n \mathbf{B}_\sigma, \quad \mathbf{S} = \sum_{\sigma=1}^n \mathbf{B}_\sigma^e \quad (6.14)$$

und die positiven Spektralprojektionstensoren

$$\mathbf{Q}^+ = \sum_{\sigma=1}^n \hat{H}(h_\sigma) \mathbf{B}_\sigma, \quad \mathbf{S}^+ = \sum_{\sigma=1}^n \hat{H}(h_\sigma^e) \mathbf{B}_\sigma^e \quad (6.15)$$

definiert. Hier bezeichnet \hat{H} die Heavisidesche Einheitsfunktion. Man beachte, daß \mathbf{h} und \mathbf{B} die gleichen Eigenprojektionen \mathbf{B}_σ besitzen, und daß, aufgrund von (2.55), \mathbf{Q} bzw. \mathbf{S} der Einheitstensor zweiter Stufe ist. Aus rechen-technischen Gründen ersetzt man die Heavisidesche Einheitsfunktion durch die stetige Funktion

$$2h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_m \\ \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi(x-x_m)}{x_p-x_m} \right] \right\} & \text{für } x_m < x < x_p \\ 2 & \text{für } x \geq x_p, \end{cases} \quad (6.16)$$

wobei x_m und x_p Materialparameter bezeichnen. Die vierstufigen positiven Spektralprojektionsoperatoren \mathbf{P}^+ und \mathbf{R}^+ – zur Berechnung der positiven Projektion der Dehnungstensoren – werden dann mit Hilfe der Spektralprojektionstensoren und unter Berücksichtigung von Gleichung (2.55) wie folgt eingeführt

$$\mathbb{P}_{ijkl}^+ = Q_{ia}^+ Q_{jb}^+ Q_{ka} Q_{lb} = Q_{ik}^+ Q_{jl}^+, \quad (6.17)$$

$$\mathbb{R}_{ijkl}^+ = S_{ia}^+ S_{jb}^+ S_{ka} S_{lb} = S_{ik}^+ S_{jl}^+. \quad (6.18)$$

Damit können dann die positiven Projektionen von \mathbf{h} und \mathbf{h}^e

$$\mathbf{h}^+ = \mathbf{P}^+ \mathbf{h}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{h}^{e+} = \mathbf{R}^+ \mathbf{h}^e \quad (6.20)$$

berechnet werden. Der positive Projektionsoperator \mathbf{T}^+ zur Berechnung des aktiven Anteils \mathbf{d}^+ des Schädigungstensors \mathbf{d} wird wie folgt definiert

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{P}^+) : (\mathbf{I} - \mathbf{R}^+). \quad (6.21)$$

Fall	h^e	h^i	Betrag	h	Schädigung
1	+	+	$ h^e > h^i $	+	aktiv
2	+	+	$ h^e < h^i $	+	aktiv
3	+	-	$ h^e > h^i $	+	aktiv
4	+	-	$ h^e < h^i $	-	aktiv
5	-	+	$ h^e > h^i $	-	inaktiv
6	-	+	$ h^e < h^i $	+	aktiv
7	-	-	$ h^e > h^i $	-	inaktiv
8	-	-	$ h^e < h^i $	-	inaktiv

Tabelle 6.1: Aktive Schädigungsbedingung

Hier bezeichnet \mathbf{I} den Einheitstensor vierter Stufe. Der aktive Anteil \mathbf{d}^+ des Schädigungstensors und der passive oder nicht aktive Anteil \mathbf{d}^- werden dann aus

$$\mathbf{d}^+ = \mathbf{T}^+ : \mathbf{d} \quad (6.22)$$

und

$$\mathbf{d}^- = (\mathbf{I} - \mathbf{T}^+) : \mathbf{d} \quad (6.23)$$

berechnet. Damit ergibt sich die folgende additive Zerlegung des Schädigungstensors:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^+ + \mathbf{d}^-. \quad (6.24)$$

Die aktiven/passiven Fälle, die sich aus (6.22) für den eindimensionalen Fall ergeben, sind in der Tabelle 6.1 dargestellt. Im folgenden ist mit Schädigungsvariable oder -tensor immer der aktive Anteil der Schädigungsvariable gemeint und zur Vereinfachung der Notation wird \mathbf{d} für \mathbf{d}^+ verwendet.

6.3 Komplementäres hyperelastisches Potential

Nach den thermodynamischen Überlegungen in Kapitel 4 ist die spezifische freie Enthalpie Φ eine eindeutige Funktion der Spannung $\mathbf{\Pi}$, der absoluten Temperatur Θ und der Menge \mathbf{A} der internen Zustandsvariablen:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{\Pi}, \Theta, \mathbf{A}), \quad (6.25)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{a}, \quad (6.26)$$

wobei $\mathbf{\Pi}$ den zum referentiellen Henckyschen Dehnungstensor \mathbf{H} arbeitskonjugierten Spannungstensor bezeichnet, Θ die absolute Temperatur und \mathbf{R} den Rotationstensor. \mathbf{A} bzw. \mathbf{a} besteht aus der kinematischen bzw. isotropen Verfestigungsvariable $\boldsymbol{\alpha}$ bzw. κ und Schädigungsvariable \mathbf{d} – siehe Gleichung (4.2). Es wird angenommen, daß die Schädigungsvariable das einzige Element der Menge der internen Zustandsvariablen sei, das das elastische Materialverhalten beeinflußt. Außerdem sind die Betrachtungen hier auf isotherme Prozesse beschränkt, und nach Lehmann (1989) wird von der folgenden additiven Zerlegung von Φ ausgegangen:

$$\Phi = \Phi^e(\mathbf{\Pi}, \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}) + \Phi^i(\mathbf{A}). \quad (6.27)$$

Φ^e bezeichnet den elastischen oder reversiblen Anteil der freien Enthalpie und Φ^i , dessen konkrete Form im nächsten Kapitel angegeben wird, den inelastischen Anteil. Φ^e hängt von der Spannung und der Schädigungsvariablen ab. Das komplementäre hyperelastische Potential Σ des Materials in der Referenzkonfiguration wird durch die folgende Beziehung eingeführt:

$$\Sigma = \rho_0 \Phi^e = \Sigma(\mathbf{\Pi}, \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}). \quad (6.28)$$

Aus der thermischen Zustandsgleichung (4.62) folgt für den elastischen Anteil \mathbf{H}^e des referentiellen Henckyschen Dehnungstensors die Beziehung

$$\mathbf{H}^e = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{\Pi}}(\mathbf{\Pi}, \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}). \quad (6.29)$$

Die Beziehung (6.29) entspricht Gleichung (28) in Xiao, Bruhns & Meyers (2000a). Mit Hilfe von Lemma **B** von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) folgt, daß das Potential Σ in der Eulerschen Darstellung eine Funktion von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} ist¹ und die partielle Ableitung von Σ nach der Spannung $\boldsymbol{\pi}$ den elastischen Anteil \mathbf{h}^e von \mathbf{h} ergibt. Es gilt also

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}), \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \mathbf{R} \star \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{\Pi}}, \quad (6.31)$$

¹Ist Σ eine skalarwertige isotrope Tensorfunktion von $\mathbf{\Pi}$ und $\mathbf{R}^T \star \mathbf{d}$, dann gilt

$$\Sigma(\mathbf{\Pi}, \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}) = \Sigma(\mathbf{Q} \star \mathbf{\Pi}, \mathbf{Q} \star \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}) \quad \mathbf{Q} \in SO_3.$$

Wählt man $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ und verwendet (3.112) und (1.33)₂, folgt sofort (6.30).

und die räumliche Form der thermischen Zustandsgleichung (6.29) lautet

$$\mathbf{h}^e = \frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\pi}} (\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}), \quad (6.32)$$

wobei die Beziehung (2.62) verwendet wurde.

Nach dem Prinzip der materiellen Objektivität bleibt das komplementäre hyperelastische Potential Σ bei einer Beobachtertransformation (2.2) unverändert. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\pi}$ und der Schädigungstensor \mathbf{d} sind objektive Eulersche Tensoren. Σ muß deshalb für jeden beliebigen Drehtensor $\mathbf{Q} \in SO_3$ der Invarianzbedingung

$$\Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}) = \Sigma(\mathbf{Q} \star \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Q} \star \mathbf{d}) \quad (6.33)$$

genügen. Das hyperelastische Potential Σ ist also eine isotrope Tensorfunktion von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} und ist nach dem Darstellungssatz für isotrope Tensorfunktionen (mit $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_1$ und $\mathbf{d} = \mathbf{A}_2$) eine Funktion der 10 Grundinvarianten (1.39). Daraus läßt sich unter Berücksichtigung nur linearer Terme in \mathbf{d} die Näherungsfunktion

$$2 \Sigma = \eta_1 (\text{tr} [\boldsymbol{\pi}])^2 + 2 \eta_2 \text{tr} [\boldsymbol{\pi}^2] + 2 \eta_3 \text{tr} [\boldsymbol{\pi}] \text{tr} [\boldsymbol{\pi} \mathbf{d}] + 4 \eta_4 \text{tr} [\boldsymbol{\pi}^2 \mathbf{d}] \quad (6.34)$$

für Σ konstruieren. Hier bezeichnen $\eta_1 - \eta_4$ Ansatzfreiwerte, die im allgemeinen Funktion der Grundinvarianten von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} sind. In Indexschreibweise gilt

$$2 \Sigma = \pi_{ij} \mathbb{D}_{ijkl} \pi_{kl} \quad (6.35)$$

mit dem Nachgiebigkeitstensor

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{ijkl} = & \eta_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \eta_3 (\delta_{ij} d_{kl} + \delta_{kl} d_{ij}) \\ & + \eta_4 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}). \end{aligned} \quad (6.36)$$

In Schieße (1994) und Bruhns & Schiesse (1996) wird ebenfalls von der Beziehung (6.36) ausgegangen.

Es wird hier angenommen, daß das ungeschädigte oder jungfräuliche Material isotrop und mikrodefektfrei ist. Mikromechanische Überlegungen, siehe z. B. Budiansky & O'Connell (1976) und Horii & Nemat-Nasser (1983), zeigen dann, daß man den Nachgiebigkeitstensor additiv in einen ungeschädigten oder isotropen und einen schädigungsinduzierten Anteil

aufspalten kann und daß der isotrope Anteil gleich dem Nachgiebigkeitstensor des jungfräulichen Materials ist. Demnach gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \mathbf{D}^d \quad (6.37)$$

mit

$$\mathbf{D}^0 = \eta_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{I} \quad (6.38)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{ijkl}^d = \eta_3 (\delta_{ij} d_{kl} + \delta_{kl} d_{ij}) \\ + \eta_4 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{1}$ den Einheitstensor zweiter Stufe und \mathbf{I} den symmetrischen Einheitstensor vierter Stufe. Der Anteil \mathbf{D}^0 des Nachgiebigkeitstensors ist die Inverse des Elastizitätstensors

$$\mathbf{C}^0 = \lambda^0 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu^0 \mathbf{I} \quad (6.40)$$

des ungeschädigten Materials. λ^0 und μ^0 bezeichnen die Laméschen Konstanten des ungeschädigten Materials. Zwischen λ^0 und μ^0 und η_1 und η_2 bestehen deshalb die folgenden Beziehungen:

$$\eta_1 = \frac{-\lambda^0}{2\mu^0(3\lambda^0 + 2\mu^0)}, \quad \eta_2 = \frac{1}{4\mu^0} \quad (6.41)$$

bzw.

$$\mu^0 = \frac{1}{4\eta_2}, \quad \lambda^0 = \frac{-\eta_1}{\eta_2(1 + 6\eta_1)}. \quad (6.42)$$

Die zwei verbleibenden Materialparameter η_3 und η_4 müssen aus Experimenten bestimmt werden. Beachtet man aber die Tatsache, daß die Schädigung die Tragfähigkeit einer Struktur verringert bzw. die Nachgiebigkeit vergrößert, kann davon ausgegangen werden, daß η_3 und η_4 positive Konstanten sein müssen.

$$\eta_3 \geq 0, \quad (6.43)$$

$$\eta_4 \geq 0. \quad (6.44)$$

Die Ungleichungen (6.43) und (6.44) ergeben sich auch aus der Überlegung, daß für eine vorgegebene Spannung $\boldsymbol{\pi}$ das komplementäre hyperelastische Potential eines geschädigten Materials größer als das eines ungeschädigten ist:

$$\Sigma(\boldsymbol{\pi}) = \|\boldsymbol{\pi}\|_{\mathbb{D}^0} \leq \|\boldsymbol{\pi}\|_{\mathbb{D}} = \Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}). \quad (6.45)$$

Es wird im nächsten Kapitel gezeigt, daß die Ungleichungen (6.43) und

(6.44) thermodynamisch konsistent sind und eigentlich aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik folgen.

Mit Gleichung (6.35) folgt aus (6.32) die hyperelastische Beziehung

$$\mathbf{h}^e = \mathbf{D} : \boldsymbol{\pi} \quad (6.46)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{C} : \mathbf{h}^e. \quad (6.47)$$

Für isotropes Material und isotrope Schädigung entspricht die Spannung $\boldsymbol{\pi}$ dem Kirchhoffschen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und ist deswegen mit \mathbf{h}^e koaxial. Mit dem Elastizitätstensor in der Form

$$\mathbf{C} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right), \quad (6.48)$$

wobei $\kappa = \lambda + 2/3\mu$ hier den Kompressionsmodul des geschädigten Materials bezeichnet, und den Beziehungen (2.54)–(2.56), kann man das elastische Stoffgesetz in der Form

$$\boldsymbol{\pi} = \lambda \text{tr} [\ln \mathbf{V}^e] \mathbf{1} + 2\mu \ln \mathbf{V}^e \quad (6.49)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\sigma=1}^n \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \ln J^e + \mu \ln \chi_{\sigma}^e \right] \mathbf{B}_{\sigma}^e \quad (6.50)$$

angeben. Hier bezeichnen χ_{σ}^e die Eigenwerte von \mathbf{B}^e , \mathbf{B}_{σ}^e die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen, und n kennzeichnet die Anzahl ungleicher Eigenwerte. Die Gleichung (6.49) bzw. (6.50) ohne Schädigung ($\kappa \mapsto \kappa^0, \dots$) geht auf Hencky zurück. Sie ist zur Beschreibung von großen (moderaten elastischen) Formänderungen unter anderem von Anand (1979, 1986), Eterovic & Bathe (1990), Perić, Owen & Honnor (1992), Simo (1992), Bathe (1996), und Schieck & Stumpf (1993, 1995) verwendet worden.

Anmerkungen 6.2. Man beachte, daß das hier verwendete Stoffgesetz eigentlich ein Sonderfall des von Bruhns, Xiao & Meyers (1999a) vorgestellten Modells darstellt, da es hier von einer quadratischen Funktion in der Spannung $\boldsymbol{\pi}$ für das komplementäre hyperelastische Potential Σ ausgegangen wird.

Für isotrope Schädigung ändern sich die Symmetrieeigenschaften des Materials nicht. Für ein anfänglich isotropes Material und für einen Drehensor $\mathbf{Q} \in SO_3$ muß deshalb die folgende Invarianzbedingung gelten (Boehler 1987a):

$$\Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}) = \Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{Q} \star \mathbf{d}). \quad (6.51)$$

Daraus folgt, daß der Schädigungstensor \mathbf{d} ein isotroper Tensor zweiter Stufe sein muß:

$$\mathbf{d} = \mathbf{Q} \star \mathbf{d}. \quad (6.52)$$

Der Kugeltensor ist der einzige Tensor zweiter Stufe, der die letzte Beziehung erfüllt. Folglich ist bei isotroper Schädigung von einem Schädigungstensor in der Form von Gleichung (6.7) auszugehen.

Für isotrope Schädigung und mit \mathbf{d} wie in Gleichung (6.7) vereinfacht sich die Darstellung des Nachgiebigkeitstensors zu

$$\mathbb{D} = \tilde{\eta}_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \tilde{\eta}_2 \mathbb{I} \quad (6.53)$$

mit

$$\tilde{\eta}_1 = \eta_1 + 2 \eta_3 d, \quad \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 2 \eta_4 d \quad (6.54)$$

und

$$\eta_i = \eta_i(E^0, \nu^0, d), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6.55)$$

Im Gegensatz zu herkömmlichen Schädigungsmodellen – siehe Anmerkungen 5.1. und 5.4. – hat man bei dieser Darstellung zwei Materialparameter $\tilde{\eta}_1$ und $\tilde{\eta}_2$, die beide von der Schädigung abhängen. Das Modell kann also bei isotroper Schädigung sowohl die Veränderung des Elastizitätsmoduls als auch die der Querkontraktionszahl wiedergeben.

Unter Anwendung von (1.33)₁, (1.33)₂ und mit (3.112) ergibt sich die folgende Lagrangesche Darstellung für Σ :

$$\Sigma = \Pi_{\alpha\beta} \tilde{\mathbb{D}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \Pi_{\gamma\delta}, \quad (6.56)$$

wobei $\tilde{\mathbb{D}}$ den zurückgedrehten Nachgiebigkeitstensor

$$\tilde{\mathbb{D}} = \mathbf{R}^T \star \mathbb{D} = \mathbb{D}^0 + \mathbb{D}^d(\mathbf{R}^T \star \mathbf{D}) \quad (6.57)$$

darstellt.

Die hier gewählte Vorgehensweise läßt sich leicht auf anfänglich anisotropes Material erweitern. \mathbf{m}_0 sei der Strukturtensor des ungeschädigten Materials. Das komplementäre hyperelastische Potential Σ hängt in diesem Fall von $\boldsymbol{\pi}$, \mathbf{m}_0 und \mathbf{d} ab:

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{m}_0, \mathbf{d}). \quad (6.58)$$

Mit der Annahme, daß hier auch der Nachgiebigkeitstensor additiv in einen ungeschädigten und einen schädigungsinduzierten Anteil aufgespalten werden kann, erhält man

$$\Sigma = \Sigma^0(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{m}_0) + \Sigma^d(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{m}_0, \mathbf{d}). \quad (6.59)$$

Mit $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_1$ und $\mathbf{m}_0 = \mathbf{A}_2$ ist der ungeschädigte Anteil Σ^0 eine Funktion der 10 Grundinvarianten (1.39). Mit $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{A}_2$ und $\mathbf{d} = \mathbf{A}_3$ ist der schädigungsinduzierte Anteil Σ^d eine Funktion der 22 Grundinvarianten (1.38). Man beachte, daß Σ von \mathbf{m}_0 abhängt und daß \mathbf{m}_0 aber *nicht* ein Element der Menge \mathbf{a} der internen Zustandsvariablen ist. Ersichtlich werden dadurch die unterschiedlichen Funktionen, die der Schädigungstensor hier und bei den thermodynamischen Überlegungen in Kapitel 4 hat. \square

6.4 Exakt integrierbare Eulersche Formulierung hyperelastischen Verhaltens

Als weitere konstitutive Annahme wird hier nach Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) von der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} in einen elastischen Anteil \mathbf{D}^e und einen elastisch-inelastischen Anteil \mathbf{D}^{ei} ausgegangen:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{ei}. \quad (6.60)$$

Die einzig sinnvolle und natürliche Verknüpfung zwischen der Zerlegung (6.60) der Verzerrungsgeschwindigkeit und der multiplikativen Zerlegung (2.86) des Deformationsgradienten wird durch die Gleichung (2.104) gegeben. Die gewählte Bezeichnung, elastischer Anteil für \mathbf{D}^e und elastisch-inelastischer Anteil für \mathbf{D}^{ei} , erklärt sich daraus, daß \mathbf{D}^e nur von \mathbf{F}^e abhängt und \mathbf{D}^{ei} sowohl von \mathbf{F}^e als \mathbf{F}^i abhängt, siehe Abschnitt 2.9.

Aus der hyperelastischen Form (6.32) des elastischen Stoffgesetzes kann man im allgemeinen nur den (linken) Strecktensor \mathbf{V} bestimmen und demzufolge den Deformationsgradienten nicht eindeutig festlegen. Nach Lemma A in Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) läßt sich der Deformationsgradient $\mathbf{F}^+(t)$ eindeutig bestimmen, falls $\mathbf{V}^+(t)$, die Verzerrungsgeschwindigkeit $\mathbf{D}^+(t)$ und der Anfangswert $\mathbf{F}^+(0)$ von \mathbf{F} vorgegeben sind. Im folgenden soll deshalb zur eindeutigen Festlegung von \mathbf{F}^e zusätzlich zu (6.32) die konstitutive Beziehung für die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^e (Ratenform des elastischen Stoffgesetzes) angegeben werden. Dadurch wird die kinematische Konsistenz des Stoffgesetzes gesichert, siehe Anhang B. Auf den elastisch-inelastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit wird im nächsten Kapitel eingegangen.

Der elastische linke Cauchy-Green-Tensor wird wie folgt definiert

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}. \quad (6.61)$$

Für den elastischen räumlichen Henckyschen Verzerrungstensor gilt deshalb

$$\mathbf{h}^e = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}^e = \frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\pi}}, \quad (6.62)$$

wobei in (6.62)₂ die elastische Beziehung (6.32) verwendet wurde. Die mitrotierende Zeitableitung von Gleichung (6.62) mit der Log-Rate ergibt die Ratenformulierung

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2} \overset{\circ}{(\ln \mathbf{B}^e)^{\text{Log}}} = \overset{\circ}{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})^{\text{Log}}} \quad (6.63)$$

des Stoffgesetzes. Man beachte, daß zur alleinigen Erfüllung des Prinzips der Objektivität oder materiellen Bezugsindifferenz (Truesdell & Noll 1965) in Gleichung (6.63) jede objektive mitrotierende Zeitableitung verwendet werden kann. Ein in Ratenform formuliertes elastisches Stoffgesetz muß aber selbst-konsistent sein, d. h. es muß exakt integrierbar sein, und für ein Material mit Schädigung muß sich eine allgemeine Beziehung in der Form von Gleichung (6.32) daraus ergeben. Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) zeigen, daß von allen objektiven Zeitableitungen die exakte Integrierbarkeit nur für die Log-Rate gegeben ist. Außerdem gilt – wie im Kapitel 2 und im Anhang A gezeigt – nur für die Log-Rate, daß die mitrotierende Zeitableitung des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors genau die Verzerrungsgeschwindigkeit ergibt. Das Stoffgesetz ist deshalb frei

von solchen Pseudoeffekten wie der Oszillation der Spannung beim ebenen Scherversuch, siehe z. B. Dienes (1979).

Wenn man den Zusammenhang zwischen der Log-Rate und der Green-Naghdi-Rate verwendet, kann das Stoffgesetz (6.63) in der Form

$$\mathbf{D}^e = \overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\circ R} + (\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} (\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi}) \quad (6.64)$$

angegeben werden. $\boldsymbol{\Omega}^{LR}$ bezeichnet die Differenz aus dem Log-Spin $\boldsymbol{\Omega}^{Log}$ und dem Polar-Spin $\boldsymbol{\Omega}^R$. In einem Bezugssystem, daß sich mit dem Polar-Spin dreht, bleiben die Materialsymmetrien aufgrund der Deformation unverändert. Folglich kann von der Kettenregel in der Form

$$\overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\circ R} = \mathbf{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + [\partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \mathbf{d})] : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^R \quad (6.65)$$

Gebrauch gemacht werden und es folgt für die elastische Verzerrungsgeschwindigkeit die Beziehung

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D}^{e0} + \mathbf{D}^{ed} \quad (6.66)$$

mit

$$\mathbf{D}^{e0} = \mathbf{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + (\mathbf{D} : \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR} (\mathbf{D} : \boldsymbol{\pi}), \quad (6.67)$$

$$\mathbf{D}^{ed} = [\partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \mathbf{d})] : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^R. \quad (6.68)$$

Der Anteil \mathbf{D}^{e0} der Verzerrungsgeschwindigkeit ist rein elastisch, und der Anteil \mathbf{D}^{ed} ist schädigungsinduziert. Folglich unterscheidet sich die Beziehung (6.66) von der Gleichung (35) in Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) nur durch das letzte Glied auf der rechten Seite, das hier aufgrund der Schädigung auftritt.

Anmerkung 6.3. Die Lie Ableitung $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^L$ des Kirchhoffschen Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ kommt ganz natürlich in der Ratenform der schwachen Form der Impulsbilanzgleichung vor. Hier wird deshalb das Stoffgesetz als eine Beziehung zwischen der Lie Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors und der Verzerrungsgeschwindigkeit angegeben.

Für isotropes elastisches Verhalten gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{Log} \quad (6.69)$$

bzw.

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}. \quad (6.70)$$

Setzt man diese Gleichung in die Beziehung (3.49) ein, erhält man das elastische Stoffgesetz in der Form

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{L}} = (\mathbf{C} + \mathbf{G}) : \mathbf{D} = \mathbf{H}^{\text{Log}} : \mathbf{D}, \quad (6.71)$$

wobei der vierstufige Tensor \mathbf{G} durch Gleichung (3.50) gegeben wird. Mit Gleichung (3.46) und (2.96) erhält man aus der letzten Gleichung die folgende materielle Darstellung der Ratenform des Stoffgesetzes:

$$\dot{\mathbf{S}} = (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{H}^{\text{Log}}] \mathbf{F}^{-\text{T}} \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.72)$$

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = (\mathbf{F}^{-1})_{\alpha a} (\mathbf{F}^{-1})_{\beta b} (\mathbf{F}^{-1})_{\delta c} (\mathbf{F}^{-1})_{\gamma d} \mathbb{H}_{abcd}^{\text{Log}} \dot{E}_{\delta\gamma}, \quad (6.73)$$

wobei \mathbf{S} den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bezeichnet und \mathbf{E} den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor. \square

Kapitel 7

Materialmodell – Plastisches Verhalten

7.1 Einleitung

Schädigung beeinflusst nicht nur das elastische, sondern auch das plastische Materialverhalten. Die Verfestigungseigenschaften eines Materials, das eine Deformation mit Schädigung vollzieht, hängen entscheidend vom Schädigungszustand ab. Die durch die Schädigung hervorgerufene oder induzierte Anisotropie muß bei der Aufstellung der Fließfunktion berücksichtigt werden. Bisher wurde in vielen Schädigungsmodellen der Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten entweder vernachlässigt oder nur im Rahmen von Effektivspannungs- und Effektivverzerrungskonzepten berücksichtigt, die sogar für elastisches Materialverhalten keine ausreichende Beschreibung des Materialverhaltens bieten. Mit der im Kapitel 6 eingeführten Interpretation des Schädigungsparameters als ein sich entwickelnder Strukturtenor soll deshalb in diesem Kapitel auf den Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten eingegangen werden.

Zur phänomenologischen Modellierung von ratenunabhängigem plastischen Materialverhalten ohne Schädigung werden fünf Komponenten benötigt: eine Fließbedingung, eine Be- und Entlastungsbedingung, eine Fließregel, eine Konsistenzbedingung und Entwicklungsgleichungen für die Verfestigungsvariablen. Liegt aber auch Schädigung vor, werden zusätzlich eine Schädigungsbedingung oder -grenze und eine Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable benötigt. Zur Untersuchung des Einflusses der Schädigung auf plastisches Materialverhalten wird im folgenden auf die

einzelnen Komponenten eingegangen.

Die Betrachtungen hier beschränken sich auf metallische Werkstoffe und auf die sogenannte duktile plastische Schädigung, d. h. es wird angenommen, daß die Entstehung, die Ausbreitung und die Vereinigung von Mikrodefekten nur durch (große) plastische Formänderungen hervorgerufen werden; angewendet wird desweiteren die sogenannte gekoppelte Betrachtungsweise, d. h. für Schädigung und Plastizität wird die gleiche Fließfunktion und Belastungsbedingung verwendet. Der Schädigungsparameter wird als ein symmetrischer, positiv semi-definiten Tensor zweiter Stufe angenommen, siehe Kapitel 6. Das ungeschädigte oder jungfräuliche Material wird als isotrop und von von Misesschem-Typ (J_2 -Plastizität) angenommen. Es werden nur isotherme Prozesse betrachtet, also Prozesse, bei denen die Prozeßgeschwindigkeiten so klein sind, daß die während der inelastischen Formänderung in Wärme umgesetzte Verzerrungsarbeit abgeführt werden kann. Als Anhaltswert für die Prozeßgeschwindigkeit wird in Bruhns (1992)

$$\dot{\epsilon} \leq 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (7.1)$$

für metallische Werkstoffe gegeben. Für Prozeßgeschwindigkeiten nach Gleichung (7.1) ist die Annahme, daß die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von der Geschwindigkeit unabhängig sind, gerechtfertigt. Für größere Dehnungsgeschwindigkeiten muß man ein viskoplastisches Materialmodell verwenden.

7.2 Fließbedingung

Es wird hier davon ausgegangen, daß der elastische Bereich \mathbb{E}_σ vom inelastischen Bereich im Spannungsraum durch eine konvexe Fläche, die Fließfläche $F = 0$, getrennt wird. Der elastische Bereich wird also definiert als

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) \leq 0\}, \quad (7.2)$$

wobei \mathbf{a} – siehe Gleichung (4.2) – die Menge der internen Zustandsvariablen bezeichnet. Nach Lehmann (1964, 1972) wird von der folgenden allgemeinen Form der Plastizitätsbedingung ausgegangen:

$$F = k + \mathbf{K} : \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} : \mathbf{K} : \boldsymbol{\pi}. \quad (7.3)$$

Hier ist k ein Skalar, \mathbf{K} ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe und \mathbf{K} ein symmetrischer Tensor vierter Stufe. Gleichung (7.3) stellt eine nach dem quadratischen Glied abgebrochene polynomiale Fließbedingung dar. Mit den Umbezeichnungen

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{K} = -2\mathbf{A} : \mathbf{X}, \quad k = \mathbf{X} : \mathbf{A} : \mathbf{X} - g \quad (7.4)$$

läßt sich die Fließbedingung (7.3) in der allgemeinen und auf von Mises und Hill (1950) zurückgehenden Form

$$F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{X}, \kappa) = (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{X}) : \mathbf{A} : (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{X}) - g \quad (7.5)$$

angeben (Kreißig 1992). Der Tensor vierter Stufe \mathbf{A} wird als Anisotropietensor bezeichnet und soll im folgenden schädigungsinduziertes anisotropes Fließen charakterisieren. Der zweistufige, Eulersche und objektive Tensor \mathbf{X} bezeichnet den back-stress Tensor, κ die isotrope Verfestigungsvariable, und g entspricht dem Quadrat der Fließspannung im Zugversuch.

Für den Fall, daß \mathbf{A} konstant bleibt, bleibt sich die Fließfläche geometrisch ähnlich. Sie verändert aber ihre Ausdehnung, da κ bzw. g eine Funktion der plastischen Verzerrungen ist. Außerdem verschiebt sich der Ursprung der Fließfläche im Spannungsraum, weil \mathbf{X} von der plastischen Deformation abhängt. Aus thermodynamischen Gründen muß die Fließfläche konvex sein. Daraus folgt, daß \mathbf{A} ein positiv definiten Tensor sein muß. Im allgemeinen ist der Anisotropietensor \mathbf{A} eine Funktion der plastischen Verzerrungen und der Schädigung. Er hängt von der Deformation ab und dadurch verändert sich die geometrische Form der Fließfläche. Da von einem anfänglich isotropen und von Misesschen Material ausgegangen wird, ist sie am Anfang ein Zylinder und nimmt mit fortschreitender Schädigung die Form eines Ellipsoids an.

Mit der Annahme, daß reines plastisches Materialverhalten die Symmetrieeigenschaften des Materials nicht ändert und diese ausschließlich vom Schädigungszustand des Materials abhängen, ist der Anisotropietensor nur noch eine Funktion des Schädigungstensors. Es wird demzufolge

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{d}) \quad (7.6)$$

angesetzt. Die Aufgabe besteht darin zu bestimmen, wie der Anisotropietensor, der ein Schädigungseffektmaß darstellt, von der Schädigungsvariablen abhängt. Nach den Überlegungen aus Kapitel 6 wird der Schädigungstensor als ein sich entwickelnder Materialtensor angesehen. Er kann

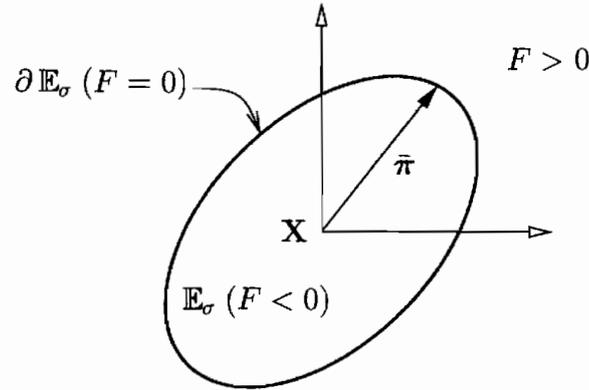


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung der Fließbedingung im Spannungsraum

demzufolge zur Berücksichtigung der Materialsymmetrie und zur impliziten Berechnung der Effektivspannung in die Fließbedingung eingeführt werden:

$$F = F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{d}). \quad (7.7)$$

Es wird, wie in Abbildung 7.1 schematisch dargestellt, angenommen, daß die Fließfläche im Spannungsraum eine Hyperfläche mit Ursprung bei \mathbf{X} darstellt, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$F = \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\pi}}, \mathbf{d}) - g(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{d}), \quad (7.8)$$

wobei

$$\bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{X} \quad (7.9)$$

den sogenannten shifted-stress Tensor bezeichnet. Für eine allgemeine Starrkörperbewegung (2.2) ändert sich die Fließfläche nicht, und folglich gilt

$$F(\bar{\boldsymbol{\pi}}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\kappa}) = \bar{F}(\mathbf{Q} \star \bar{\boldsymbol{\pi}}, \mathbf{Q} \star \mathbf{d}) - g(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{Q} \star \mathbf{d}) \quad (7.10)$$

für jeden $\mathbf{Q} \in SO_3$. Daraus folgt, daß die Funktion g eine isotrope Tensorfunktion ist, die von $\boldsymbol{\kappa}$ und den Grundinvarianten (1.28) des Schädigungstensors abhängt. Die Funktion \bar{F} ist demnach auch eine isotrope Tensorfunktion von $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ und \mathbf{d} . Mit $\bar{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{A}_1$ und $\mathbf{d} = \mathbf{A}_2$ und nach dem Darstellungssatz für isotrope Tensorfunktionen ist \bar{F} eine Funktion der 10 Grundinvarianten (1.39). Daraus läßt sich unter Vernachlässigung von

Termen dritter Ordnung in $\bar{\pi}$ gemäß Gleichung (7.3) die Näherungsfunktion

$$\begin{aligned} \bar{F} = & a_1 (\text{tr} [\bar{\pi}])^2 + 2 a_2 \text{tr} [\bar{\pi}^2] + 2 a_3 \text{tr} [\bar{\pi}] \text{tr} [\bar{\pi} \mathbf{d}] + 4 a_5 \text{tr} [\bar{\pi}^2 \mathbf{d}] \\ & + a_6 (\text{tr} [\bar{\pi} \mathbf{d}])^2 + 2 a_7 \text{tr} [\bar{\pi}] \text{tr} [\mathbf{d}^2 \bar{\pi}] + 4 a_9 \text{tr} [\bar{\pi}^2 \mathbf{d}^2] \end{aligned} \quad (7.11)$$

konstruieren. Hier bezeichnen a_1 bis a_{12} Ansatzfreiwerte, die im allgemeinen Funktionen der Invarianten (1.39) sind. In Indexschreibweise läßt sich unter Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors, der Verfestigungs- und der Schädigungsvariable die Fließfläche in der folgenden Form angeben:

$$F = \bar{\pi}_{ij} \mathbb{A}_{ijkl} \bar{\pi}_{kl} - g(\kappa, d_1, d_2, d_3), \quad (7.12)$$

wobei d_1, d_2, d_3 die Eigenwerte des Schädigungstensors bezeichnen. Der Anisotropietensor \mathbb{A}_{ijkl} besitzt die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ijkl} = & a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + a_3 \delta_{ij} d_{kl} + a_4 \delta_{kl} d_{ij} \\ & + a_5 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}) + a_6 (d_{ij} d_{kl}) \\ & + (a_7 \delta_{ij} d_{kl}^2 + a_8 d_{ij}^2 \delta_{kl}) + a_9 (\delta_{jk} d_{il}^2 + \delta_{ik} d_{jl}^2 + \delta_{jl} d_{ik}^2 + \delta_{il} d_{jk}^2). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Damit ist eine allgemeine Darstellung für \mathbf{A} hergeleitet worden. Diese Darstellung stimmt überein mit dem Ergebnis von Baltov & Sawczuk (1965).

Anmerkung 7.1. Mit (1.33) erhält man die folgende Lagrangesche Darstellung der Fließbedingung:

$$F = \bar{\Pi} : \tilde{\mathbf{A}} : \bar{\Pi} - g(\kappa, \tilde{\mathbf{d}}) = \bar{\Pi}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbb{A}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\Pi}_{\gamma\delta} - g(\kappa, \tilde{\mathbf{d}}), \quad (7.14)$$

wobei hier $\tilde{\mathbf{A}}$ den zurückgedrehten Anisotropietensor bezeichnet,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{A} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{d}}), \quad (7.15)$$

$\bar{\Pi}$ den zurückgedrehten Relativ-Stress-Tensor, $\tilde{\mathbf{X}}$ den zurückgedrehten back stress Tensor und $\tilde{\mathbf{d}}$ den zurückgedrehten Schädigungstensor:

$$\bar{\Pi} = \Pi - \tilde{\mathbf{X}}, \quad \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{X}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{d}. \quad (7.16)$$

\mathbf{R} ist der Rotationstensor aus der Polarzerlegung des Deformationsgradienten. \square

7.2.1 Anpassung an Gurson (1977)

Das Hauptinteresse gilt hier der Beschreibung metallischer Werkstoffe. Es wird deshalb im folgenden zur Bestimmung der Ansatzfreiwerte die Fließfunktion (7.5) an die Fließfläche von Gurson (1977) angepasst.

Da nach der Annahme (7.3) die Fließfläche eine quadratische Funktion in der Spannung ist, können die Ansatzfreiparameter nur noch von der Schädigungsvariablen abhängen. Für die weiteren Betrachtungen werden im Ausdruck für den Anisotropietensor Terme dritter und höherer Ordnung in der Schädigungsvariablen vernachlässigt und es wird desweiteren angenommen, daß alle Ansatzfreiparameter Konstanten sind:

$$a_i = \text{Konst.} \quad i = 1, 2, \dots, 9. \quad (7.17)$$

Außerdem wird eine additive Aufspaltung von \mathbf{A} in einen schädigungsinduzierten oder anisotropen Anteil \mathbf{A}^d und einen isotropen Anteil \mathbf{A}^0 vorgenommen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^d, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{A}^0 = a_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2a_2 \mathbf{I}, \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ijkl}^d &= a_3 \delta_{ij} d_{kl} + a_4 \delta_{kl} d_{ij} \\ &+ a_5 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}) + a_6 (d_{ij} d_{kl}) \\ &+ (a_7 \delta_{ij} d_{kl}^2 + a_8 d_{ij}^2 \delta_{kl}) + a_9 (\delta_{jk} d_{il}^2 + \delta_{ik} d_{jl}^2 + \delta_{jl} d_{ik}^2 + \delta_{il} d_{jk}^2). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Diese Aufspaltung des Anisotropietensors entspricht prinzipiell der Zerlegung des Nachgiebigkeitstensors in Kapitel 6. Für die Fließbedingung des anfänglich isotropen Materials, von dem hier ausgegangen wird, gilt

$$F_0 = \frac{3}{2} \pi'_{ij} \pi'_{ij} - \pi_0^2, \quad (7.21)$$

wobei π_0 die Anfangsfließspannung bezeichnet. Damit ergeben sich die Materialkonstanten für den isotropen Anteil \mathbf{A}^0 von \mathbf{A} als

$$a_1 = -0,5 \quad a_2 = 0,75 \quad (7.22)$$

und damit gilt

$$\mathbf{A}^0 = \frac{3}{2} (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (7.23)$$

Der isotrope Anteil \mathbf{A}^0 von \mathbf{A} ist – bis auf den Vorfaktor $\frac{3}{2}$ – der deviatorische Projektionstensor vierter Stufe. Er projiziert den symmetrischen Spannungstensor $\boldsymbol{\pi}$ auf $\frac{3}{2}\boldsymbol{\pi}'$. Es gilt deshalb

$$\boldsymbol{\pi} : (\mathbf{A}^0 : \boldsymbol{\pi}) = \frac{3}{2}\boldsymbol{\pi}' : \boldsymbol{\pi}'. \quad (7.24)$$

Zur Bestimmung der verbleibenden Parameter wird hier auf die Mikromechanik zurückgegriffen. Von Gurson (1977) wurde eine Fließbedingung für isotrope Schädigung entwickelt. Diese auf mikromechanischer Basis entwickelte Fließbedingung ist mehrfach erfolgreich zur Modellierung von unter anderem Lokalisierung, Scherbandbildung und Makrorißbildung in metallischen Werkstoffen eingesetzt worden (Needleman & Tvergaard 1984; Tvergaard 1982). Das Fließpotential von Gurson (1977) wird hier deshalb als exakt angenommen, und zur Bestimmung der verbleibenden Materialkonstanten $a_3 - a_9$ wird eine Übereinstimmung der hier hergeleiteten Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\pi} - g(\mathbf{d}) \quad (7.25)$$

mit der Fließbedingung von Gurson (1977) bei isotroper Schädigung verlangt. Ziel ist also die Festlegung von \mathbf{A}^d und die Bestimmung des Einflusses der Schädigung auf die Anfangsfließspannung bzw. die Verfestigungsfunktion.

In der hier verwendeten Notation lautet die von Tvergaard (1982) modifizierte Fließbedingung von Gurson (1977) wie folgt

$$F_G = \frac{3}{2}\pi'_{ij}\pi'_{ij} + 2q_1 f g \cosh \left[\frac{q_2 \pi_{kk}}{2\sqrt{g}} \right] - g [1 + (q_3 f)^2], \quad (7.26)$$

wobei f den Porenvolumenanteil bezeichnet und q_1 , q_2 und q_3 Materialkonstanten sind. Außerdem ist hier für die Beschreibung großer Formänderungen eine weitere Modifikation der Fließbedingung von Gurson (1977) vorgenommen worden, indem die Cauchysche Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ durch die Kirchhoffsche Spannung $\boldsymbol{\pi}$ ersetzt wurde. Mit dem folgenden Satz von Konstanten

$$q_1 = 1,5; \quad q_2 = 1,0; \quad q_3 = 1,5 \quad (7.27)$$

wurden für metallische Werkstoffe gute Ergebnisse erzielt, und dieser wird deshalb auch hier übernommen. Die von Tvergaard (1982) durchgeführte

Modifikation erfolgte rein empirisch. Das Fließpotential (7.26) ist demzufolge strenggenommen nicht mehr mikromechanisch begründet. Da aber damit bessere Ergebnisse erzielt wurden, die Modifikation die Form von (1.21) nicht verändert und für $q_1 = 1$, $q_2 = 1$ und $q_3 = 1$ (7.26) wieder auf (1.21) zurückgeht, wird im folgenden (7.26) verwendet.

Anmerkungen 7.2. Die Fließfunktion (7.3) bzw. (7.5) ist eine quadratische Funktion in $\boldsymbol{\pi}$ und die Fließbedingung von Gurson (1977) ist bzw. enthält eine Hyperbelkosinusfunktion. Es handelt sich also um zwei grundlegend unterschiedliche Funktionen. Ein allgemeiner Vergleich der beiden Funktionen ist demzufolge grundsätzlich nicht möglich. Beachtet man aber die Tatsache, daß die Spannung π_{11} , π_{22} oder π_{33} die Fließspannung nicht überschreiten kann, dann gilt

$$\left| \frac{\pi_{kk}}{2\sqrt{g}} \right| \leq 1, 5. \quad (7.28)$$

In diesem Wertebereich kann die Hyperbelkosinusfunktion durch ihre Potenzreihenentwicklung angenähert werden, siehe Voyiadjis & Kattan (1992, Gleichung (98)).

$$\cosh \left[\frac{\pi_{kk}}{2\sqrt{g}} \right] \approx 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi_{kk}}{2\sqrt{g}} \right\}^2 = 1 + \frac{x^2}{2}. \quad (7.29)$$

Ersetzt man demzufolge in der Fließbedingung von Gurson (1977) die Hyperbelkosinusfunktion durch ihre Potenzreihenentwicklung, wird offensichtlich, daß sowohl (7.5) als auch (1.21) quadratische Funktionen der Spannung sind. Ein direkter Vergleich beider Funktionen ist deshalb gerechtfertigt.

Der hier verwendete Ansatz zur Bestimmung von Materialparametern im Fließpotential beschränkt sich offensichtlich nicht auf einen Schädigungstensor zweiter Stufe. Für jeden anderen Schädigungstensor kann nach Herleitung von \mathbf{A} die Bestimmung der Materialparameter genauso durch einen Vergleich mit dem Fließpotential von Gurson (1977) erfolgen.

In Voyiadjis & Kattan (1992) wird versucht, aus einer phänomenologisch hergeleiteten Fließfunktion die Materialparameter der modifizierten Fließfunktion von Gurson (1977) zu bestimmen. Dies ist genau das Inverse der hier vorgeschlagenen Vorgehensweise, und erscheint nicht sinnvoll zu sein, da eine mikromechanische Theorie eine phänomenologische Theorie stützen sollte und nicht umgekehrt. \square

Für isotrope Schädigung ergibt sich keine Änderung der Materialsymmetrien und folglich muß nach Kapitel 6 der Schädigungstensor ein Kugeltensor sein, siehe Gleichung (6.7). Als eine weitere Annahme wird für isotrope Schädigung d dem Porenvolumenanteil f gleichgesetzt:

$$f = d. \quad (7.30)$$

Man erhält, wenn in (7.26) das Hyperbelkosinusglied durch seine Potenzreihenentwicklung ersetzt wird, die Näherung

$$F_G = F_0 + 2q_1 f g \left[1 + \frac{\pi_{kk}^2}{8g} \right] - gq_3^2 f^2 \quad (7.31)$$

mit F_0 wie in Gleichung (7.21). Mit Gleichung (6.7) ergibt sich die Vereinfachung

$$F = \frac{3}{2} \pi'_{ij} \pi'_{ij} + d \left[(2a_3 + 2da_7) (\text{tr} [\boldsymbol{\pi}])^2 + 4a_5 \text{tr} [\boldsymbol{\pi}^2] \right] + d^2 [a_6 + 4a_9] \text{tr} [\boldsymbol{\pi}^2] - g(d_1, d_2, d_3) \quad (7.32)$$

für die Fließfunktion (7.25). Hier wird für g die folgende isotrope Funktion verwendet:

$$g(d_1, d_2, d_3) = \pi_0^2 \times m^2(d_1, d_2, d_3), \quad (7.33)$$

$$m^2(d_1, d_2, d_3) = (b_0 + b_1 I_3), \quad (7.34)$$

wobei b_0 und b_1 Materialparameter bezeichnen.

Nun wird ein isotrop vorgeschädigtes Material betrachtet, das einer ein-dimensionalen Belastung unterliegt. Aus der Fließbedingung (7.26) folgt die Beziehung

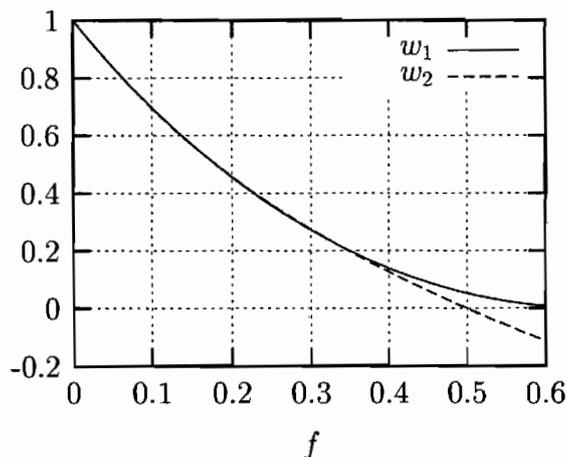
$$F_G = \pi^2 + 2q_1 g \left[1 + \frac{\pi^2}{8g} \right] - g(1 + q_1^2 f^2) = 0 \quad (7.35)$$

bzw.

$$\pi^2 = w_1(f) g \quad (7.36)$$

mit der Wichtungsfunktion

$$w_1(f) = [1 - 2q_1 f + q_1^2 f^2] [1 + 1/4q_1 f]^{-1}. \quad (7.37)$$

Abbildung 7.2: Wichtungsfunktionen w_1 und w_2

Für die weiteren Betrachtungen wird a_6 gleich Null gesetzt. Für den gleichen Fall – isotrop vorgeschädigtes Material unter eindimensionaler Belastung – folgt aus (7.25) die Beziehung

$$F = \pi^2 + (2a_3 + 4a_5) f \pi^2 + (2a_7 + 4a_9) f^2 \pi^2 - g(b_0 + b_1 d^3) = 0, \quad (7.38)$$

die auch nach dem Quadrat der Spannung umgeformt werden kann:

$$\pi^2 = w_2(f) g \quad (7.39)$$

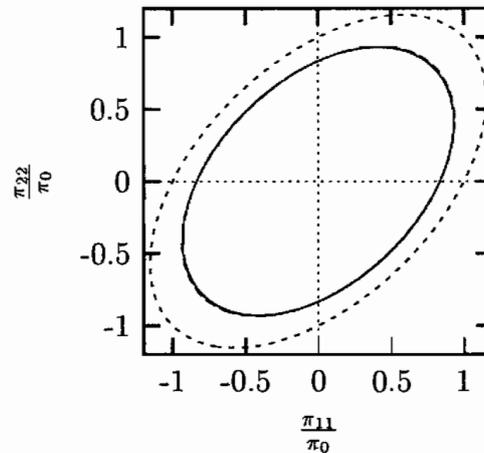
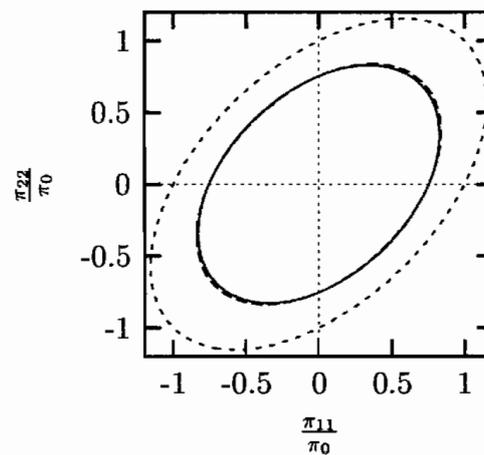
mit der Wichtungsfunktion

$$w_2(f) = [b_0 + b_1 f^3][1 + (2a_3 + 4a_5) f + (2a_7 + 4a_9) f^2]^{-1}. \quad (7.40)$$

Damit beide Fließfunktionen die gleiche Fließspannung aufweisen, müssen die Konstanten in der Funktion w_2 so bestimmt werden, daß w_1 mit w_2 übereinstimmt. Für den folgenden Satz von Materialkonstanten

$$\begin{aligned} a_3 &= -0,50 & a_5 &= 1,08 \\ a_7 &= -2,25 & a_9 &= 3,51 \\ b_0 &= 1,00 & b_1 &= -8,00 \end{aligned} \quad (7.41)$$

stimmt die Funktion w_2 mit der Funktion w_1 gut überein, siehe Abbildung 7.2. Die Materialkonstanten b_0 und b_1 sind so gewählt, daß die Funktion $w_2(d)$ nach dem gewählten Versagenskriterium für isotrope Schädigung und $d = 0,5$ verschwindet. In der Abbildung 7.3 ist für den Sonderfall des ebenen Spannungszustands die Fließbedingung F_G von Gurson (1977)

Abbildung 7.3: F_G und F bei einem Porenvolumenanteil $f = 0,10$ Abbildung 7.4: F_G und F bei einem Porenvolumenanteil $f = 0,15$

– durchgezogene Linie – und die hier hergeleitete Fließbedingung F – gebrochene Linie – für einen Porenvolumenanteil von $f = 0,10$, in Abbildung 7.4 für $f = 0,15$ dargestellt. Die Abbildungen zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung. In den Abbildungen wird zusätzlich die Fließfläche des ungeschädigten Materials zum Vergleich dargestellt.

7.2.2 Graphische Darstellung der Fließfunktion

Die Fließbedingung (7.5) wird zur Veranschaulichung dargestellt. Für den Sonderfall des ebenen Spannungszustandes und isotroper Schädigung

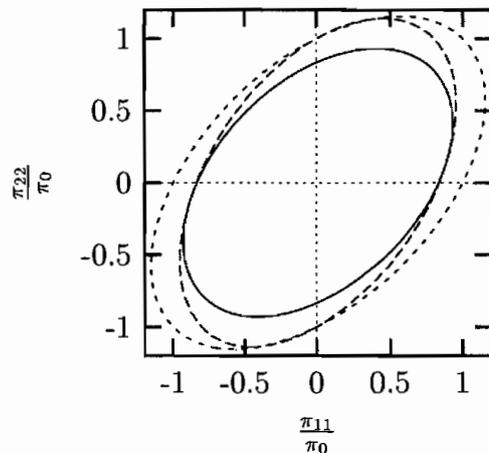


Abbildung 7.5: F für $d_{11} = 0,10$. Alle anderen Komponenten sind Null

nimmt die Fließbedingung die Form

$$F = [1 + (2a_3 + 4a_5)d + (2a_7 + 4a_9)d^2]\pi_1^2 - [1 - 4a_3d - 4a_7d^2]\pi_1\pi_2 + [1 + (2a_3 + 4a_5)d + (2a_7 + 4a_9)d^2]\pi_2^2 - g \cdot (b_0 + b_1 d^3) \quad (7.42)$$

an. Aus dieser Gleichung und aus den Abbildungen 7.3 und 7.4 ist klar erkennbar, daß sich bei isotroper Schädigung die Form der Fließfläche nicht ändert. Fließen tritt zwar in allen Richtungen früher auf, was eine Schwächung des Materials bedeutet, die Hauptachsen der Ellipse werden aber durch die Schädigung nicht verändert und die Symmetrie der Fließkurve bezüglich der Gerade $\pi_1 = \pi_2$ bleibt somit erhalten.

Für den Fall, daß nur die Komponente $d_{11} = d$ des Schädigungstensors von Null verschieden ist, nimmt die Fließbedingung die Form

$$F = [1 + (2a_3 + 4a_5)d + (2a_7 + 4a_9)d^2]\pi_1^2 - [1 - 4a_3d - 4a_7d^2]\pi_1\pi_2 + \pi_2^2 - g \quad (7.43)$$

an. Man sieht hier, daß sich die Hauptachsen der Fließellipse aufgrund der anisotropen Schädigung ändern und daß durch die Materialschwächung Fließen in π_1 -Richtung früher auftritt als in π_2 -Richtung. Die Fließkurve hat auch ihre Symmetrie bezüglich der Geraden $\pi_1 = \pi_2$ verloren, siehe Abbildungen 7.5 und 7.6.

Anmerkung 7.3. Hier wird kurz auf den Fall eingegangen, daß die Schädigung isotrop ist und durch eine skalarwertige Variable d beschrieben wird.

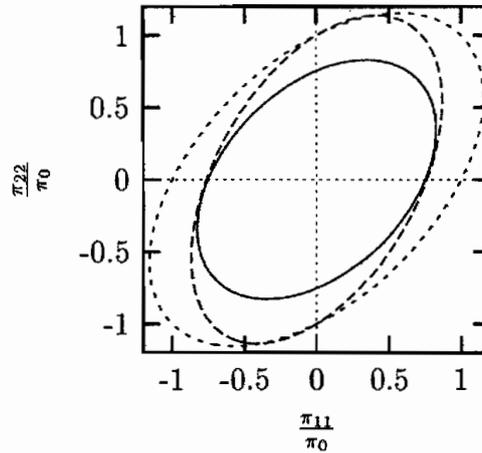


Abbildung 7.6: F für $d_{11} = 0,15$. Alle anderen Komponenten sind Null

In diesem Fall besitzt der Anisotropietensor \mathbf{A} die Darstellung

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2a_2 \mathbf{I}. \quad (7.44)$$

Hier sind a_1 und a_2 Materialfunktionen, die von d abhängen:

$$a_1 = a_1(d), \quad a_2 = a_2(d). \quad (7.45)$$

Da das Material anfänglich isotrop und von von Misesschem-Typ ist, muß für $d = 0$, wie vorhin,

$$a_1 = -0,50, \quad a_2 = 0,75 \quad (7.46)$$

gelten. Für die Funktion $a_1(d)$ oder $a_2(d)$ kann man z. B. einen Polynomansatz in d verwenden. Aus der Forderung, daß die Fließfunktion (7.5) mit der Fließkurve (7.26) übereinstimmen soll, lassen sich die unbekannt Materialparameter bestimmen.

Im folgenden wird gezeigt, daß die hier vorgestellte Vorgehensweise mit dem Effektivspannungskonzept bei kleinen Werten von d und bei plastischer Inkompressibilität übereinstimmt. Dabei wird in der isotropen Fließbedingung (7.21) die Kirchhoffsche Spannung $\boldsymbol{\pi}$ durch die Effektivspannung $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ ersetzt, ebenso die Variable für die isotrope Verfestigung κ durch eine effektive isotrope Verfestigungsvariable $\hat{\kappa}$ und die Variable für die kinematische Verfestigung $\boldsymbol{\alpha}$ bzw. \mathbf{X} durch eine effektive kinematische Verfestigungsvariable $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ bzw. $\hat{\mathbf{X}}$.

Nach Lemaitre (1985a, 1985b) – siehe auch das isotrope Schädigungsmodell im Kapitel 5 – und Chaboche (1998) kann man z. B. von folgendem

Ansatz für die Effektivgrößen ausgehen:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi}(1-d)^{-1}, \quad \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(1-d)^{-1}, \quad \hat{\kappa} = \kappa, \quad (7.47)$$

d. h.

$$F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{X}, \kappa) \longmapsto F(\hat{\boldsymbol{\pi}}, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\kappa}). \quad (7.48)$$

Dies entspricht bei Verwendung von (7.5) dem folgenden Anisotropietensor:

$$\mathbf{A} = (1-d)^{-2} \mathbf{A}^0, \quad (7.49)$$

wobei hier \mathbf{A}^0 den durch Gleichung (7.23) gegebenen isotropen Anteil des Anisotropietensors bezeichnet. Für kleine Werte von d , d. h. $d \ll 1$ kann der Vorfaktor in der letzten Beziehung durch seine Taylorreihenentwicklung ersetzt werden und man erhält

$$\mathbf{A} \approx (1 + 2d + 3d^2) \mathbf{A}^0. \quad (7.50)$$

Dies entspricht Polynomansätzen für $a_1(d)$ und $a_2(d)$ in der Form

$$a_1 = -\frac{1}{2}(1 + 2d + 3d^2), \quad a_2 = \frac{3}{4}(1 + 2d + 3d^2). \quad (7.51)$$

Hier ist anzumerken, daß diese Ansätze einer Art multiplikativen Zerlegung von a_1 und a_2 entsprechen. Die Zerlegung läßt sich aus Überlegungen über Konfigurationen wie z. B. in Murakami (1988) motivieren und entspricht genau der Denkweise beim Effektivspannungskonzept. Die Vorfaktoren $-\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ sorgen dafür, daß auch bei Schädigung die Annahme der Inkompressibilität der inelastischen Deformationen ihre Gültigkeit behält.

Verwendet man einen Tensor zweiter Stufe als Schädigungsvariable, dann gilt $d_{ij} = d \delta_{ij}$ für isotrope Schädigung, siehe Gleichung (6.7). Der Anisotropietensor \mathbf{A} (7.13) nimmt dadurch die folgende einfache Form an:

$$\mathbf{A} = \tilde{a}_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \tilde{a}_2 \mathbb{I}, \quad (7.52)$$

wobei

$$\tilde{a}_1 = a_1 + 2 a_3 d + 2 a_7 d^2, \quad \tilde{a}_2 = a_2 + 2 a_5 d + 2 a_9 d^2 \quad (7.53)$$

gilt. Demzufolge ist der Ansatz (7.44) konsistent mit den Ausführungen in Abschnitt 7.2.1. \square

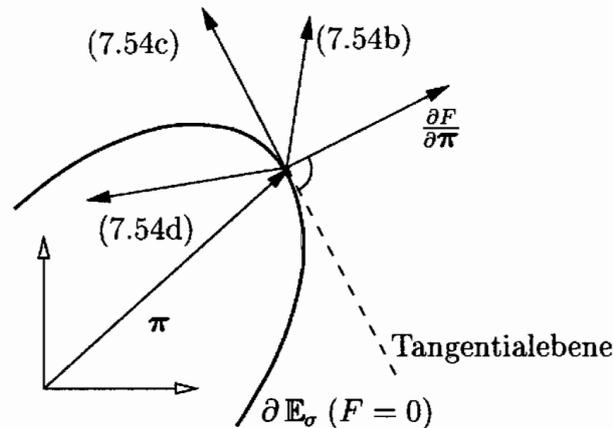


Abbildung 7.7: schematische Darstellung der Be- und Entlastungsbedingung

7.3 Be- und Entlastungsbedingung

Unter der Einwirkung einer mechanischen Belastung wird sich das Material, abhängig vom Belastungsgrad, entweder elastisch oder damageplastisch oder inelastisch verformen. Bei einer Beschränkung auf isotherme Prozesse und unter der Annahme, daß trotz Schädigung und der damit verbundenen Schwächung des Materials das allgemeine Materialverhalten verfestigend ist, gilt im Spannungsraum

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(\boldsymbol{\pi}) < 0 & \text{(elastische Formänderung)} \\ F(\boldsymbol{\pi}) = 0 \text{ und } (\partial F / \partial \boldsymbol{\pi}) : d\boldsymbol{\pi} > 0 & \text{(Belastung)} \\ F(\boldsymbol{\pi}) = 0 \text{ und } (\partial F / \partial \boldsymbol{\pi}) : d\boldsymbol{\pi} = 0 & \text{(neutrale Belastung)} \\ F(\boldsymbol{\pi}) = 0 \text{ und } (\partial F / \partial \boldsymbol{\pi}) : d\boldsymbol{\pi} < 0 & \text{(Entlastung).} \end{array} \right. \quad (7.54)$$

Veranschaulicht werden die unterschiedlichen Fälle in Abbildung 7.7. Tritt mit zunehmender Schädigung eine Entfestigung des Materials auf, ist eine rationale Formulierung dieser Bedingungen nur noch im Dehnungsraum möglich (Naghdi & Trapp 1975; Casey & Naghdi 1983). Die Kuhn-Tucker Bedingungen – siehe Gleichung (7.67) – entsprechen einer Formulierung der Be- und Entlastungsbedingung im Dehnungsraum und werden deshalb anstatt (7.54) in dieser Arbeit verwendet.

Wegener hat 1991 folgendes geschrieben: *Eine Diskussion plastischer Volumendehnungen, die unabhängig von den plastischen Gestaltverformungen ist, erscheint nach aller experimenteller Erkenntnis unmöglich* (Wegener 1991, Seite 103). Bis heute hat sich daran nichts geändert. Als eine weitere Annahme des hier vorgestellten Modells soll deshalb davon

ausgegangen werden, daß plastische Formänderung und Schädigung gemeinsam auftreten. Die oben angegebene Be- und Entlastungsbedingung gilt hier sowohl für die plastische Formänderung als auch für die Schädigung. Mit der hier vorgenommenen Kopplung von Schädigung und plastischer Formänderung werden die durch rein elastische Formänderungen hervorgerufenen Änderungen der Materialkonstanten und -symmetrien vernachlässigt. Diese Annahme stützt sich auf die für metallische Werkstoffe von z. B. Cordebois & Sidoroff (1979) und Feldmüller (1991) erzielten experimentellen Ergebnisse. Für sogenannte *quasi-brittle materials* wie z. B. Beton, Keramik oder Geomaterial, die im elastischen Bereich Materialschwächung aufgrund von Schädigung aufzeigen, ist eine solche Annahme natürlich nicht zulässig.

Die hier angenommene gekoppelte Betrachtungsweise läßt sich wie folgt physikalisch begründen. Der wichtigste Mechanismus für die plastische Deformation von Metallen ist die irreversible Bewegung von Versetzungen. In Kristallen existieren immer Hindernisse gegen die Bewegung von Versetzungen. Beispiel eines solchen Hindernisses ist bei Polykristallen die Korngrenze. Beim Erreichen eines Hindernisses können Versetzungen, die z. B. von einer Frank-Read Quelle ausgehen, ihre Bewegung nicht unbehindert fortsetzen und werden dann aufgestaut. In der Nähe eines Hindernisses ist die Versetzungsdichte größer als in größerer Entfernung. Die vom Hindernis aufgehaltenen Versetzungen üben auf das Hindernis eine Kraft aus, und dies übt ebenfalls eine entsprechende Gegenkraft auf die Versetzungen aus. Die Kraft steigt mit zunehmender plastischer Formänderung und Aufstauung von Versetzungen an den Hindernissen. Zur Bewegung der Versetzungen werden deshalb immer größere Kräfte benötigt, d. h. das Material verfestigt sich. Bei Überschreiten einer gewissen (materialspezifischen) Grenze kann die Korngrenze die Versetzungen nicht mehr aufstauen und es kommt zum Korngrenzenbruch. Die durch den Korngrenzenbruch erzeugten Mikrodefekte wirken sich nicht nur auf das plastische Materialverhalten aus, sondern auch auf das elastische. Das Material ist demzufolge als geschädigt anzusehen.

Während plastischer Formänderung gibt es demzufolge an einigen Korngrenzen eine Aufstauung der Versetzungen und eine Verfestigung des Materials. An anderen kommt es aber zum Korngrenzenbruch mit entsprechenden Effekten auf das elastische und plastische Deformationsverhalten. Zur Berücksichtigung dieser Phänomene sind deshalb die Zustands-

variablen α und κ für die kinematische und isotrope Verfestigung und eine entsprechende interne Zustandsvariable \mathbf{d} für die Schädigung einzuführen.

7.4 Fließregel

Das plastische Dissipationspotential wird hier mit Q_d bezeichnet; es wird die Gültigkeit der Normalenregel angenommen. Nach Kapitel 6 ist der Nachgiebigkeitstensor \mathbf{D} eine Funktion des Schädigungstensors. Die Schädigungsvariable selbst hängt aber von den Verzerrungen \mathbf{h} ab. Daraus folgt, daß der Elastizitätstensor \mathbf{C} (die Inverse von \mathbf{D}) von den plastischen Formänderungen abhängt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{h}^{\text{ei}}). \quad (7.55)$$

Hier bezeichnet \mathbf{h}^{ei} den elastisch-inelastischen Anteil von \mathbf{h} . Es liegt demzufolge eine Kopplung zwischen den elastischen Eigenschaften des Materials und den plastischen Formänderungen vor (Ilyushin 1960; Khan & Huang 1995). Nach dem Druckerschen Postulat gilt in diesem Fall für den Tensor der elastisch-inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten \mathbf{D}^{ei} die Beziehung

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda \frac{\partial Q_d}{\partial \boldsymbol{\pi}} - \overset{\circ}{\mathbf{D}}^{\text{Log}} : \boldsymbol{\pi}, \quad (7.56)$$

wobei $\lambda > 0$ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, der eine skalarwertige Funktion des Momentanzustandes sowie der Belastungsänderung ist. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die elastisch-plastische Kopplung vernachlässigbar klein ist. Weiterhin wird eine assoziierte Fließregel verwendet. Es wird deshalb

$$Q_d = F \quad (7.57)$$

und damit

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} \quad (7.58)$$

angesetzt. Zur Verwendung als Fließpotential wird die Fließbedingung (7.5) in die folgende einfacher handhabbare Form umgeschrieben:

$$F = \pi_{\text{eq}} - \sqrt{g}, \quad \pi_{\text{eq}} = \|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\pi}} : \mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}. \quad (7.59)$$

Für $g(\kappa, \mathbf{d})$ wird der folgende Ansatz verwendet:

$$g(\kappa, \mathbf{d}) = [\pi_0 \cdot m + K'(\kappa)]^2, \quad (7.60)$$

wobei die Funktion m durch Gleichung (7.34) gegeben ist und $K'(\kappa)$ die Verfestigungsfunktion bezeichnet. Damit nimmt die Fließfunktion die Form

$$F = \pi_{eq} - \pi_0 \cdot m - K'(\kappa) \quad (7.61)$$

an. Mit (7.61) folgt aus der Fließregel für die elastisch-inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D}^{ei} = \lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}. \quad (7.62)$$

Aus der additiven Aufspaltung des Anisotropietensors \mathbf{A} ergibt sich mit der Fließregel (7.62) eine additive Aufspaltung von \mathbf{D}^{ei} in einen isotropen oder rein elastisch-plastischen Anteil \mathbf{D}^{ep} und schädigungsinduzierten Anteil \mathbf{D}^{ed} :

$$\mathbf{D}^{ei} = \mathbf{D}^{ep} + \mathbf{D}^{ed}, \quad (7.63)$$

wobei

$$\mathbf{D}^{ep} = \lambda \frac{\mathbf{A}^0 : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}, \quad (7.64)$$

$$\mathbf{D}^{ed} = \lambda \frac{\mathbf{A}^d : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}} \quad (7.65)$$

gilt. Der Anteil \mathbf{D}^{ep} stellt den Gestaltänderungsanteil oder isotropen Anteil von \mathbf{D}^{ei} dar und \mathbf{D}^{ed} den Volumenänderungsanteil oder schädigungsinduzierten Anteil von \mathbf{D}^{ei} . Wegen

$$(\mathbf{1} : \mathbf{A}^0)_{kl} = 0 \quad (7.66)$$

ist die Spur des isotropen Anteils \mathbf{D}^{ep} gleich Null, d. h. dieser Anteil ist volumenerhaltend oder isochor. Im allgemeinen verschwindet die Spur der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit aber nur, wenn der Schädigungstensor Null ist und keine Schädigungsentwicklung vorliegt. Demnach ist plastisches Materialverhalten immer mit einer Volumenänderung verbunden, und die Inkompressibilität der klassischen Plastizitätstheorie liegt nur dann vor, wenn weder Schädigung noch Schädigungsentwicklung vorhanden sind.

Anmerkung 7.4. Mit dem Proportionalitätsfaktor λ kann die Be- und Entlastungsbedingung in Kuhn-Tucker-Form angegeben werden (Simo & Hughes 1998):

$$\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \lambda F = 0. \quad (7.67)$$

Diese Bedingung gilt für jeden möglichen Deformationsprozeß. Für $F < 0$ folgt aus (7.67)₃ $\lambda = 0$, d. h. elastisches Materialverhalten. Für plastisches Materialverhalten gilt $\lambda > 0$, und aus (7.67)₃ erhält man $F = 0$. \square

7.5 Evolutionsgleichungen

7.5.1 Verfestigungsvariablen

Nach den thermodynamischen Überlegungen aus Kapitel 4 ist im Rahmen der internen Variablentheorie für die Entwicklungsgleichungen für α und κ von den folgenden allgemeinen Beziehungen auszugehen:

$$\dot{\kappa} = \dot{\kappa}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}), \quad (7.68)$$

$$\overset{\circ}{\alpha}^{\text{Log}} = \overset{\circ}{\alpha}^{\text{Log}}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}). \quad (7.69)$$

Für ratenunabhängiges plastisches Materialverhalten sind $\overset{\circ}{\alpha}^{\text{Log}}$ und $\dot{\kappa}$ lineare, homogene Funktionen von $\overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{Log}}$:

$$\dot{\kappa} = \bar{\kappa}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{Log}}, \quad (7.70)$$

$$\overset{\circ}{\alpha}^{\text{Log}} = \bar{\alpha}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{Log}}, \quad (7.71)$$

wobei hier $\bar{\kappa}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a})$ und $\bar{\alpha}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a})$ tensorwertige Funktionen von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{a} bezeichnen. Da hier die Rekristallisation und die Erholung des Materials außer acht gelassen werden, wird für die Evolution der isotropen Verfestigungsvariable κ die Beziehung

$$\dot{\kappa} = \|\mathbf{D}^{\text{ei}}\|_{\mathbf{A}^{-1}} = \lambda \quad (7.72)$$

angesetzt. Gleichung (7.72) stellt die durch \mathbf{A}^{-1} induzierte Norm von \mathbf{D}^{ei} dar. Im schädigungsfreien Fall entspricht diese Norm der Rate der plastischen Vergleichsdehnung. Die Beziehung (7.72) ist also eine Erweiterung

der sogenannten Dehnungsverfestigung. Für die kinematische Verfestigung α wird die konstitutive Beziehung

$$\overset{\circ}{\alpha}^{\text{Log}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{D}^{\text{ei}} \quad (7.73)$$

verwendet. Der back stress tensor \mathbf{X} ist die arbeitskonjugierte Größe zu α . Nach dem Prager-Ziegler Modell wird hier die folgende Verknüpfung zwischen \mathbf{X} und α angenommen:

$$\mathbf{X} = -H_{\text{kin}} \alpha \quad (7.74)$$

bzw.

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}^{\text{Log}} = H_{\text{kin}} \mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda H_{\text{kin}} \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}, \quad (7.75)$$

wobei H_{kin} den kinematischen Verfestigungsmodul bezeichnet.

7.5.2 Schädigungstensor

Nach experimentellen Ergebnissen von z. B. Cordebois & Sidoroff (1979) und Feldmüller (1991) wird bei metallischen Werkstoffen Schädigung erst durch (große) plastische Formänderungen hervorgerufen. Für die Evolutionsgleichung der Schädigungsvariable wird hier deshalb von der folgenden tensoriellen Funktion ausgegangen:

$$\overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}, \dots), \quad (7.76)$$

wobei λ den Proportionalitätsfaktor bezeichnet und \mathbf{Y} die zu \mathbf{d} arbeitskonjugierte Größe, siehe (7.97).

Feldmüller (1991) verwendet zur Modellierung von isotroper Schädigung die Beziehung

$$\dot{d} = \eta \|\mathbf{D}^{\text{ei}}\|_{\mathbb{I}} \quad (7.77)$$

als Ansatz für die Entwicklungsgleichung einer skalarwertigen Schädigungsvariablen d . η ist dabei eine von der Schädigung und von der Temperatur abhängige Materialfunktion. In Tvergaard (1982) und Needleman & Tvergaard (1984) wird die Evolutionsgleichung \dot{f} für die skalarwertige Schädigungsvariable in zwei Anteile aufgeteilt: einen Entstehungsanteil und einen Wachstumsanteil. Der Wachstumsanteil \dot{f}_{growth} von \dot{f} ergibt sich

aus der Inkompressibilität des Matrixmaterials und ist direkt proportional zur Spur von \mathbf{D}^{ei} :

$$\dot{f}_{\text{growth}} = (1 - f) \text{tr} [\mathbf{D}^{\text{ei}}]. \quad (7.78)$$

Die Verbindung von Schädigung mit plastischer Formänderung in diesen Ansätzen ist offensichtlich. Der Ansatz (7.76) kann deshalb als eine Verallgemeinerung dieser isotropen Modelle verstanden werden.

Der Schädigungstensor muß positiv semi-definit sein, da eine Heilung des Materials ausgeschlossen wird. Die Evolutionsfunktion für die Schädigungsvariable muß demzufolge auch positiv semi-definit sein. Hier wird angenommen, daß die Entwicklung der Schädigungsvariablen tensoriell von \mathbf{Y}^+ , $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} abhängt. Der Einfachheit halber wird der Ansatz auf die folgende lineare Form beschränkt:

$$\overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+], \quad (7.79)$$

wobei β_1 und β_2 Ansatzfreiwerte bezeichnen. \mathbf{Y}^+ ist die positive Projektion von \mathbf{Y} , die wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{Y}^+ = \mathbb{P}^+ : \mathbf{Y} = \sum_{\sigma=1}^n \langle Y_{\sigma} \rangle \mathbf{Y}_{\sigma}, \quad (7.80)$$

wobei hier \mathbb{P}^+ einen Projektionstensor bezeichnet. Y_{σ} kennzeichnen die Eigenwerte von \mathbf{Y} und \mathbf{Y}_{σ} die entsprechenden Eigenprojektionen. n ist die Anzahl ungleicher Eigenwerte und $\langle \bullet \rangle$ die McAuley Klammer. Damit der Schädigungstensor positiv semi-definit bleibt, muß

$$\beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0 \quad (7.81)$$

gelten. Die konkreten Formen dieser Materialfunktionen müssen aus Experimenten bestimmt werden. Man beachte, daß man mit

$$\beta_2 = 0, \quad \lambda\beta_1 = \eta \|\mathbf{D}^{\text{i}}\|_{\mathbf{I}} \quad (7.82)$$

das Modell von Feldmüller (1991) erhält und mit

$$\beta_2 = 0, \quad \lambda\beta_1 = \dot{f}_{\text{growth}} \quad (7.83)$$

das Modell von Gurson (1977). Mit zunehmender Deformation wird die Schädigung anisotrop, und man kann Evolutionsgleichungen in der Form (7.82) oder (7.83) nur für die Anfangsphase der Deformation verwenden.

7.6 Konsistenzbedingung

Während plastischer oder inelastischer Formänderung muß ein Spannungspunkt Π immer auf der Fließfläche bleiben. Daraus folgt, daß die materielle Zeitableitung der Fließbedingung für eine Belastung gleich Null ist:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \Pi} : \dot{\Pi} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{X}}} : \dot{\tilde{\mathbf{X}}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{d}}} : \dot{\tilde{\mathbf{d}}} = 0 \quad (7.84)$$

bzw.

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{X}}} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{X}}}^R + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\mathbf{d}}} : \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{d}}}^R = 0 \quad (7.85)$$

in Eulerscher Form, wobei (1.33)₂ und (2.129) für die Green-Naghdi Rate verwendet wurden. Die Konsistenzbedingung (7.85) wird zur Bestimmung des noch unbekanntenen Multiplikators λ verwendet. Setzt man die Evolutionsgleichungen für κ , $\boldsymbol{\alpha}$ und \mathbf{d} in (7.85) ein, folgt

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} : (\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} \mathbf{u} - \mathbf{u} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}) - H \lambda = 0, \quad (7.86)$$

$$\mathbf{u} = \{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}\}, \quad (7.87)$$

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{d}} : [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+] + K''(\kappa) + H_{\text{kin}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}}. \quad (7.88)$$

Hier ist (2.126) berücksichtigt worden. Aus (7.86) folgt schließlich

$$\lambda = \frac{h}{H} \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^R + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} : (\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} \mathbf{u} - \mathbf{u} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}) \right], \quad (7.89)$$

wobei h die Funktion

$$h = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda F = 0 \\ 0 & \text{für } F < 0 \end{cases} \quad (7.90)$$

bezeichnet.

Die gesamte Verzerrungsgeschwindigkeit ist die Summe aus dem elastischen Anteil \mathbf{D}^e (6.66) und elastisch-inelastischen Anteil \mathbf{D}^{ei} (7.62):

$$\mathbf{D} = \overset{\circ}{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\text{Log}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} \quad (7.91)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbb{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{R}} + [\partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \mathbf{d})] : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{R}} \\ + (\mathbb{D} : \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} (\mathbb{D} : \boldsymbol{\pi}) + \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.130) ergeben sich aus den Evolutionsgleichungen für κ , \mathbf{X} , \mathbf{d} und \mathbf{h} äquivalente Integralformen. Die Integralform für \mathbf{D} z. B. lautet

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^{\text{ei}}, \quad (7.93)$$

mit

$$\mathbf{h}^e = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star [\mathbf{D}^e] ds, \quad (7.94)$$

$$\mathbf{h}^{\text{ei}} = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \left[\lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}} \right] ds. \quad (7.95)$$

Der räumliche Henckysche Dehnungstensor \mathbf{h} setzt sich demnach aus einem elastischen Anteil \mathbf{h}^e und einem elastisch-inelastischen Anteil \mathbf{h}^{ei} zusammen. Man beachte, daß das Integral der Verzerrungsgeschwindigkeit über die Zeit nur in speziellen Fällen wie z. B. Deformationen, bei denen die Hauptverzerrungsachsen sich mit der Zeit nicht ändern, ein bekanntes Verzerrungsmaß ergibt. Es ist eine Eigenschaft der Log-Rate bzw. Log-Rotation, daß die mitrotierende Zeitintegration der Verzerrungsgeschwindigkeit genau den räumlichen Hencky Dehnungstensor ergibt.

7.7 Thermodynamische Konsistenz

Es soll hier gezeigt werden, daß mit dem elastischen Stoffgesetz aus Kapitel 6 und dem plastischen Modell aus diesem Kapitel ein thermodynamisch konsistentes Elastoplastizitätsmodell unter Berücksichtigung der Schädigung zusammengestellt worden ist.

Im allgemeinen hängt der inelastische Anteil Φ^i des Gibbsschen Potentials Φ von der Schädigungsvariable und den Verfestigungsvariablen ab. Nach Lehmann (1989) wird der Einfachheit halber davon ausgegangen,

daß Φ^i nicht explizit von der Schädigungsvariablen abhängt. Für Φ^i wird deshalb das folgende Potential verwendet:

$$-\rho_0 \Phi^i = H_{\text{kin}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + K(\kappa) \quad (7.96)$$

Aus (7.96) und (6.34) folgt für \mathbf{Y} , die arbeitskonjugierte Größe zur Schädigungsvariablen, die folgende Beziehung:

$$2 \mathbf{Y} = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{d}} = [2\eta_3(\text{tr} [\boldsymbol{\pi}])\boldsymbol{\pi} + 4\eta_4\boldsymbol{\pi}^2]. \quad (7.97)$$

Für einen Prozeß, in dem Schädigung und plastisches Verhalten gemeinsam auftreten, nimmt die Dissipation zu. Der Schädigungsanteil in der dissipativen Ungleichung muß deshalb stets größer Null sein. Mit dieser Überlegung ergibt sich die folgende Verschärfung der dissipativen Ungleichung (4.70):

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}^{\text{ei}} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{Log}} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \cdot \dot{\kappa} \geq 0, \quad (7.98)$$

$$\mathbf{Y} : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} \geq 0. \quad (7.99)$$

Hier wird der Einfachheit halber isotrope Schädigungsevolution angenommen. Da der Schädigungstensor ein positiv semi-definiter Tensor ist, kann von einer Evolutionsgleichung in der Form

$$\overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \dot{d} \mathbf{1}, \quad \dot{d} > 0 \quad (7.100)$$

ausgegangen werden. Mit Gleichung (7.100) folgen aus der Ungleichung (7.99) die Bedingungen (6.43) und (6.44) für die Materialkonstanten η_3 und η_4 . Die Tatsache, daß die Schädigung die Tragfähigkeit einer Struktur verringert bzw. die Nachgiebigkeit vergrößert, ist demzufolge als eine Folgerung aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik ableitbar. Aus (7.96) folgt

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{X}, \quad (7.101)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = -K'(\kappa). \quad (7.102)$$

Damit und mit der Evolutionsgleichung (7.73) für α und (7.72) für κ nimmt die Dissipationsungleichung die folgende Form an:

$$\lambda [\|\bar{\pi}\|_{\mathbf{A}} - K'(\kappa)] \geq 0. \quad (7.103)$$

Mit Hilfe der Fließbedingung und der Tatsache, daß π_0 und λ größer Null sind, verbleibt als Folgerung aus dem 2. Hauptsatz die folgende Bedingung für die Funktion m :

$$0 \leq m \leq 1. \quad (7.104)$$

Die Funktion (7.34) mit den Materialparametern (7.41) erfüllt diese Bedingung, und das Modell ist deshalb thermodynamisch konsistent. Die Ungleichungen (6.43) und (6.44) bestätigen die Tatsache, daß für eine vorgegebene Spannung π das komplementäre hyperelastische Potential Σ eines geschädigten Materials größer als das eines ungeschädigten ist. Gemeinsam besagen die Ungleichungen (6.43), (6.44) und (7.104), daß Schädigung die Tragfähigkeit des Materials reduziert. Wenn man die Vorzeichen der Ungleichungen (6.43), (6.44) und (7.104) umdreht und viele andere Komponenten des Materialmodells unverändert läßt, entsteht ein Modell, das zur Beschreibung von Inverse-Schädigung (Heilung des Materials) verwendet werden kann.

Kapitel 8

Numerische Umsetzung und Beispiele

8.1 Einleitung

Die Bilanzgleichungen für die Masse (3.6), den Impuls (3.17) und den Drehimpuls (3.23) zusammen mit den konstitutiven Gleichungen (6.63), (7.62) (7.72), (7.73) und (7.79) und gut gestellten Anfangs- und Randbedingungen stellen ein nichtlineares Randwertproblem dar, aus dem die Spannung $\boldsymbol{\pi}$, der gesamte Deformationgradient \mathbf{F} , der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} und die elastische und elastisch-inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^e und \mathbf{D}^{ei} zu bestimmen sind.

In der Mechanik geschieht die numerische Lösung eines solchen nichtlinearen Randwertproblems durch eine iterative Lösung der diskretisierten Form der Ratenform des Prinzips der virtuellen Arbeit (3.75). Dies erfolgt in drei Schritten (Simo & Hughes 1998):

1. Aus den diskretisierten Bilanzgleichungen für den Impuls werden die inkrementellen Verschiebungen berechnet. Anschließend werden daraus die inkrementellen Verzerrungen durch die Auswertung entsprechenden kinematischen Beziehungen bestimmt.
2. Mit den inkrementellen Verzerrungen werden die neuen Werte für die Spannung $\boldsymbol{\pi}$, die elastisch-inelastischen Verzerrungen \mathbf{h}^{ei} und die Menge der internen Variablen \mathbf{a} aus der Integration der lokalen konstitutiven Gesetze mit den vorgegeben Anfangsbedingungen gewonnen.
3. Danach werden mit den errechneten Spannungen die Bilanzgleichung-

ELASTISCHE SPANNUNGS-DEHNUNGS-BEZIEHUNG	
• HYPERELASTISCHE FORM	$\mathbf{h}^e = (\partial \Sigma) / (\partial \boldsymbol{\pi})$
• RATENFORM	$\mathbf{D}^e = \overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\text{Log}}$
ELASTISCHER BEREICH	$\mathbb{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : F \leq 0\}$ $F = \ \boldsymbol{\pi}\ _{\mathbf{A}} - \pi_0 \cdot m - K'(\kappa)$
FLIESSREGEL	$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\ \bar{\boldsymbol{\pi}}\ _{\mathbf{A}}}$
EVOLUTIONSGLEICHUNGEN	$\dot{\kappa} = \ \mathbf{D}^{\text{ei}}\ _{\mathbf{A}^{-1}} = \lambda$ $\dot{\mathbf{X}}^{\text{Log}} = H_{\text{kin}} \mathbf{D}^{\text{ei}}$ $\dot{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+]$
KONSISTENZBEDINGUNG	$\lambda \dot{F} = 0$
KUHN-TUCKER-BEDINGUNG	$\lambda \geq 0, F \leq 0, \lambda F = 0$

Tabelle 8.1: Finites anisotropes Schädigungsmodell

en überprüft, und falls diese nicht erfüllt werden, geht man zurück zum Schritt 1 und setzt die Iteration fort.

Die Schritte 1 und 3 sind für alle Stoffmodelle identisch. Diese Schritte werden deshalb in einem Finite-Element-Programm auf globaler Ebene durchgeführt, siehe z. B. Zienkiewicz & Taylor (1994) und Bathe (1996). Der 2. Schritt ist vom verwendeten Materialmodell abhängig und wird auf Elementebene in den Gaußpunkten durchgeführt. In diesem Kapitel soll bezogen auf das finite anisotrope Schädigungsmodell der vorliegenden Arbeit, siehe Tabelle 8.1, auf den 2. Schritt ausführlich eingegangen werden. Detaillierte Information zur numerischen Integration anderer Materialmodelle findet man in den Arbeiten von Crisfield (1997), Simo & Ortiz (1985), Simo & Taylor (1985, 1986), Ortiz & Simo (1986), Simo (1988a, 1988b) und Simo & Hughes (1998).

8.2 Operator-Split-Methode

Ziel hier ist die Integration des Schädigungsmodells mit der sogenannten Operator-Split-Methode vorzustellen, die in Verbindung mit hyperelasto-

plastischen Materialgesetzen eine effiziente Integration des Stoffgesetzes ermöglicht. Nach dieser Methode erfolgt die Integration in zwei Schritten: in einem elastischen Prediktorschritt werden die internen Zustandsvariablen eingefroren und eine elastische Prediktor-Spannung aus der Integration des elastischen Anteils des Stoffgesetzes berechnet. In einem anschließenden Korrektorschritt wird die elastische Prediktor-Spannung dann mit einem Return-Mapping-Algorithmus auf eine entsprechend korrigierte Fließfläche zurückgebracht.

Für das hier verwendete Materialmodell sind für elastisches Materialverhalten die hyperelastische Form und die Ratenform des elastischen Stoffgesetzes vollkommen äquivalent, d. h. für $\overset{\circ}{\mathbf{a}}^{\text{Log}} = \mathbf{0}$ läßt sich die Ratenform (6.63) direkt und exakt integrieren und es ergibt sich die hyperelastische Form (6.32). Es wird deshalb – nach Simo & Ortiz (1985) und Ortiz & Simo (1986) – von der hyperelastischen oder primitiven Form des elastischen Stoffgesetzes (6.32) ausgegangen. Dadurch wird die Integration eines in der Eulerschen Konfiguration in Ratenform formulierten Stoffgesetzes sogar im Falle inelastischen Materialverhaltens vermieden. Die Bestimmung der elastischen Prediktor-Spannung wird dadurch auf eine reine Funktionsauswertung reduziert und das Ergebnis ist deshalb exakt bzw. unendlich genau, da keine algorithmischen Näherungen benötigt werden. Das Objektivitätsprinzip wird automatisch erfüllt, und man erhält ein hyperelastisches Verhalten.

Die Konfigurationen des Körpers zum Zeitpunkt t_n und t_{n+1} werden mit \mathcal{B}_n und \mathcal{B}_{n+1} bezeichnet. Es wird angenommen, daß die inkrementelle Verschiebung \mathbf{u} , die die Bewegung des Körpers von \mathcal{B}_n nach \mathcal{B}_{n+1} beschreibt, vorgegeben ist. Zum Zeitpunkt t_n sind die Konfiguration $\boldsymbol{\chi}_n$, der Deformationsgradient \mathbf{F}_n , der inelastische Anteil \mathbf{F}_n^i von \mathbf{F}_n , die Spannung $\boldsymbol{\pi}_n$, die Menge $\mathbf{a}_n = \{\boldsymbol{\alpha}_n, \kappa_n, \mathbf{d}_n\}$ der internen Zustandsvariablen, der Anisotropietensor \mathbf{A}_n und der Nachgiebigkeitstensor \mathbf{D}_n bzw. der Elastizitätstensor \mathbf{C}_n ebenfalls bekannt. Die Aufgabe besteht darin, zum Zeitpunkt t_{n+1} die Größen \mathbf{F}_{n+1} , \mathbf{F}_{n+1}^i , $\mathbf{a}_{n+1} = \{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \kappa_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}\}$, \mathbf{A}_{n+1} , \mathbf{D}_{n+1} bzw. \mathbf{C}_{n+1} und $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ zu bestimmen und zwar in einer Art und Weise, die mit dem in der Tabelle 8.1 zusammengestellten Stoffgesetz konsistent ist.

Nach der Operator-Split-Methode wird die folgende additive Aufspaltung des Stoffgesetzes in einen elastischen Anteil – erste Spalte von Gleichung (8.1) – und einen inelastischen Anteil – zweite Spalte von Gleichung

(8.1) – vorgenommen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{ei} & \mathbf{D} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{D}^{ei} &= \mathbf{0} & \mathbf{D}^{ei} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\pi}}} = \lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}} \\
 \dot{\kappa} &= 0 & \dot{\kappa} &= \|\mathbf{D}^{ei}\|_{\mathbf{A}^{-1}} = \lambda \\
 \overset{\circ}{\mathbf{X}}^{\text{Log}} &= \mathbf{0} & \overset{\circ}{\mathbf{X}}^{\text{Log}} &= H_{\text{kin}} \mathbf{D}^{ei} \\
 \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} &= \mathbf{0} & \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} &= \lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+]
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Man beachte, daß die Summe der beiden Spalten von (8.1) wieder das gesamte Schädigungsmodell ergibt. Der im folgenden verwendete Integrations-Algorithmus basiert auf dem folgenden Ergebnis von Operator-Split-Methoden: die Anwendung von zwei Algorithmen hintereinander, wobei der erste mit dem elastischen Anteil des Stoffgesetzes konsistent ist und der zweite mit dem inelastischen, ergibt einen Produkt-Algorithmus, der mit dem gesamten Stoffgesetz konsistent ist.

8.2.1 Elastischer Prediktor-Zustand

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus, der mit dem elastischen Anteil des Stoffgesetzes konsistent ist, vorgestellt.

Neue Konfiguration

Mit der vorgegebenen Verschiebung \mathbf{u} und der Konfiguration $\boldsymbol{\chi}_n$ ergibt sich die gesamte Bewegung $\boldsymbol{\chi}_{n+1}$ des Körpers zum Zeitpunkt t_{n+1} zu

$$\boldsymbol{\chi}_{n+1} = \boldsymbol{\chi}_n + \mathbf{u}. \tag{8.2}$$

Der gesamte Deformationsgradient zum Zeitpunkt t_{n+1} ist

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{F}_n + \text{Grad} \mathbf{u} \\
 &= \mathbf{F}_u \mathbf{F}_n,
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

wobei \mathbf{F}_u den relativen Deformationsgradienten bezeichnet und \mathbf{F}_n den Deformationsgradienten zum Zeitpunkt t_n :

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{1} + \nabla_n \mathbf{u}. \tag{8.4}$$

Hier bezeichnet ∇_n den Gradienten bezüglich der Konfiguration \mathcal{B}_n . Da \mathbf{F}_{n+1} jetzt bekannt ist, können der linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{B}_{n+1} und

der gesamte räumliche Henckysche Verzerrungstensor \mathbf{h}_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnet werden:

$$\mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^T, \quad (8.5)$$

$$\mathbf{h}_{n+1} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}_{n+1}. \quad (8.6)$$

Elastische Prediktor-Spannung

Zur Berechnung der elastischen Prediktor-Spannung werden die internen Zustandsvariablen eingefroren. Man betrachte demnach die tensorielle Differentialgleichung

$$\overset{\circ}{\mathbf{a}}^{\text{Log}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t_n) = \mathbf{a}_n. \quad (8.7)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man

$$\mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{a}_n, \quad (8.8)$$

wobei hier $\mathbf{R}_u^{\text{Log}}$ die relative logarithmische Rotation bezeichnet. Die Menge der internen Zustandsvariablen erfährt also eine Vorwärtsrotation mit der relativen Log-Rotation. Die relative Log-Rotation wird aus der folgenden linearen Tensordifferentialgleichung bestimmt: :

$$(\dot{\mathbf{R}}^{\text{Log}})^T = \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} (\mathbf{R}^{\text{Log}})^T, \quad \mathbf{R}^{\text{Log}}|_{t_n} = \mathbf{R}_n^{\text{Log}}. \quad (8.9)$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ den Log-Spin und $\mathbf{R}_n^{\text{Log}}$ die Log-Rotation zum Zeitpunkt t_n . Die Lösung von (8.9) lautet

$$(\mathbf{R}_{n+1}^{\text{Log}})^T = \exp(\Delta t \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}) (\mathbf{R}_n^{\text{Log}})^T = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T (\mathbf{R}_n^{\text{Log}})^T, \quad (8.10)$$

$$(\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T = \exp(\Delta t \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}). \quad (8.11)$$

Die basisfreie Formel für $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ als Funktion der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} , des Drehgeschwindigkeitstensors \mathbf{W} und des *gesamten* linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{B} lautet

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{\text{Log}}(\mathbf{B}, \mathbf{D}), \quad (8.12)$$

wobei der Tensor \mathbf{N}^{Log} durch Gleichung (A.50) gegeben wird. Mit der Näherung

$$\dot{\mathbf{F}}_u = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F}_u - \mathbf{1}) \quad (8.13)$$

für die materielle Zeitableitung des relativen Deformationsgradienten \mathbf{F}_u sind dann alle anderen Größen zur Berechnung von $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ bzw. $\mathbf{R}_u^{\text{Log}}$ festgelegt:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_u \mathbf{F}_n, \quad (8.14)$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_u \mathbf{F}_u^{-1}, \quad (8.15)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}_u \mathbf{F}_u^{-1} + \mathbf{F}_u^{-1} \dot{\mathbf{F}}_u), \quad (8.16)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}_u \mathbf{F}_u^{-1} - \mathbf{F}_u^{-1} \dot{\mathbf{F}}_u). \quad (8.17)$$

Der zur numerischen Berechnung der relativen Log-Rotation $\mathbf{R}_u^{\text{Log}}$ benötigte Algorithmus ist in Simo & Hughes (1998, Box 8.3 Seite 297) angegeben.

Anmerkung 8.1. Aus (4.68) bzw. (4.69) folgt, daß für moderate Verzerrungen die folgende Näherung für $\mathbf{R}_u^{\text{Log}}$ verwendet werden kann:

$$\mathbf{R}_u^{\text{Log}} \approx \mathbf{R}_n (\mathbf{R}_{n+1})^T = \mathbf{R}_u^T, \quad (8.18)$$

wobei \mathbf{R}_{n+1} und \mathbf{R}_n den Rotationstensor zum Zeitpunkt t_{n+1} und t_n und \mathbf{R}_u den relativen Rotationstensor bezeichnen. \square

Man erhält aus (8.8) für den Elastizitätstensor und den Anisotropietensor die folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{C}_n, \quad (8.19)$$

$$\mathbf{A}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{A}_n. \quad (8.20)$$

Aus

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \mathbf{0} \quad (8.21)$$

folgt

$$\dot{\mathbf{F}}^{\text{i}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_{n+1}^{\text{i}(0)} = \mathbf{F}_n^{\text{i}} \quad (8.22)$$

und damit folgt aus (2.86) die Beziehung

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\text{e}(0)} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_{n+1}^{\text{i}(0)})^{-1}. \quad (8.23)$$

Daraus kann man den elastischen linken Cauchy-Green Tensor und den elastischen Anteil des Verzerrungstensors berechnen:

$$\mathbf{B}_{n+1}^{\text{e}(0)} = \mathbf{F}_{n+1}^{\text{e}(0)} (\mathbf{F}_{n+1}^{\text{e}(0)})^T, \quad (8.24)$$

$$\mathbf{h}_{n+1}^{e(0)} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}_{n+1}^{e(0)} \quad (8.25)$$

und folgend die elastische Prediktor-Spannung $\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)}$ zu

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{C}_{n+1}^{(0)} : (\mathbf{h}_{n+1}^{e(0)}). \quad (8.26)$$

Damit sind alle Größen des elastischen Prediktor-Zustands bekannt. Er wird durch die Anfangsbedingungen $\{\mathbf{F}_n, \mathbf{h}_n^i, \mathbf{a}_n, \boldsymbol{\pi}_n, \mathbf{R}_n^{\text{Log}}\}$ und die vorgebene inkrementelle Verschiebung \mathbf{u} vollständig bestimmt. Der beschriebene Algorithmus stellt eine exakte Lösung des elastischen Anteils des Stoffgesetzes dar.

Anmerkung 8.2. Es wird hier der Fall betrachtet, daß die Bewegung von \mathcal{B}_n nach \mathcal{B}_{n+1} eine reine Starrkörperrotation ist. In diesem Fall ist \mathbf{F}_u ein orthogonaler Tensor $\mathbf{Q} \in S0_3$ und \mathbf{B}_{n+1} eine Vorwärtsrotation von \mathbf{B}_n mit \mathbf{Q} :

$$\mathbf{F}_u = \mathbf{Q}, \quad (8.27)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^e = \mathbf{Q} \star (\mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^{eT}). \quad (8.28)$$

Der räumliche Henckysche Dehnungstensor \mathbf{h} bzw. die logarithmische Funktion ist objektiv. Für \mathbf{h}_{n+1} gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{n+1}^e &= \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} \star (\mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^{eT}) \\ &= \mathbf{Q} \star \frac{1}{2} \ln \mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_n^{eT} \\ &= \mathbf{Q} \star \mathbf{h}_n^e. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Es gelten

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \quad (8.30)$$

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \quad (8.31)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{O}, \quad (8.32)$$

und man erhält damit aus (2.125)

$$\mathbf{R}_u^{\text{Log}} = \mathbf{Q}^T. \quad (8.33)$$

Für die Spannung $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ folgt

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\pi}_{n+1} &= \mathbf{C}_{n+1} : \mathbf{h}_{n+1}^e \\
 &= (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{C}_n : (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{h}_n^e \\
 &= (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star (\mathbf{C}_n : \mathbf{h}_n^e) \\
 &= (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \boldsymbol{\pi}_n \\
 &= \mathbf{Q} \star \boldsymbol{\pi}_n,
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

wobei Gleichung (1.33) verwendet wurde. Die Spannung $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ ist also einfach eine Vorwärtsdrehung der Spannung $\boldsymbol{\pi}_n$ mit \mathbf{Q} . Die Integration ist deshalb objektiv. \square

8.2.2 Be- und Entlastungsbedingung

Mit den Werten des elastischen Prediktor-Zustandes wird die Fließbedingung ausgewertet:

$$F_{n+1}^{(0)} = F \left(\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)} \right). \tag{8.35}$$

Die Fließfunktion ist konvex, und anhand der Größen des elastischen Prediktor-Zustandes bzw. der Prediktor-Spannung läßt sich entscheiden, ob der Schritt elastisch oder inelastisch ist. Die algorithmische Form der Kuhn-Tucker-Bedingung lautet

$$F_{n+1}^{(0)} \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{elastischer Schritt} \quad \Delta\lambda = 0, \\ > 0 & \Rightarrow \text{inelastischer Schritt} \quad \Delta\lambda > 0. \end{cases} \tag{8.36}$$

Für den Fall, daß

$$F_{n+1}^{(0)} \leq 0 \tag{8.37}$$

gilt, liegt also elastisches Materialverhalten vor. Die Spannung zum Zeitpunkt t_{n+1} ist identisch mit der elastischen Prediktor-Spannung:

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)}. \tag{8.38}$$

Für die Menge der internen Variablen zum Zeitpunkt t_{n+1} gilt

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}. \tag{8.39}$$

Die internen Variablen zum Zeitpunkt t_n werden also einfach mit der relativen Log-Rotation vorwärtsrotiert.

8.2.3 Der Return-Mapping-Algorithmus

Für den Fall, daß der Schritt inelastisch ist, liegt die elastische Prediktor-Spannung außerhalb der Fließfläche, d. h.

$$F(\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}) > 0 \Leftrightarrow F(\boldsymbol{\pi}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}) = 0 \quad (8.40)$$

und

$$\Delta\lambda > 0. \quad (8.41)$$

Die elastische Prediktor-Spannung und die internen Variablen müssen mit Hilfe eines Return-Mapping-Algorithmus auf die Fließfläche zurückgebracht werden, d. h. Lösung des inelastischen Anteils von (8.1) bzw. Bestimmung von

$$\{\mathbf{F}_{n+1}^i, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\pi}_{n+1}\} \quad (8.42)$$

mit dem elastischen Prediktor-Zustand

$$\{\mathbf{F}_{n+1}^i, \mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\pi}_{n+1}\}|_{\Delta\lambda=0} = \{\mathbf{F}_{n+1}^{i(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}, \boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)}\} \quad (8.43)$$

als Anfangsbedingung. Hier wird der sogenannte cutting-plane Algorithmus verwendet.

Die Integration des inelastischen Anteils des Stoffgesetzes mit der impliziten Euler-Regel ergibt für die Verfestigungsvariablen die Beziehungen

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n^{(0)} + \Delta\lambda, \quad (8.44)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1}^{(0)} + H_{\text{kin}} \frac{\Delta\lambda}{\pi_{eq}} (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}})_{n+1} \quad (8.45)$$

und für die Schädigungsvariable

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{(0)} + \Delta\lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+]_{n+1} \quad (8.46)$$

mit

$$2 \mathbf{Y}_{n+1} = [2\eta_3(\text{tr}[\boldsymbol{\pi}])\boldsymbol{\pi} + 4\eta_4\boldsymbol{\pi}^2]_{n+1}. \quad (8.47)$$

Am Ende des Zeitschrittes gilt für die Zunahme des elastisch-inelastischen Anteils des Verzerrungstensors die Beziehung

$$\Delta\mathbf{h}_{n+1}^{\text{ei}} = \frac{\Delta\lambda}{\pi_{eq}} (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}})_{n+1}. \quad (8.48)$$

Außerdem wird für den Elastizitätstensor am Ende des Zeitschrittes die folgende Näherungsbeziehung verwendet:

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{(0)} - \mathbf{C}_{n+1}^d \quad (8.49)$$

mit

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(0)} = \left(\mathbf{D}_{n+1}^{(0)} \right)^{-1}. \quad (8.50)$$

Aus

$$\mathbf{C} : \mathbf{D} = \mathbf{I} \quad (8.51)$$

folgt

$$\dot{\mathbf{C}} = -\mathbf{C} : \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{C} \quad (8.52)$$

und daraus folgt schließlich für die Änderung des Elastizitätstensors die Beziehung

$$\mathbf{C}_{n+1}^d = \mathbf{C}_{n+1} \mathbf{D}_{n+1}^d \mathbf{C}_{n+1}. \quad (8.53)$$

Der schädigungsinduzierte Anteil \mathbf{D}_{n+1}^d des Nachgiebigkeitstensors wird durch Einsetzen von $\Delta \mathbf{d}_{n+1}$ in (6.39) bestimmt. Für den Anisotropietensor am Ende des Zeitschrittes gilt

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{(0)} + \mathbf{A}_{n+1}^d, \quad (8.54)$$

wobei der schädigungsinduzierte Anteil \mathbf{A}_{n+1}^d des Anisotropietensors durch Einsetzen von $\Delta \mathbf{d}_{n+1}$ in (7.20) bestimmt wird. Damit erhält man für $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ die Beziehung

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)} - \mathbf{C}_n^{(0)} : \frac{\Delta \lambda}{\pi_{eq}} (\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}})_{n+1} - \mathbf{C}^d (\mathbf{h}_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^i). \quad (8.55)$$

Hier wird lineare Verfestigung angenommen. Für die Verfestigungsfunktion gilt demnach

$$K'(\kappa) = H_{\text{iso}} \kappa, \quad (8.56)$$

wobei H_{iso} den isotropen Verfestigungsmodul bezeichnet. Für die Fließbedingung F_{n+1} am Endes des Zeitschrittes gilt

$$F_{n+1} = (\pi_{eq})_{n+1} - \pi_0 \cdot m_{n+1} - H_{\text{iso}} \kappa_{n+1}. \quad (8.57)$$

Step 1	Geometric update $\chi_{n+1} = \chi_n + \mathbf{u}$ $\mathbf{F}_{n+1} = (\mathbf{1} + \nabla_n \mathbf{u}) \mathbf{F}_n$ $\mathbf{F}_{n+1}^{i(0)} = \mathbf{F}_n^i$ $\mathbf{F}_{n+1}^{e(0)} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_{n+1}^{i(0)})^{-1}$ $\mathbf{B}_{n+1}^{e(0)} = \mathbf{F}_{n+1}^{e(0)} (\mathbf{F}_{n+1}^{e(0)})^T$ $\mathbf{h}_{n+1}^{e(0)} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}_{n+1}^{e(0)}$
Step 2	Elastic predictor $\mathbf{C}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{C}_n$ $\mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{R}_u^{\text{Log}})^T \star \mathbf{a}_n$ $\pi_{n+1}^{(0)} = \mathbf{C}_{n+1}^{(0)} : (\mathbf{h}_{n+1}^{e(0)})$
GOTO Table 8.3	
Step 6	Update intermediate configuration $\mathbf{V}_{n+1}^e = \exp(\partial \Sigma / \partial \pi_{n+1})$ $\mathbf{R}_{n+1}^e = \exp(\Delta t \Omega^e) \mathbf{R}_n^e$ $\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{V}_{n+1}^e \mathbf{R}_{n+1}^e$ $\mathbf{F}_{n+1}^i = \mathbf{F}_{n+1}^{-e} \mathbf{F}_{n+1}$

Tabelle 8.2: Prediktor-Korrektor-Algorithmus: Teil 1

Die Beziehungen (8.44)–(8.57) stellen ein nichtlineares und gekoppeltes System von Gleichungen für den Zustand am Ende des Zeitschrittes dar. Der Endzustand kann deshalb nicht analytisch bestimmt werden. Das Return-Mapping muß iterativ erfolgen. Es wird wie folgt vorgegangen: Die Fließbedingung $F_{n+1}^{(i)}$ wird in jedem Iterationsschritt um die Werte $\pi_{n+1}^{(i)}$ und $\mathbf{a}_{n+1}^{(i)}$ linearisiert. Aus der linearisierten Fließbedingung wird $\Delta \lambda^2$ bestimmt. Anschließend werden die internen Zustandsvariablen neu bestimmt und danach die Konsistenzbedingung kontrolliert. Falls sie nicht erfüllt wird, wird der Prozeß wiederholt. Die Tabellen 8.2 und 8.3 enthalten eine Zusammenfassung des gesamten Algorithmus.

Bestimmung des Cauchyschen Spannungstensors

Da die Spannung π_{n+1} aus Tabellen 8.2 und 8.3 bekannt ist, können mit (3.32) und (3.97) bzw. (3.115) der Kirchhoffsche Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ und der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ angegeben werden:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}[\pi_{n+1}], \quad (8.58)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = J_{n+1}^{-1} \boldsymbol{\tau}_{n+1}. \quad (8.59)$$

Step 3	Check for yielding $F_{n+1}^{(0)} = F(\pi_{n+1}^{(0)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}) \leq 0?$ YES $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{(0)}$ $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}^{(0)}$ RETURN
	NO $\Delta\lambda^{(0)} = 0, \quad i = 0$ GOTO 4
Step 4	Return-Mapping $\Delta\lambda^2 = -\frac{F_{n+1}^i}{DF_{n+1}^{(i)}}$ $\kappa_{n+1}^{(i+1)} = \kappa_{n+1}^{(i)} + \Delta\lambda^2$ $\pi_{n+1}^{(i+1)} = \pi_{n+1}^{(i)} - \mathbf{C}_{n+1}^{(i)} : \left(\frac{\Delta\lambda^2}{\pi_{e\sigma}} \mathbf{A} : \bar{\pi}_{n+1}^{(i)}\right) - \mathbf{C}^d : \mathbf{h}_{n+1}^{e(i)}$
Step 5	Check for convergence $F(\pi_{n+1}^{(i+1)}, \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)}) \leq \text{TOL}?$ YES RETURN
	NO, $i \leftarrow i + 1$ GOTO 4

Tabelle 8.3: Prediktor-Korrektor-Algorithmus: Teil 2

Hier bezeichnet J_{n+1} die Determinante von \mathbf{F}_{n+1} und \mathbf{L}_{n+1} den Tensor vierter Stufe in (3.104). Für die Auswertung von (8.58) wird die basisfreie Form (3.115) verwendet.

8.2.4 Bestimmung der Zwischenkonfiguration

Da die Spannung π_{n+1} aus dem Return-Mapping Algorithmus bekannt ist, folgt der elastische linke Strecktensor \mathbf{V}_{n+1}^e aus dem elastischen Stoffgesetz:

$$\mathbf{V}_{n+1}^e = \exp(\partial\Sigma/\partial\pi_{n+1}). \quad (8.60)$$

Die elastische Rotation \mathbf{R}_{n+1}^e wird aus der Integration der folgenden linearen tensoriellen Differentialgleichung bestimmt:

$$\dot{\mathbf{R}}^e = \boldsymbol{\Omega}^e \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{R}^e|_{t=n} = \mathbf{R}_n, \quad (8.61)$$

wobei

$$\boldsymbol{\Omega}^e = \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \mathbf{N}^e, \quad (8.62)$$

und

$$\mathbf{N}^e = \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{2\lambda_\sigma^e \lambda_\tau^e}{\lambda_\tau^{e2} - \lambda_\sigma^{e2}} + \frac{1}{\ln \lambda_\sigma^e - \ln \lambda_\tau^e} \right) \mathbf{B}_\sigma^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_\sigma^e \quad (8.63)$$

gilt. Hier bezeichnet Ω^{Log} den Log-Spin, λ_σ^e bezeichnen die Eigenwerte von \mathbf{V}^e , \mathbf{B}_σ^e die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen und n die Anzahl ungleicher Eigenwerte. Die basisfreie Darstellung für \mathbf{N}^e ist im Anhang **B** angegeben. Man beachte, daß es aus (B.7) und (2.128) folgt, daß für eine rein elastische Formänderung aus Ω^e der Polar-Spin Ω^{R} wird, da in diesem Fall \mathbf{V}^e und \mathbf{R}^e der gesamte Strecktensor \mathbf{V} und der Rotationstensor \mathbf{R} sind. Die numerische Lösung von (8.61) lautet

$$\mathbf{R}_{n+1}^e = \exp(\Delta t \Omega^e) \mathbf{R}_n^e. \quad (8.64)$$

Die Berechnung der Exponentialabbildung erfolgt wie in Simo & Hughes (1998, Box 8.3 Seite 297) angegeben. Da der elastische Strecktensor \mathbf{V}_{n+1}^e und elastische Rotationstensor \mathbf{R}_{n+1}^e bekannt sind, folgt der elastische Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten aus der Polarzerlegung zu

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{V}_{n+1}^e \mathbf{R}_{n+1}^e. \quad (8.65)$$

Da der elastische Anteil \mathbf{F}_{n+1}^e von \mathbf{F}_{n+1} jetzt bekannt ist, kann aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_{n+1}^i = \mathbf{F}_{n+1}^{-e} \mathbf{F}_{n+1} \quad (8.66)$$

der inelastische Anteil \mathbf{F}_{n+1}^i bestimmt werden, siehe Zusammenfassung in der Tabelle 8.2. Hier braucht man also nicht davon auszugehen, daß \mathbf{F}^e eine reine Streckung ist. Der verwendete Rahmen für finite Elastoplastizität ist demzufolge kinematisch konsistent, d. h. der elastische Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten und der inelastische Anteil \mathbf{F}^i und alle mit ihnen (\mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i) zusammenhängenden kinematischen Größen können konsistent und eindeutig bestimmt werden.

8.3 Konsistenter Tangentenmodul

Für die folgenden Betrachtungen wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit isotropes Materialverhalten angenommen. In inkrementeller Form lautet das Stoffgesetz

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e = \mathbf{C} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^{\text{ei}}). \quad (8.67)$$

Mit der Fließregel (7.62) folgt

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right). \quad (8.68)$$

Der Proportionalitätsfaktor oder Konsistenzparameter λ ergibt sich aus der Konsistenzbedingung zu

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \pi} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{\left(H + \frac{\partial F}{\partial \pi} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \pi} \right)}, \quad (8.69)$$

wobei die Konstante H durch Gleichung (7.88) gegeben wird. Damit kann die Lograte $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}}$ von $\boldsymbol{\tau}$ als eine Funktion der gesamten Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} angegeben werden:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{\text{Log}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{D}, \quad (8.70)$$

wobei \mathbf{C}^{ep} den elastoplastischen Tangentenmodul bezeichnet:

$$\mathbf{C}^{\text{ep}} = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{für } \lambda = 0 \\ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \pi} \otimes \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \pi}}{\left(H + \frac{\partial F}{\partial \pi} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \pi} \right)} & \text{für } \lambda > 0. \end{cases} \quad (8.71)$$

Mit (8.70) folgt aus der Ratenform der schwachen Form des Impulssatzes (3.75) die folgende Beziehung für den Materialmodul, der zur Berechnung des materiellen Anteils der Steifigkeitsmatrix benötigt wird:

$$\mathbf{C}^{\text{m}} = J^{-1}(\mathbf{C}^{\text{ep}} + \mathbf{G}). \quad (8.72)$$

Der symmetrische Tensor vierter Stufe \mathbf{G} wird durch (3.50) gegeben, und J bezeichnet die Determinante des Deformationsgradienten. Die Form von \mathbf{G} wird allein durch die logarithmische Zeitableitung festgelegt. Der damage-elastoplastische Tangentenmodul \mathbf{C}^{ep} ist der Anteil von \mathbf{C}^{m} , der vom Materialmodell abhängt, und für das Modell der Tabelle 8.1 kann er nicht analytisch angegeben werden. Für ein quadratisches Konvergenzverhalten bei der inkrementellen und iterativen Lösung des nichtlinearen Randwertproblems wird der konsistent linearisierte Tangentenoperator oder Tangentenmodul

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(i)} = \partial \boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(i)} / \partial \mathbf{h}_{n+1}^{(i)} \quad (8.73)$$

benötigt, siehe Simo & Taylor (1985). Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens wird der Tensor \mathbf{C}^{ep} in Gleichung (8.72) deshalb durch den

konsistenten Tangentenmodul $\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}$ ersetzt. $\mathbf{C}_{n+1}^{(i)}$ liegt für das Modell der Tabelle 8.1 ebenfalls nicht analytisch vor und wird deshalb hier numerisch berechnet. Für diese Berechnung wird die sogenannte Störungsmethode (perturbation method) verwendet, siehe Kojić & Bathe (1987), Zhu & Cescotto (1995) und Miehe (1996).

8.4 Numerische Beispiele

Für das Schädigungsmodell der Tabelle 8.1 ist ein isoparametrisches Element – Element Nummer 19 (EL19) – in das Finite Element Program FEAP (A Finite Element Analysis Program) implementiert worden. FEAP wird oft aufgrund seines kompakten und modularen Aufbaus in der Entwicklung von Stoffgesetzen verwendet. Diese Eigenschaft von FEAP ermöglicht einen relativ einfachen Einbau von eigenen Materialmodellen. Eine detaillierte Beschreibung von FEAP kann man den Handbüchern und dem Buch von Zienkiewicz & Taylor (1994) entnehmen.

Für alle Beispiele wird als Konvergenzkriterium für die globale Iteration die diskrete Energienorm $\Delta E(\mathbf{u})$ verwendet. Hier bezeichnet \mathbf{u} den Vektor der Knotenverschiebungen. Konvergenz ist dann erreicht, wenn

$$\Delta E(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) < 10^{-12} \Delta E(\mathbf{u}_{n+1}^{(1)}) = \text{tol} \Delta E(\mathbf{u}_{n+1}^{(1)}) \quad (8.74)$$

gilt. Für die globale Gleichgewichtsiteration wird ein Standard-Newton-Raphson Verfahren ohne *line-search* Algorithmen verwendet.

8.4.1 Elastische Beispiele

Die folgenden Beispiele mit elastischem Materialverhalten sollen zeigen, daß das Materialmodell in der Lage ist, große elastische Formänderungen zu beschreiben und Effekte wie z. B. den sogenannten hypoelastic-yielding Effekt beim Scherversuch wiederzugeben. Die Beispiele dienen auch der Überprüfung der Implementation des Stoffgesetzes.

Beispiel 1: Patch Test

Zum Testen von EL19 wird das folgende patch-test Beispiel betrachtet: eine quadratische Platte, die auf der rechten Seite in x -Richtung durch eine Streckenlast belastet wird. Auf der rechten Seite wird die Platte so

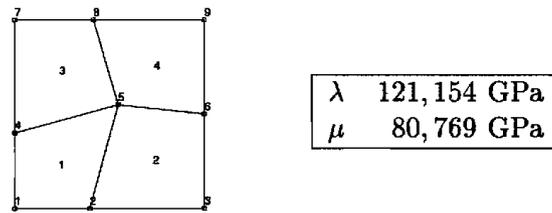


Abbildung 8.1: Patch Test: Netz und Materialparameter

Knoten	u [mm]	v [mm]
3	4.3334E-5	-1.1872E-18
5	2.3833E-5	-1.0214E-05
9	4.3334E-5	-1.8571E-05

Tabelle 8.4: Patch Test Beispiel: Ergebnisse

festgehalten, daß sie sich in y -Richtung, aber nicht in x -Richtung verschieben kann. Die Platte wird wie in Abbildung 8.1 diskretisiert. Die Platte besitzt eine Seitenlänge von 10 mm, eine Dicke von 1 mm, der Betrag der Streckenlast ist 10 N/mm. Knoten 1 wird in beiden Richtungen festgehalten. Die Knoten 2 und 3 sind in y -Richtung gelenkig gelagert, Knoten 7 und 4 in x -Richtung.

Die exakte Lösung dieser Aufgabe als ein linear elastisches Problem lautet

$$u = 4,333 \cdot 10^{-5}x; \quad v = -1,8571 \cdot 10^{-5}y \quad (8.75)$$

für die Verschiebungen und

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 1,0 \text{ N/mm}^2; & \sigma_{yy} &= 0,0; \\ \sigma_{zz} &= 0,3 \text{ N/mm}^2; & \sigma_{xy} &= 0,0 \end{aligned} \quad (8.76)$$

für die Spannungen. Der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems liegt im Knoten 1. Die Ergebnisse von EL19 für ausgewählte Knoten sind in der Tabelle 8.4 und stimmen exakt überein mit der analytischen Lösung.

Bespiel 2: Scherversuch

Als nächstes elastisches Beispiel wird die in Abbildung 8.2 dargestellte finite Scherdeformation betrachtet. Zuerst wird hier die analytische Lösung

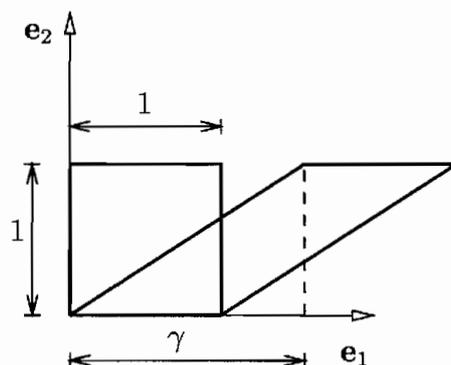


Abbildung 8.2: Scherversuch: Geometrie und Koordinatensystem

angegeben: in den festen Koordinaten der Abbildung 8.2 lautet die Deformation

$$\mathbf{x} = (X_1 + \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 \quad (8.77)$$

und der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (8.78)$$

Für den linken Cauchy-Green Tensor erhält man

$$\mathbf{B} = (1 + \gamma^2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \gamma(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (8.79)$$

mit den folgenden Eigenwerten und Eigenprojektionen:

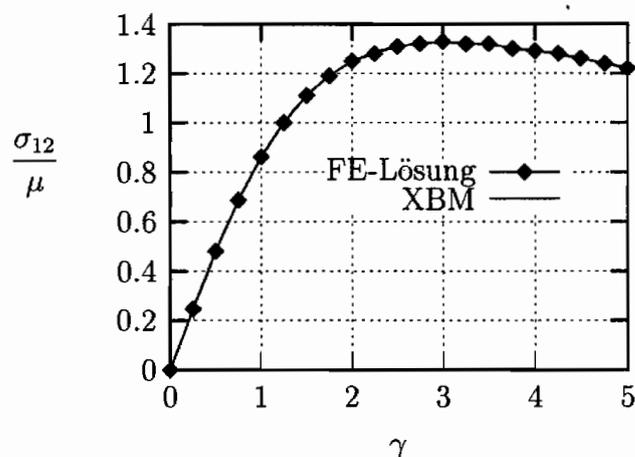
$$\begin{aligned} \chi_1 &= (2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2})/2, \\ \chi_2 &= (2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2})/2, \\ \chi_3 &= 1 \end{aligned} \quad (8.80)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}(\mathbf{B} - \chi_2\bar{\mathbf{1}} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \quad \bar{\mathbf{1}} = (\mathbf{1} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{1}{\chi_2 - \chi_1}(\mathbf{B} - \chi_1\bar{\mathbf{1}} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{B}_3 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Damit erhält man den räumlichen Henckyschen Verzerrungstensor \mathbf{h} zu

$$\mathbf{h} = \frac{\ln \chi_1 - \ln \chi_2}{2(\chi_1 - \chi_2)}(\mathbf{B} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \frac{\chi_1 \ln \chi_2 - \chi_2 \ln \chi_1}{2(\chi_1 - \chi_2)}\bar{\mathbf{1}}. \quad (8.82)$$

Abbildung 8.3: Scherversuch, elastische Berechnung: σ_{12} gegen γ

Mit der letzten Beziehung für h folgen aus (6.49) die folgenden Beziehungen für die Spannungskomponenten σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} als Funktion der Schubverzerrung γ :

$$\sigma_{12} = \frac{2\mu}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \ln \left[1 + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \right], \quad (8.83)$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \gamma \sigma_{12} = -\sigma_{22}.$$

Daraus folgt der folgende Zusammenhang zwischen den Komponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} des Spannungstensors und der Schubverzerrung γ :

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \gamma \sigma_{12}. \quad (8.84)$$

Der sogenannte hypoelastic-yield Punkt liegt bei

$$\gamma_m = 3,0177171, \quad \sigma_{12m} = 1,325486\mu, \quad (8.85)$$

siehe Xiao, Bruhns & Meyers (1997b). Für die numerische Lösung werden die Materialparameter aus Abbildung 8.1 verwendet. In Abbildungen 8.3 und 8.4 sind die Spannungen σ_{12} und σ_{11} gegenüber der Schubverzerrung dargestellt. Den Abbildungen entnimmt man die exakte Übereinstimmung der numerischen mit der analytischen Lösung (XBM).

Beispiel 3: Lochscheibe

Das nächste finite elastische Beispiel ist eine Scheibe mit einem Loch vom 10 mm Radius in der Mitte, die bis zu einer Verschiebung von 18 mm in

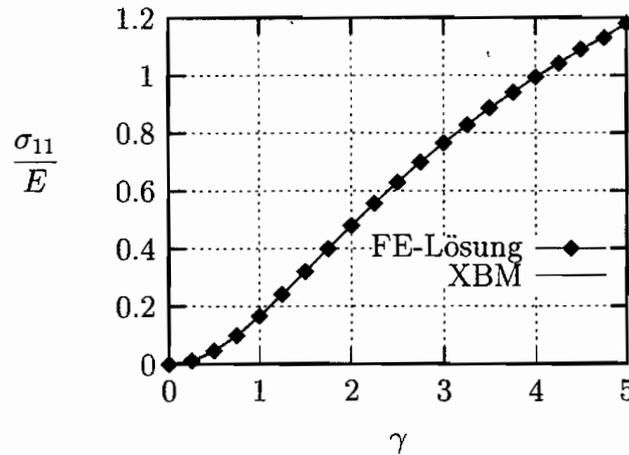


Abbildung 8.4: Scherversuch, elastische Berechnung: σ_{11} gegen γ

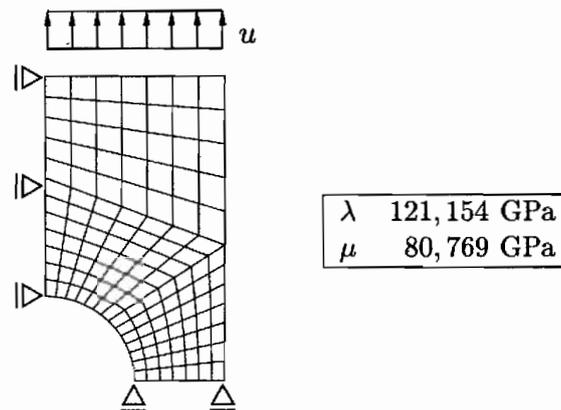


Abbildung 8.5: Lochscheibe: Geometrie, Randbedingungen, Diskretierung und Materialparameter

vertikaler Richtung auseinandergezogen wird. Die Scheibe hat eine Breite von 20 mm, eine Höhe von 36 mm und eine Dicke von 1 mm. Die verwendeten elastischen Konstanten sind in der Abbildung 8.5 angegeben. Aufgrund der Symmetrie braucht nur ein Viertel der Scheibe diskretisiert zu werden. Das verwendete Netz besteht aus 133 Elementen.

In Abbildung 8.6 ist die verformte Konfiguration der Scheibe dargestellt. Die großen Verzerrungen sind klar zu erkennen. Man sieht auch, daß die gesamte Struktur eine gleichmäßige Deformation erfährt. Generell kann gesagt werden, daß alle Knoten sich nach links und nach oben verschieben. In Abbildung 8.7 ist die Kraft-Verschiebungs-Kurve an der

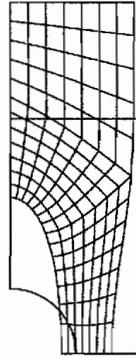


Abbildung 8.6: Lochscheibe, elastische Berechnung: verformte Lage

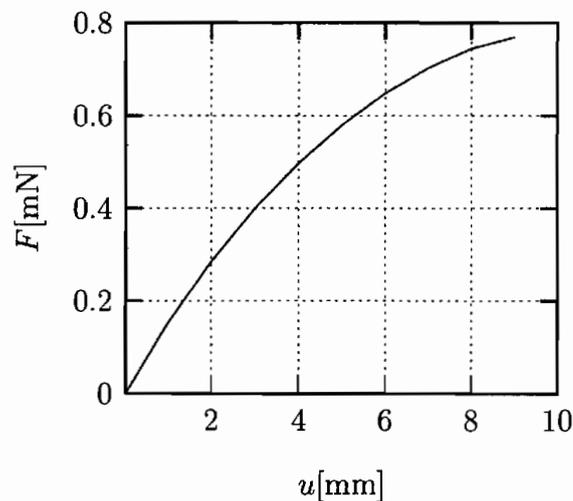


Abbildung 8.7: Lochscheibe: Kraft-Verschiebungskurve

Lastangriffslinie angegeben. Die Ergebnisse und die Form der deformierten Struktur stimmen exakt überein mit Ergebnissen, die mit dem *logarithmic stretch model* von FEAP erzielt wurden.

Um die Endverschiebung von $u = 9$ mm zu erreichen, wurden 9 gleiche Lastschritte verwendet. Für jeden Zeitschritt wurden durchschnittlich 5 Iterationen benötigt. In Tabellen 8.5 und 8.6 sind die Euklidische Norm des Residums und die Energienorm für den 1. und 9. Schritt angegeben. Am Anfang der Iteration bzw. für den ersten Schritt, also bei noch moderaten (elastischen) Verzerrungen, ist die Konvergenzgeschwindigkeit quadratisch. Für den neunten und spätere Schritte bleibt das Konvergenzverhalten gut, erreicht aber nicht mehr die Geschwindigkeit einer quadratischen Konvergenz.

RESIDUAL NORM		
Iteration	STEP	
	1	9
1	5.4345101E+05	2.8709168E+05
2	3.0111748E+03	1.8412613E+03
3	3.5977652E+01	5.8766779E+02
4	3.3900199E-03	9.4294687E+01
5	--	7.7710953E-01
6	--	1.7146457E-02
7	--	3.7245086E-04

Tabelle 8.5: Lochscheibe, elastische Berechnung: Konvergenzverhalten

ENERGY NORM		
Iteration	STEP	
	1	9
1	1.39355242E+06	7.50760540E+05
2	2.25613473E+02	6.71773495E+02
3	1.36118217E-02	4.84787082E+01
4	1.09172699E-10	4.77130380E-01
5	--	7.76179153E-05
6	--	1.11073061E-08
7	--	4.16691134E-12

Tabelle 8.6: Lochscheibe, elastische Berechnung: Konvergenzverhalten

Beispiel 4: Membranproblem von Cook

Als nächstes elastisches Beispiel wird das sogenannte Membranproblem von Cook betrachtet. Es ist eine ebene Verzerrungszustandsaufgabe, die oft zum Testen von Elementen verwendet wird, siehe z. B. Mieke (1996). Eine sich verjüngende Platte, die an einem Ende eingespannt ist, wird am anderen Ende durch eine Scherkraft belastet. In Abbildung 8.8 sind die Geometrie und die Randbedingungen angegeben. Es wurden die Materialparameter aus Abbildung (8.5) und ein Netz von 32×32 Elementen verwendet.

Abbildung 8.9 zeigt die verformte Konfiguration und die Diskretisierung. Die Endbelastung von $F = 200$ kN ist in 10 gleichen Zeitschritten aufgebracht worden. Für jeden Zeitschritt wurden durchschnittlich 6 Iterationen benötigt. Die Last-Verschiebungs-Kurve für den Knoten am rechten oberen Ende der Platte ist in der Abbildung 8.10 angegeben. Diese Kurve ist identisch mit der in Fig. 4 in Mieke (1996). Das Konvergenzverhalten für einen typischen Zeitschritt ist in der Tabelle 8.7 angegeben.

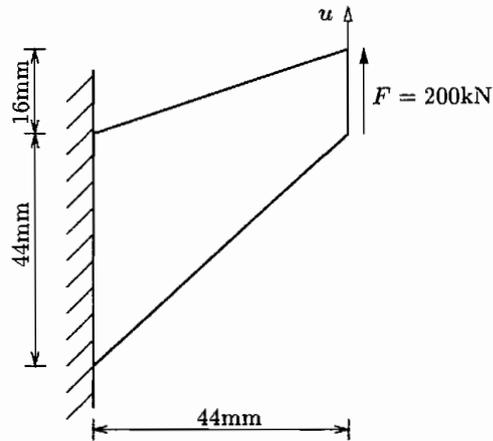


Abbildung 8.8: Cook-Membran: Geometrie und Randbedingungen

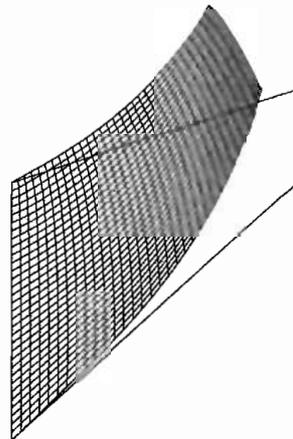


Abbildung 8.9: Cook-Membran: Diskretisierung und unverformte und verformte Konfigurationen

Iteration	Residual Norm	Energy Norm
1	4,9212549E+00	4,1665037E+01
2	1,2372392E+01	1,4118416E+00
3	6,3287924E-02	1,1574998E-04
4	4,7892082E-05	2,4844085E-11
5	1,3439429E-09	1,1886283E-20

Tabelle 8.7: Cook-Membran: Konvergenzverhalten

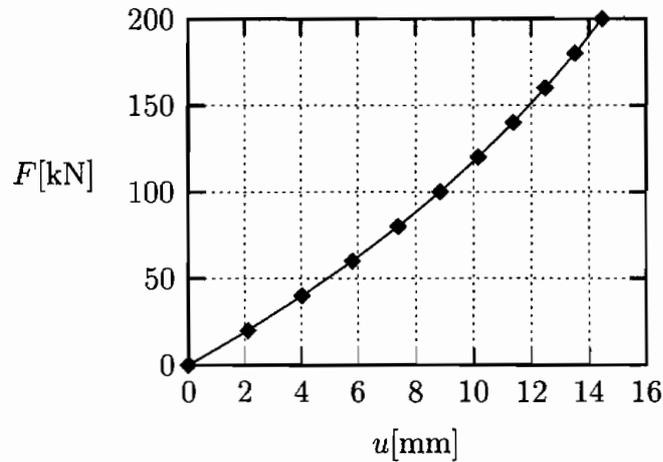


Abbildung 8.10: Cook-Membran: Kraft-Verschiebungskurve

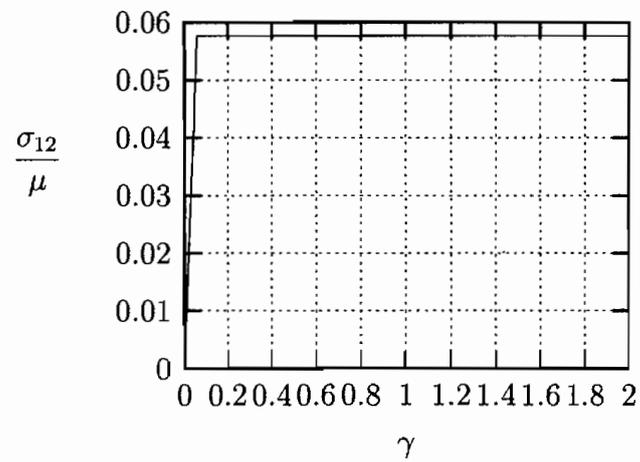
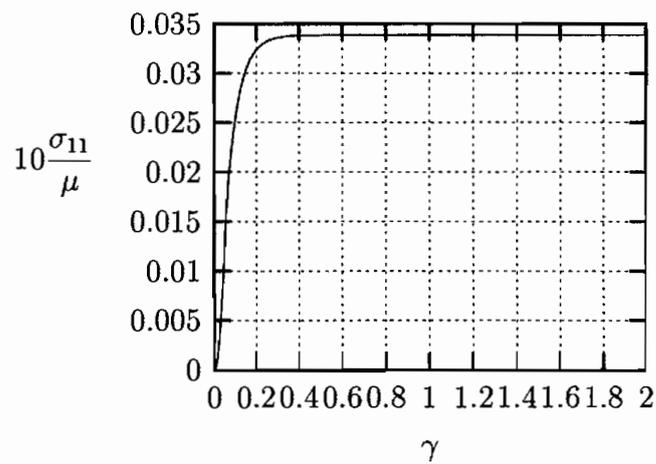
8.4.2 Elastoplastische Beispiele mit und ohne Schädigung

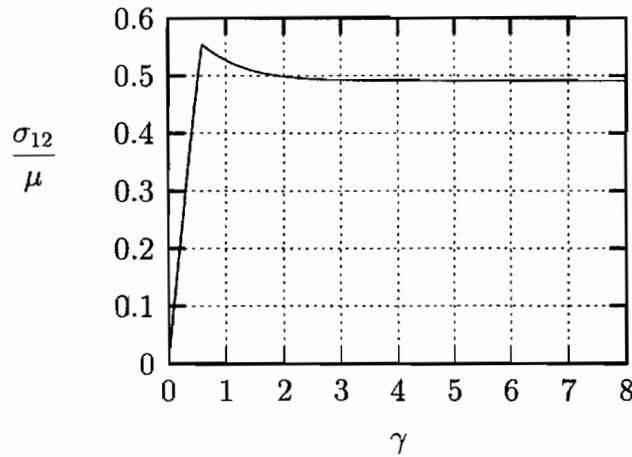
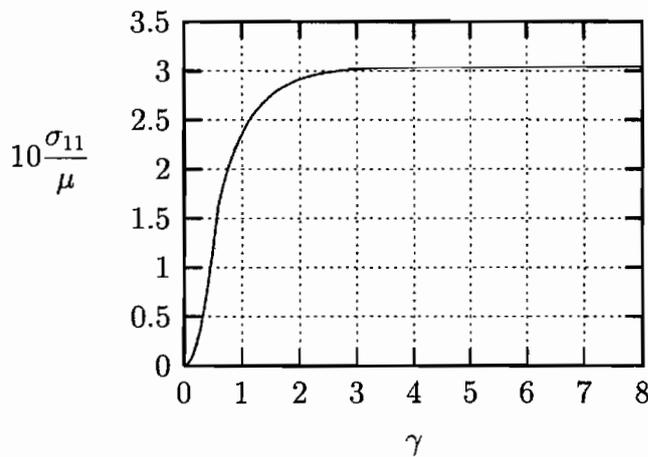
Beispiel 1: Finite Simple Shear

Als erstes elastoplastisches Beispiel wird hier der Scherversuch betrachtet. Nach Perić, Owen & Honnor (1992) wird elastisch-ideal-plastisches Materialverhalten angenommen. Die elastischen Konstanten aus Abbildung 8.2 werden verwendet. Abhängig von der Fließspannung werden zwei Fälle betrachtet.

Für den ersten Fall wird die Anfangsfließspannung als $\pi_0 = 0,1\mu$ gewählt. Um die Endbelastung in Form einer Scherdeformation von $\gamma = 2$ zu erreichen, sind insgesamt 400 Zeitschritte verwendet worden. Die erzielten Ergebnisse in Form von Spannungs-Dehnungs-Kurven sind in den Abbildungen 8.11 und 8.12 angegeben. Die Ergebnisse stimmen gut mit den numerischen Ergebnissen von Perić, Owen & Honnor (1992) überein. Die hier angegebene σ_{12} - γ -Kurve stimmt ebenfalls gut überein mit der Runge-Kutta Lösung von Bruhns, Xiao & Meyers (1999b). Die leichten Änderungen kurz nach dem elastisch-plastischen Übergang in der Spannung σ_{12} werden aber durch die numerische Lösung nicht wiedergegeben, und die σ_{11} - γ -Kurve weicht deshalb von der entsprechenden Kurve in Bruhns, Xiao & Meyers (1999b) ab.

Für den zweiten Fall wird die Anfangsfließspannung als $\pi_0 = \mu$ gewählt. Um die Endbelastung in Form von einer Scherdeformation von $\gamma = 8$ zu erreichen, wurden hier ebenfalls insgesamt 400 Zeitschritte verwendet. Die

Abbildung 8.11: Scherversuch: σ_{12} gegen γ . Elastisch-ideal-plastisches VerhaltenAbbildung 8.12: Scherversuch: σ_{11} gegen γ . Elastisch-ideal-plastisches Verhalten

Abbildung 8.13: Scherversuch: σ_{12} gegen γ . Elastisch-ideal-plastisches VerhaltenAbbildung 8.14: Scherversuch: σ_{11} gegen γ . Elastisch-ideal-plastisches Verhalten

Spannungs-Dehnungs-Kurven sind in den Abbildungen 8.13 und 8.14 angegeben. Der elastisch-plastische Übergang ist durch starke Änderungen in der Scherspannung σ_{12} geprägt, die hier wiedergegeben werden konnten. Die Ergebnisse stimmen gut mit den numerischen Ergebnissen von Perić, Owen & Honnor (1992) und Bruhns, Xiao & Meyers (1999b) überein.

Beispiel 2: Kragbalken

Das nächste Beispiel ist der Kragbalken. Der Balken hat eine Länge von 20 mm eine Höhe von 6 mm und eine Dicke von 1 mm. Der Balken ist am linken Ende eingespannt, und wird belastet, indem am rechten Ende

E	70,000	π_0	0,243
ν	0,200	H_{iso}	0,200

Tabelle 8.8: Kragbalken: Materialparameter

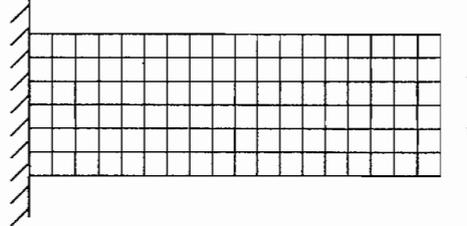
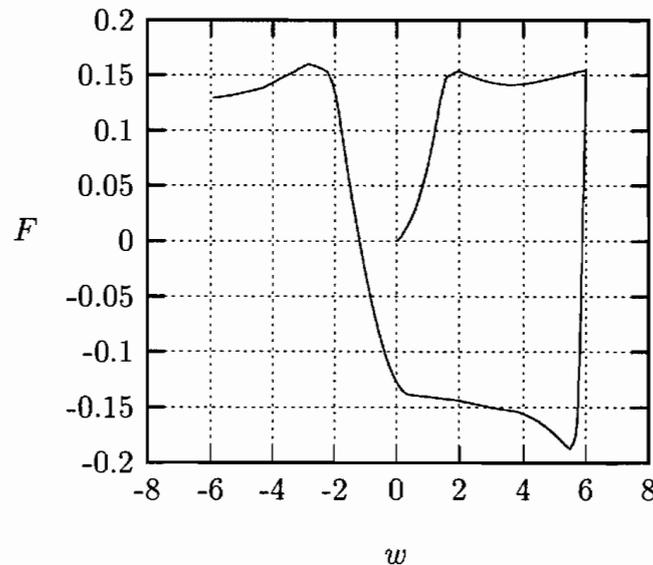


Abbildung 8.15: Kragbalken, plastische Berechnung: Randbedingungen, Diskretisierung

die vertikale Verschiebung zyklisch vorgeschrieben wird. Mit dem Materialmodell von Simo (1992) wurde dieses Problem von Auricchio & Taylor (1999) ebenfalls behandelt. Das verwendete Netz aus 18×6 Elementen und die Materialparameter sind in der Abbildung 8.15 und Tabelle 8.8 angegeben.

Die Kraft-Verschiebungs-Kurve für den rechten, oberen Knoten ist in der Abbildung 8.16 dargestellt. Sie stimmt qualitativ mit der Kurve aus

Abbildung 8.16: Kragbalken: Kraft F gegen die Verschiebung w

Auricchio & Taylor (1999) überein. Um die Belastungsamplitude von 6 mm zu erreichen, wurden insgesamt 250 gleiche Zeitschritte verwendet.

Iteration	Residual Norm	Energy Norm
1	1.6120140E+00	5.6005142E-02
2	2.1857094E-02	5.2952016E-05
3	8.7267394E-03	3.4027211E-06
4	2.2693239E-03	1.1048662E-07
5	1.0694405E-04	2.3411271E-10
6	5.3240565E-07	3.0073779E-15
7	5.6003696E-12	1.4655195E-24

Tabelle 8.9: Kragbalken: Konvergenzverhalten

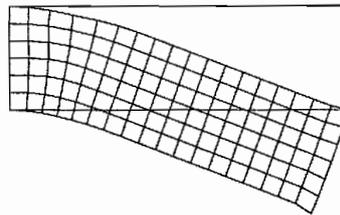


Abbildung 8.17: Kragbalken: verformte Konfiguration

Durchschnittlich wurden 6 Iterationen pro Zeitschritt benötigt. Für dieses Beispiel wurde $tol = 10^{-18}$ gewählt. Das Konvergenzverhalten für einen charakteristischen Zeitschritt ist in Tabelle 8.9 angegeben. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist quadratisch. Abbildung 8.17 zeigt die verformte Konfiguration des Balkens und die großen Deformationen.

Beispiel 3: Zugversuch

Für Elastoplastizität mit Schädigung wird der Zugversuch untersucht. Das patch-test Netz aus Abbildung 8.1 wird verwendet. Die verwendeten Materialparameter sind in der Tabelle 8.10 angegeben. Der Scheibe wird verschiebungsgesteuert eine zyklische Belastung auferlegt. Die Belastung wird in 200-Inkrementen aufgebracht und durchschnittlich wurden sowohl für die Berechnung ohne und mit Schädigung 3 Iterationen pro Lastschritt benötigt.

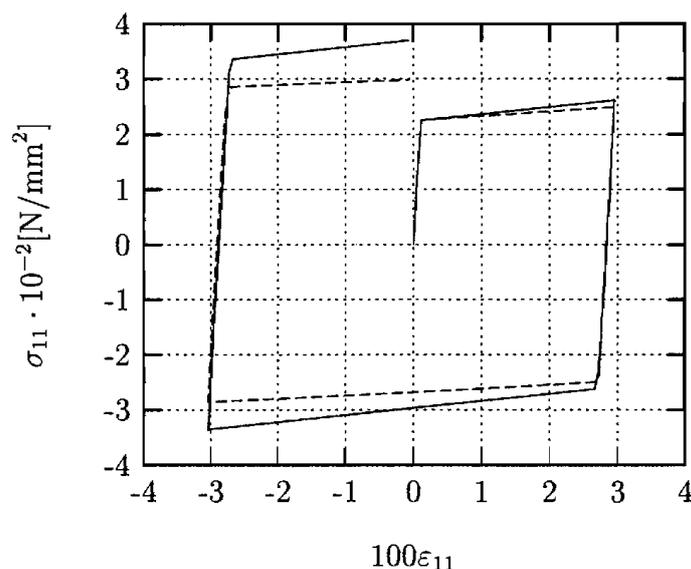
λ	121,154 GPa	π_0	0,225 GPa
μ	80,769 GPa	H_{iso}	0,129 GPa
η_3	$0,100 \cdot 10^{-6}$	β_1	1,000

Tabelle 8.10: Zugversuch: Materialparameter

In Tabelle 8.11 ist für einen typischen Lastschritt die Euklidische Norm

RESIDUAL NORM		
	Elastoplastizität	Schädigung
1	2.9359798E+01	2.9246546E+01
2	3.6420243E+00	1.1711021E-02
3	1.6645463E-02	1.2730670E-09
4	3.7124754E-07	--

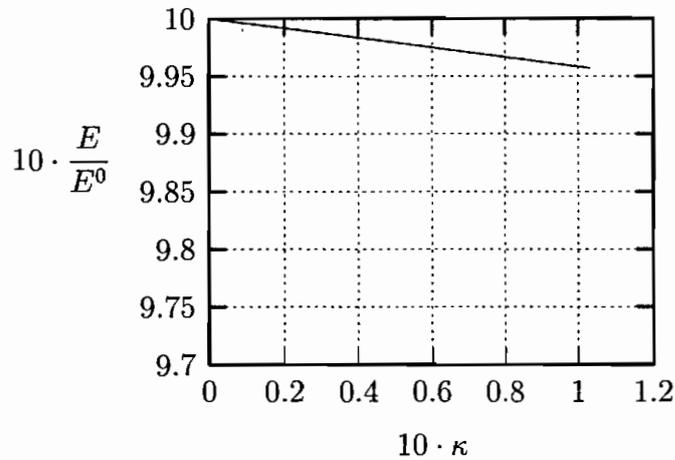
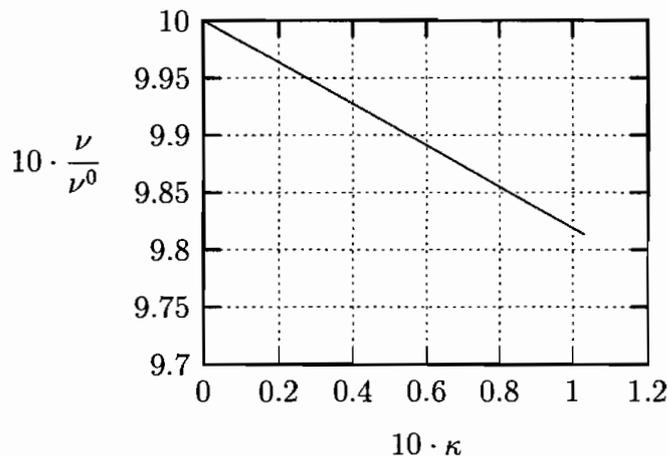
Tabelle 8.11: Zugversuch, plastische Berechnung: Konvergenzverhalten

Abbildung 8.18: Zugversuch: Spannung σ_{11} gegen Dehnung ε_{11}

des Residums für die Berechnung ohne und mit Schädigung angegeben. Für beide Fälle liegt eine quadratische Konvergenzrate vor.

In Abbildung 8.18 sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven angegeben. Die durchgezogene Linie steht für die Berechnung ohne Schädigung und die gebrochene Linie für die Berechnung mit Schädigung. Die Abnahme der Fließspannung aufgrund der Schädigung ist klar ablesbar.

Die Änderung der elastischen Konstanten ist in den Abbildungen 8.19 und 8.20 angegeben. Die Abnahme des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl mit zunehmender Schädigung ist klar erkennbar. Der Unterschied in Steigungen der dargestellten Graphen zeigt die unterschiedliche Entwicklung von Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl unter dem Einfluß der Schädigung. Beim gewählten Satz von Materialparameter ändert sich die Querkontraktionszahl stärker als der Elastizitätsmodul. Die Veränderung von zwei Materialparametern für isotrope Schädigung

Abbildung 8.19: Elastizitätsmodul E gegen inelastische Vergleichsdehnung κ Abbildung 8.20: Querkontraktionszahl ν gegen inelastische Vergleichsdehnung κ

kann also modelliert werden.

Beispiel 4: Lochscheibe

Als letztes elastoplastisches Beispiel ohne und mit Schädigung wird hier die Lochscheibe aus Abbildung 8.5 betrachtet. Den verwendeten Satz von Materialparametern entnimmt man der Tabelle 8.12. Die Berechnung ist mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0,001$ durchgeführt worden.

Die unverformte Konfiguration und die verformte Konfiguration der Scheibe sind in Abbildung 8.21 angegeben. Im Gegensatz zu der verformten Struktur aus der rein elastischen Berechnung in Abbildung 8.6 liegt

E	70,000	π_0	0,243	β_1	0,100
ν	0,200	H_{iso}	0,200		

Tabelle 8.12: Lochscheibe, elastoplastische Berechnung: Materialparameter

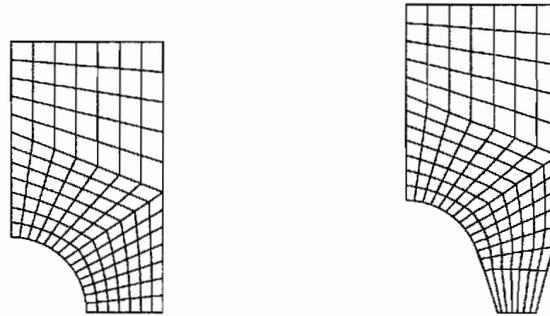
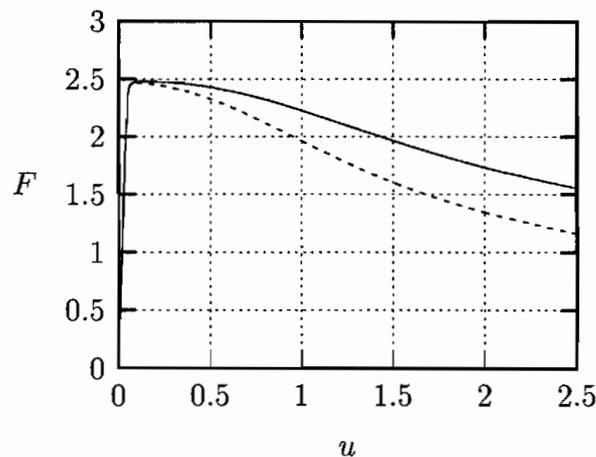


Abbildung 8.21: Lochscheibe, elastoplastische Berechnung: unverformte und verformte Konfiguration

hier keine gleichmäßige Verteilung der Dehnungen mehr vor. Die Knoten zur Innenseite des Loches bewegen sich nach rechts. Die Verformungen an der Lastangriffslinie und am oberen Rand des Loches sind klein und überwiegend elastisch. Die großen inelastischen Dehnungen sind im Mittelquerschnitt der Scheibe konzentriert.

In **Abbildung 8.22** sind die Kraft-Verschiebungs-Kurven an der Lastangriffslinie für die Berechnung ohne und mit Schädigung angegeben. Die

Abbildung 8.22: Lochscheibe, elastoplastische Berechnung: Kraft F gegen die Verschiebung u

durchgezogene Linie steht für die Berechnung ohne Schädigung und die gebrochene Linie für die Berechnung mit Schädigung. Die Entfestigung des Materials aufgrund der Schädigung überträgt sich auf das Strukturverhalten und ist hier deutlich zu erkennen. Die Kurven stimmen qualitativ mit denen aus de Souza Neto, Perić & Owen (1992) überein.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein dreidimensionales anisotropes Schädigungsmodell vorgestellt. Als Schädigungsparameter ist ein symmetrischer, positiv semi-definiter Tensor zweiter Stufe verwendet worden. Für die Entwicklung der inelastischen Verzerrungen und der Verfestigungsvariablen wurden Evolutionsgleichungen vom Typ der assoziierten Plastizität verwendet. Die Evolutionsgleichung für den Schädigungsparameter ist unter Beachtung der oben genannten Eigenschaften postuliert worden. Der vor kurzem von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) vorgestellte Rahmen für die finite Elastoplastizität wurde als Basis verwendet, d. h. die Henckyschen Dehnungsmaße und ihre arbeitskonjugierten Spannungen wurden benutzt. Zur Formulierung von konstitutiven Gesetzen in Ratenform wurde die logarithmische Zeitableitung eingesetzt und sowohl die additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit als auch die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten verwendet.

Es ist gezeigt worden, daß in diesem Rahmen die Diskrepanzen zwischen der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten und der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit verschwinden. Die Invarianzforderung bei einer überlagerten Starrkörperrotation im allgemeinen Sinne wird erfüllt. Der Rahmen ermöglicht eine eindeutige und konsistente Bestimmung des elastischen Anteils und des inelastischen Anteils des Deformationsgradienten und aller mit ihnen zusammenhängenden kinematischen Größen. Auf Komponenten wie z. B. die logarithmische Rate, den logarithmischen Spintensor und die arbeitskonjugierten Spannungen zu den Henckyschen Dehnungsmaßen des verwendeten Rahmens ist ebenfalls eingegangen worden.

Für die vorliegende Arbeit spielte eine doppelte Interpretation des

Schädigungsparameters eine entscheidende Rolle. Dadurch konnte die Schädigungsmodellierung auf die Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen, die Festlegung von Versagenkriterien und die Bestimmung von Materialkonstanten und -funktionen reduziert werden.

Für die thermodynamischen Betrachtungen wurde der Schädigungsparameter als eine interne Zustandsvariable betrachtet. Damit konnten mit der Theorie der "Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen" die konstitutiven Gleichungen hergeleitet und die thermodynamischen Einschränkungen auf die Materialkonstanten und -funktionen angegeben werden. Das elastische konstitutive Gesetz in hyperelastischer Form und die dissipative Ungleichung konnten aus einem Standardverfahren nach Coleman und Noll hergeleitet und die allgemeinen Formen für die Evolutionsgleichungen festgelegt werden.

Zur Modellierung der schädigungsinduzierten Anisotropie wurde der Schädigungsparameter als ein sich mit der Deformation entwickelnder Struktur- oder Materialtensor interpretiert. Dadurch konnten Ergebnisse, die zur Beschreibung von sogenannten stark anisotropen Materialien hergeleitet wurden, direkt für die Schädigungsmodellierung übernommen werden. Aus den Ergebnissen ergaben sich die allgemeine Form des Gibbspotentials und des anisotropen Fließpotentials. Zur Motivation der Interpretation als ein Materialtensor ist ein kurzer Überblick über die Schädigungsmechanik gegeben worden. Dabei wurden das Basismodell von Kachanov sowie dessen Erweiterung auf den dreidimensionalen Spannungszustand mit Hilfe von Effektivspannungs- und Effektivverzerrungskonzepten vorgestellt. Die Schwächen der Modelle, die sich aus diesen Konzepten ergeben, wurden aufgezeigt, und im Rahmen dieser Konzepte wurden alternative Vorschläge gemacht.

Mit Erkenntnissen aus der Mikromechanik wurde sowohl für den Nachgiebigkeitstensor als auch für den Anisotropietensor eine additive Zerlegung in einen isotropen oder ungeschädigten Anteil und einen schädigungsinduzierten Anteil vorgenommen. Dadurch konnten die isotropen Materialparameter festgelegt werden. Mit der dissipativen Ungleichung wurden Schranken für die anisotropen Materialparameter des Nachgiebigkeitstensors bestimmt. Die anisotropen Materialparameter in der Fließbedingung wurden durch eine Anpassung an das mikromechanisch hergeleitete Fließpotential von Gurson festgelegt.

Als Ausgangspunkt für die numerische Umsetzung des Materialmodells wurde die Ratenform des Prinzips der virtuellen Arbeit gewählt. Sie beinhaltet die Lie Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors. Der benötigte Zusammenhang zwischen der Lie Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors und der verwendeten logarithmischen Rate ist hergeleitet worden. Damit konnten für isotropes Verhalten die Materialmoduli, die zur Berechnung des materiellen Anteils der Steifigkeitsmatrix benötigt werden, in geschlossener Form angegeben werden. Um die konstitutiven Gleichungen zu integrieren, wurde die operator-split Methode und als Return-Map-Verfahren wurde der cutting-plane Algorithmus verwendet. Während des elastischen Prädiktorschrittes werden die tensoriellen internen Zustandsvariablen mit der relativen logarithmischen Rotation nach vorne rotiert. Mit Lemma **A** aus der Arbeit von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) konnte eine kinematisch konsistente Integration des Schädigungsmodells sichergestellt werden.

Das Materialmodell wurde in FEAP implementiert. Anhand von numerischen Testbeispielen mit elastischem Materialverhalten konnte die Eignung des elastischen Anteils des Stoffgesetzes für große Formänderungen und die gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit den exakten und numerischen Ergebnissen aus der Literatur gezeigt werden. Für die elastoplastischen Beispiele ohne und mit Schädigung wurde ein Standard Newton-Raphson Verfahren ohne line-search Algorithmen verwendet. Aus Konvergenzgründen sind die Berechnungen mit kleinen Zeitschritten durchgeführt worden. Hier konnte ebenfalls eine gute qualitative Übereinstimmung mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur erzielt werden. Der entfestigende Einfluß der Schädigung auf das Materialverhalten wurde demonstriert, und es konnte gezeigt werden, daß für isotrope Schädigung das vorliegende Materialmodell die Veränderung sowohl des Elastizitätsmoduls als auch der Querkontraktionszahl wiedergeben kann.

Die Implementation des Modells ist nicht abgeschlossen. Nur die isotrope Schädigung ist vollständig implementiert worden. Die Implementation von anisotroper Schädigung soll noch erfolgen. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt vom konsistenten Tangentenmodul ab, der für das Schädigungsmodell nicht in geschlossener Form vorliegt und deshalb momentan numerisch mit der Störungsmethode berechnet wird. Das Konvergenzverhalten des globalen Iterationsverfahrens wird vom Störungsparameter bestimmt, der seinerseits von der Geometrie des Problems, dem Zeitschritt

und den Materialparametern abhängt. Die Wahl des Störungsparameters erfolgt momentan nur durch "Ausprobieren" und es sind deshalb weitere Untersuchungen zur Wahl eines sinnvollen Störungsparameters nötig.

Mit der dissipativen Ungleichung konnten Schranken für einige Materialfunktionen festgelegt werden. Die Festlegung der konkreten Form dieser Funktionen bedarf experimenteller Ergebnisse, die, z. B. für die Materialfunktion in der Evolutionsgleichung für den Schädigungsparameter, die Entwicklung des Porenvolumenanteils mit der Deformation angeben oder, für die Ansatzfreiparameter im komplementären hyperelastischen Potential, die Entwicklung des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl als eine Funktion der inelastischen Deformation angeben. Die experimentellen Verfahren, die hier in Frage kommen, sind u. a. die Mikrotomographie, die Messung der akustischen Schallemission, Ultraschall und das Anfertigen und Auswerten von Schliffbildern. Liegen experimentelle Ergebnisse vor, kann eine Weiterentwicklung des Stoffgesetzes mit der Festlegung der Materialfunktionen beginnen. Das Modell beschränkt sich auf die sogenannte Entstehungs- und Wachstumsphase einer Lebensdauerberechnung. Eine mögliche Erweiterung der Modellierung besteht deshalb in der Einbeziehung der Makrodefektphase.

Anhang A

Log-Spin und Log-Rate

Ein beliebiger Eulerscher Spintensor, d. h. ein räumlicher, zeitabhängiger und antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe, wird hier mit Ω bezeichnet. Die durch Ω definierte mitrotierende Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ eines räumlichen Tensors \mathbf{G} lautet

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G}\Omega - \Omega\mathbf{G}. \quad (\text{A.1})$$

Der Tensor \mathbf{e} sei ein beliebiger, symmetrischer, isotroper, objektiver Eulerscher Verzerrungstensor. Im folgenden sollen zwei Fragen beantwortet werden:

1. Gibt es einen Eulerschen Verzerrungstensor \mathbf{e} , dessen mitrotierende Zeitableitung $\overset{\circ}{\mathbf{e}}$ genau die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ergibt? Für welchen Tensor \mathbf{e} gilt

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \mathbf{D}, \quad (\text{A.2})$$

d. h.

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}\Omega - \Omega\mathbf{e} = \mathbf{D} \quad (\text{A.3})$$

und

2. welchen Spintensor Ω muß man zur Erzielung dieses Ergebnisses – d. h. für die Gültigkeit von $\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \mathbf{D}$ – verwenden?

Mit Hilfe von Eigenprojektionen haben Reinhardt & Dubey (1996, 1998) und Xiao, Bruhns & Meyers diese Fragen in ihren Arbeiten beantwortet. Hier sollen die Ergebnisse der Vollständigkeit halber in einer verkürzten Form wiedergegeben werden, siehe auch Meyers (1999).

Ausgangspunkt der Herleitungen hier sind die folgenden Spektraldarstellungen des linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{B} und des Verzerrungstensors \mathbf{e} :

$$\mathbf{B} = \sum_{\sigma=1}^n \chi_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{e} = \sum_{\sigma=1}^n g(\chi_{\sigma}) \mathbf{B}_{\sigma}. \quad (\text{A.5})$$

Hier bezeichnen χ_{σ} , $\sigma = 1, \dots, n$, die Eigenwerte von \mathbf{B} , \mathbf{B}_{σ} die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen, n kennzeichnet die Anzahl ungleicher Eigenwerte und $g(\chi_{\sigma})$ die Skalierungsfunktion. Der folgende Zusammenhang besteht zwischen g und der durch Gleichung (2.65) definierten Skalierungsfunktion f :

$$g(\chi_{\sigma}) = f(\sqrt{\chi_{\sigma}}). \quad (\text{A.6})$$

Von den folgenden Eigenschaften von Eigenprojektionen wird Gebrauch gemacht:

$$\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\beta} \quad (\text{keine Summation}), \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_{\alpha} = \mathbf{1}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B} = \chi_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{e}^{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} = \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{e}^{\alpha} = g(\chi_{\alpha})^{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (\text{A.10})$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das Kroneckerdelta bezeichnet und $\mathbf{1}$ den Einheitstensor zweiter Stufe, siehe Bowen & Wang (1976, Section 27) und die Arbeiten von Xiao, Bruhns & Meyers.

Mit Hilfe von (A.7) und (A.10) folgt aus (A.3) die Beziehung

$$\mathbf{B}_{\alpha} (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{B}_{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.11})$$

Für die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{e}}$ von \mathbf{e} gilt

$$\dot{\mathbf{e}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_{\beta}, \quad (\text{A.12})$$

wobei

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} g'(\chi_{\alpha}) & \text{für } \alpha = \beta, \\ \frac{g(\chi_{\alpha}) - g(\chi_{\beta})}{\chi_{\alpha} - \chi_{\beta}} & \text{für } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Der Beweis von (A.12) ist wie folgt: Die Eigenprojektion \mathbf{B}_{σ} ist zeitabhängig. \mathbf{E}_{σ} sei eine zeitunabhängige Eigenprojektion und $\mathbf{Q} \in SO_3$ ein zeitabhängiger Drehtensor, der \mathbf{E}_{σ} auf \mathbf{B}_{σ} abbildet. Es gilt also

$$\mathbf{B}_{\sigma} = \mathbf{Q} \star \mathbf{E}_{\sigma} \quad (\text{A.14})$$

und

$$\dot{\mathbf{B}}_{\sigma} = \Omega \mathbf{B}_{\sigma} - \mathbf{B}_{\sigma} \Omega, \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.16})$$

Damit erhält man für die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{B}}$ von \mathbf{B} und $\dot{\mathbf{e}}$ von \mathbf{e} die folgenden Beziehungen:

$$\dot{\mathbf{B}} = \sum_{\sigma=1}^n \dot{\chi}_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} + \mathbf{\Omega}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{\Omega}, \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \sum_{\sigma=1}^n g'(\chi_{\sigma}) \dot{\chi}_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} + \mathbf{\Omega}\mathbf{e} - \mathbf{e}\mathbf{\Omega}. \quad (\text{A.18})$$

Werden (A.17) und (A.18) von links mit \mathbf{B}_{α} und von rechts mit \mathbf{B}_{β} multipliziert, folgen mit Hilfe von (A.7) und (A.9) die Gleichungen

$$\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{\beta} - \dot{\chi}_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta} = \chi_{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{\Omega}\mathbf{B}_{\beta}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{e}}\mathbf{B}_{\beta} - g'(\chi_{\alpha}) \dot{\chi}_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta} = n_{\alpha\beta} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{\Omega}\mathbf{B}_{\beta}, \quad (\text{A.20})$$

wobei hier die Notation

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha} - \chi_{\beta} \quad (\text{A.21})$$

und

$$n_{\alpha\beta} = g(\chi_{\alpha}) - g(\chi_{\beta}) \quad (\text{A.22})$$

verwendet wird. Gleichung (A.19) wird wie folgt aufgelöst

$$\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{\Omega}\mathbf{B}_{\beta} = \frac{1}{\chi_{\alpha\beta}} \left(\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{\beta} - \dot{\chi}_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta} \right). \quad (\text{A.23})$$

Setzt man die rechte Seite von (A.23) für $\mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{\Omega}\mathbf{B}_{\beta}$ in (A.20) ein, nimmt sie die folgende Form an:

$$\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{e}}\mathbf{B}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \left(\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{\beta} - \dot{\chi}_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta} \right) + g'(\chi_{\alpha}) \dot{\chi}_{\alpha} \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{B}_{\beta}. \quad (\text{A.24})$$

Eine Doppelsummutation über α und β unter Beachtung von (A.7) und (A.8) ergibt dann die Gleichung (A.12). Ende des Beweises.

Aus (A.12) folgt

$$\mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{e}}\mathbf{B}_{\alpha} = g'(\chi_{\alpha}) \mathbf{B}_{\alpha} \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}_{\alpha} \quad (\text{A.25})$$

und aus $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{B}\mathbf{L}^T + \mathbf{L}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

wobei \mathbf{D} die Verzerrungsgeschwindigkeit bezeichnet und \mathbf{W} den Drehgeschwindigkeits-tensor. Wenn man Gleichung (A.26) von links und rechts mit \mathbf{B}_α multipliziert und Gleichung (A.7) beachtet, erhält man die folgende Beziehung:

$$\mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\alpha = 2 \chi_\alpha \mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{D}} \mathbf{B}_\alpha. \quad (\text{A.27})$$

Mit Gleichung (A.25) und (A.27) folgt aus (A.11) die Beziehung

$$(2 \chi_\alpha g'(\chi_\alpha) - 1) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\alpha = \mathbf{0}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (\text{A.28})$$

Da \mathbf{D} beliebig ist, folgt daraus die folgende Differentialgleichung für die Skalierungsfunktion g :

$$g'(\chi) = \frac{1}{2} \chi^{-1} \quad (\text{A.29})$$

mit den Anfangsbedingungen

$$g(1) = 2g'(1) - 1 = 0. \quad (\text{A.30})$$

Integration ergibt dann

$$g(\chi) = \frac{1}{2} \ln \chi \quad (\text{A.31})$$

bzw.

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}. \quad (\text{A.32})$$

Es kann deshalb geschlossen werden, daß als notwendige Bedingung für die Erfüllung der Gleichung (A.2) bzw. (A.3) das Eulersche Verzerrungsmaß \mathbf{e} der Henckysche Verzerrungstensor \mathbf{h} sein muß.

Jetzt wird gezeigt, daß die mitrotierende Zeitableitung von \mathbf{h} die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} ergibt. Es soll also bewiesen werden, daß der Spintensor

$$\Omega^{\text{Log}} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{B}_\alpha (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{B}_\beta \quad (\text{A.33})$$

die Gleichung (A.2) bzw. (A.3) für $\mathbf{e} = \mathbf{h}$ erfüllt. Hier und im folgenden bedeutet die Notation $\sum_{\sigma \neq \tau}^n$ die Summe für $\sigma, \tau = 1, \dots, n$ und $\sigma \neq \tau$, und es wird angenommen, daß für $n = 1$ diese Summe verschwindet. Es wird hier nur ein formaler Beweis gegeben. Für einen strengeren bzw. rigoroseren Beweis wird auf Xiao (1995) und die Arbeiten von Xiao, Bruhns & Meyers verwiesen. Die Vorgehensweise ist demzufolge wie folgt: Der Spintensor Ω^{Log} aus (A.33) und \mathbf{h} werden in die rechte Seite der letzten Beziehung eingesetzt, und durch einfaches Auswerten soll gezeigt werden, daß die linke Seite der rechten Seite entspricht. Dafür wird Gleichung (A.3) in die Form

$$\mathbf{h} \Omega^{\text{Log}} - \Omega^{\text{Log}} \mathbf{h} = \mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}} \quad (\text{A.34})$$

umgeschrieben. Mit (A.33) und (A.22) und Hilfe von (A.7) und (A.10) gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}\Omega^{\text{Log}} - \Omega^{\text{Log}}\mathbf{h} &= \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} [(\mathbf{h}\mathbf{B}_\alpha)(\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}})\mathbf{B}_\beta - \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}})(\mathbf{h}\mathbf{B}_\beta)] \\
&= \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} n_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{B}_\beta \\
&= \sum_{\alpha \neq \beta}^n \mathbf{B}_\alpha (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{B}_\beta \\
&= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \mathbf{B}_\alpha (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{B}_\beta, \tag{A.35}
\end{aligned}$$

wobei zur Herleitung von (A.35) die Bedingung (A.11) verwendet wurde. Mit Hilfe der Beziehung (A.8) gilt

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n \mathbf{B}_\alpha (\mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{B}_\beta = \mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}} \tag{A.36}$$

bzw.

$$\mathbf{h}\Omega^{\text{Log}} - \Omega^{\text{Log}}\mathbf{h} = \mathbf{D} - \dot{\mathbf{h}}. \tag{A.37}$$

Daraus folgt, daß die Bedingung (A.3) für $\mathbf{e} = \mathbf{h}$ und $\Omega = \Omega^{\text{Log}}$ erfüllt wird, d. h. die mitrotierende Zeitableitung des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors \mathbf{h} ergibt die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} , und daß man zur Bildung dieser Zeitableitung den logarithmischen Spin Ω^{Log} verwenden muß. Im folgenden wird eine basisfreie Darstellung für den Log-Spin als eine Funktion von \mathbf{D} , \mathbf{W} und \mathbf{B} hergeleitet.

Setzt man den Ausdruck für $\mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{h}} \mathbf{B}_\beta$ aus Gleichung (A.24) unter Beachtung von (A.7) in die Beziehung (A.33) für den Log-Spin ein, erhält man die Gleichung

$$\Omega^{\text{Log}} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta - \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} g_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\beta. \tag{A.38}$$

Wenn man Gleichung (A.26) von links mit \mathbf{B}_α und rechts mit \mathbf{B}_β multipliziert und Gleichung (A.7) beachtet, erhält man die folgende Beziehung:

$$\mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta (\chi_\alpha + \chi_\beta) - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\beta (\chi_\alpha - \chi_\beta). \tag{A.39}$$

Im Ausdruck für Ω^{Log} wird das Produkt $\mathbf{B}_\alpha \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}_\beta$ durch die linke Seite der letzten Beziehung ersetzt und man erhält

$$\Omega^{\text{Log}} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta}^n n_{\alpha\beta}^{-1} \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta - \sum_{\alpha \neq \beta}^n \left[\frac{\chi_\alpha + \chi_\beta}{\chi_{\alpha\beta}} \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta + \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\beta \right]. \tag{A.40}$$

Unter Beachtung von

$$\mathbf{W} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta}^n \mathbf{B}_\alpha \mathbf{W} \mathbf{B}_\beta, \tag{A.41}$$

Gleichung (A.13), (A.21) und (A.22) folgt

$$\Omega^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \sum_{\alpha \neq \beta}^n \left(\frac{\chi_\alpha + \chi_\beta}{\chi_\beta - \chi_\alpha} + \frac{1}{g(\chi_\alpha) - g(\chi_\beta)} \right) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta \quad (\text{A.42})$$

bzw. mit (A.31)

$$\Omega^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \sum_{\alpha \neq \beta}^n \left(\frac{1 + (\chi_\alpha/\chi_\beta)}{1 - (\chi_\alpha/\chi_\beta)} + \frac{2}{\ln(\chi_\alpha/\chi_\beta)} \right) \mathbf{B}_\alpha \mathbf{D} \mathbf{B}_\beta. \quad (\text{A.43})$$

Die Eigenprojektionen \mathbf{B}_σ werden aus der Sylvesterformel

$$\mathbf{B}_\alpha = \delta_{n1} \mathbf{1} + \prod_{\beta \neq \alpha}^n \frac{\mathbf{B} - \chi_\beta \mathbf{1}}{\chi_\alpha - \chi_\beta} \quad (\text{A.44})$$

berechnet. Für $n = 1$ verschwindet das durch $\prod_{\sigma \neq \tau}^n$ gekennzeichnete Produkt, siehe Bowen & Wang (1976, Seite 144). Ausgeschrieben ergeben sich für $n = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{1}, \quad (\text{A.45})$$

für $n = 2$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} (\mathbf{B} - \chi_2 \mathbf{1}) \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1} (\mathbf{B} - \chi_1 \mathbf{1})$$

und für $n = 3$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\chi_3 - \chi_2}{\Delta} [\mathbf{B}^2 - (\chi_2 + \chi_3) \mathbf{B} + \chi_2 \chi_3 \mathbf{1}]$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\chi_1 - \chi_3}{\Delta} [\mathbf{B}^2 - (\chi_1 + \chi_3) \mathbf{B} + \chi_1 \chi_3 \mathbf{1}], \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\chi_2 - \chi_1}{\Delta} [\mathbf{B}^2 - (\chi_1 + \chi_2) \mathbf{B} + \chi_1 \chi_2 \mathbf{1}]$$

mit

$$\Delta = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1). \quad (\text{A.48})$$

Damit erhält man aus (A.43) die folgende basisfreie Formel für den Log-Spin als Funktion von \mathbf{D} , \mathbf{W} und \mathbf{B} :

$$\Omega^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{\text{Log}} \quad (\text{A.49})$$

mit

$$\mathbf{N}^{\text{Log}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \\ \nu[\mathbf{B}\mathbf{D}], & \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \\ \nu_1[\mathbf{B}\mathbf{D}] + \nu_2[\mathbf{B}^2\mathbf{D}] + \nu_3[\mathbf{B}^2\mathbf{D}\mathbf{B}], & \chi_1 \neq \chi_2 \neq \chi_3 \neq \chi_1, \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

$$\nu = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2} \left(\frac{1 + \chi_1/\chi_2}{1 - \chi_1/\chi_2} + \frac{2}{\ln(\chi_1/\chi_2)} \right), \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{cases} \nu_k = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^3 (-\chi_i)^{3-k} \left(\frac{1+\epsilon_i}{1-\epsilon_i} + \frac{2}{\ln \epsilon_i} \right), & k = 1, 2, 3 \\ \epsilon_1 = \chi_2/\chi_3, \epsilon_2 = \chi_3/\chi_1, \epsilon_3 = \chi_1/\chi_2. \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

Es wird die Notation

$$[\mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s] = \mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s - \mathbf{B}^s \mathbf{D} \mathbf{B}^r \quad (\text{A.53})$$

für $r, s = 0, 1, 2$ verwendet. Zur Berechnung von χ_i wird die folgende Beziehung verwendet

$$\begin{cases} \chi_i = \frac{1}{3} \left(I_1 + 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \cos \frac{1}{3}(\varphi - 2\pi i) \right) \\ \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

$I_1, I_2,$ und I_3 sind die Hauptinvarianten von \mathbf{B} . Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} N_{ij}^{\text{Log}} &= \nu(B_{iq} D_{qj} - D_{iq} B_{qj}) \\ &= \nu(B_{iq} \delta_{qk} \delta_{jl} - \delta_{ik} \delta_{ql} B_{qj}) D_{kl} \\ &= \mathbb{B}_{ijkl} D_{kl}, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

mit

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \nu(B_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}). \quad (\text{A.56})$$

Analog erhält man für $n = 3$

$$N_{ij}^{\text{Log}} = \mathbb{B}_{ijkl} D_{kl}, \quad (\text{A.57})$$

mit

$$\mathbb{B}_{ijkl} = \nu_3(B_{ik}^2 B_{jl} - B_{ik} B_{jl}^2) + \nu_2(B_{ik}^2 \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}^2) + \nu_1(B_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} B_{jl}). \quad (\text{A.58})$$

Anhang B

Kinematische Konsistenz und Objektivität

Die multiplikative Zerlegung (2.86) des Deformationsgradienten ist nur bis auf eine beliebige Rotation der Zwischenkonfiguration eindeutig. Um Eindeutigkeit zu erreichen, wird deshalb meistens davon ausgegangen, daß der elastische Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten ein symmetrisch und positiv definiten Tensor ist, $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e$, d. h. , \mathbf{F}^e wird als eine reine Streckung angenommen, und die Rotation wird außer acht gelassen. Casey & Naghdi (1981) und Naghdi (1990) haben gezeigt, daß diese Annahme die Invarianzforderung bei einer Beobachtertransformation im allgemeinen Sinne verletzt und ein solches Modell stark einschränkt.

Nach der Arbeit von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) soll im folgenden gezeigt werden, daß der in dieser Arbeit verwendete Rahmen für finite Elastoplastizität kinematisch konsistent ist, d. h. daß der elastische Anteil \mathbf{F}^e des Deformationsgradienten und der inelastische Anteil \mathbf{F}^i und alle mit ihnen (\mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i) zusammenhängenden kinematischen Größen konsistent und eindeutig bestimmt werden können. Es soll außerdem gezeigt werden, daß in diesem Rahmen die Invarianzforderung bei einer Beobachtertransformation im allgemeinen Sinne erfüllt werden kann.

B.1 Kinematische Konsistenz

Die konstitutiven Beziehungen (6.63), (7.62) (7.72), (7.73) und (7.79) zusammen mit den Cauchyschen Bewegungsgleichungen und gut gestellten Anfangs- und Randbedingungen bestimmen die Spannung $\boldsymbol{\pi}$, den gesamten Deformationsgradienten \mathbf{F} , den Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} und den elastischen Anteil \mathbf{D}^e und den elastisch-inelastischen \mathbf{D}^{ei} der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} . Bei einem Deformationsprozeß mit elastischer und inelastischer Formänderung ist es erforderlich, die elastischen und plastischen Anteile der Deformation festzulegen. Man beachte, daß ohne eine a priori Zerlegung der Bewegung in elastische und inelastische Anteile anhand von \mathbf{D}^e und \mathbf{D}^{ei} allein nicht entschieden werden kann, welche Anteile der Deformation den inelastischen Formänderungen zuzuordnen sind.

Eine Trennung der gesamten Deformation in elastische und inelastische Anteile erhält man aus der multiplikativen Zerlegung (2.86). Mit der Definition der Verzerrungsge-

schwindigkeit nach Gleichung (2.104) und der dort eingeführten additiven Aufteilung von \mathbf{D} wird eine natürliche und direkte Beziehung zwischen der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.86) und einer additiven Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit (6.60) geschaffen.

Aus der Ratenform des elastischen Stoffgesetzes (6.63), der Gleichung (A.25) und der Formel

$$\mathbf{B}_\sigma^e(\ln \mathbf{V}^e) = (\ln \mathbf{V}^e)\mathbf{B}_\sigma^e = (\ln \lambda_\sigma^e)\mathbf{B}_\sigma^e \quad (\text{B.1})$$

kann die folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$\sum_{\sigma=1}^n \mathbf{B}_\sigma^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_\sigma^e = \sum_{\sigma=1}^n \mathbf{B}_\sigma^e \overline{(\ln \dot{\mathbf{V}}^e)} \mathbf{B}_\sigma^e = \sum_{\sigma=1}^n \lambda_\sigma^{-e} \mathbf{B}_\sigma^e \dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{B}_\sigma^e, \quad (\text{B.2})$$

wobei hier λ_σ^e , $\sigma = 1, \dots, n$, die Eigenwerte von \mathbf{V}^e bezeichnen und \mathbf{B}_σ^e die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen. Nach Gleichung (B.2) genügen also der positiv definite symmetrische Tensor \mathbf{V}^e und der symmetrische Tensor \mathbf{D}^e der Konsistenzbedingung (23) in Xiao, Bruhns & Meyers (2000a). Der elastische Anteil $\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e$ des Deformationsgradienten kann deshalb mit Hilfe von Lemma A aus Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) bei vorgegebenen Anfangsbedingungen eindeutig durch \mathbf{V}^e und \mathbf{D}^e festlegt werden: \mathbf{V}^e ergibt sich aus dem elastischen Stoffgesetz (6.32) zu

$$\mathbf{V}^e = \exp(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi}) \quad (\text{B.3})$$

und die elastische Rotation \mathbf{R}^e aus der Integration der linearen tensoriellen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}^e = \boldsymbol{\Omega}^e \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{R}^e|_{t=0} = \mathbf{1} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$\boldsymbol{\Omega}^e = \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{2 \lambda_\sigma^e \lambda_\tau^e}{\lambda_\tau^{e2} - \lambda_\sigma^{e2}} \mathbf{B}_\sigma^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_\tau^e - (\lambda_\sigma^e - \lambda_\tau^e)^{-1} \mathbf{B}_\sigma^e \dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{B}_\tau^e \right). \quad (\text{B.5})$$

Die Notation $\sum_{\sigma \neq \tau}^n$ bedeutet, daß die Summation für $\sigma = \tau$ verschwindet. Aus Gleichung (A.12) folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}^e &= \sum_{\sigma, \tau=1}^n \frac{\lambda_\sigma^e - \lambda_\tau^e}{\ln \lambda_\sigma^e - \ln \lambda_\tau^e} \mathbf{B}_\sigma^e \overline{(\ln \dot{\mathbf{V}}^e)} \mathbf{B}_\tau^e \\ &= \sum_{\sigma, \tau=1}^n \frac{\lambda_\sigma^e - \lambda_\tau^e}{\ln \lambda_\sigma^e - \ln \lambda_\tau^e} \mathbf{B}_\sigma^e (\mathbf{D}^e - \mathbf{h}^e \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} + \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} \mathbf{h}^e) \\ &= \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} \mathbf{V}^e - \mathbf{V}^e \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} + \sum_{\sigma, \tau=1}^n \frac{\lambda_\sigma^e - \lambda_\tau^e}{\ln \lambda_\sigma^e - \ln \lambda_\tau^e} \mathbf{B}_\sigma^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_\tau^e, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

und mit Gleichung (B.6) kann $\boldsymbol{\Omega}^e$ (eine basisfreie Darstellung wird am Ende dieses Abschnittes angegeben) in der folgenden Form angegeben werden:

$$\boldsymbol{\Omega}^e = \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{2 \lambda_\sigma^e \lambda_\tau^e}{\lambda_\tau^{e2} - \lambda_\sigma^{e2}} + \frac{1}{\ln \lambda_\sigma^e - \ln \lambda_\tau^e} \right) \mathbf{B}_\sigma^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_\tau^e. \quad (\text{B.7})$$

Aus Gleichung (B.7) und (2.128) folgt, daß für rein elastische Formänderungen aus Ω^e der Polar-Spin Ω^R wird, da der elastische Strecktensor \mathbf{V}^e und der Rotationstensor \mathbf{R}^e der gesamte Strecktensor \mathbf{V} und der Rotationstensor \mathbf{R} sind. Da \mathbf{F}^e jetzt eine bekannte Größe ist, kann aus

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{-e} \mathbf{F} \quad (\text{B.8})$$

der inelastische Anteil \mathbf{F}^i des Deformationsgradienten bestimmt werden. Damit können alle kinematischen Größen, wie \mathbf{L}^e , \mathbf{L}^i usw., der multiplikativen Zerlegung eindeutig bestimmt werden:

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{-e} = \mathbf{D}^e + \mathbf{W}^e, \quad (\text{B.9})$$

wobei \mathbf{D}^e durch die Gleichung (6.63) festgelegt wird und \mathbf{W}^e sich aus der folgenden Gleichung ergibt:

$$\mathbf{W}^e = \text{skw}(\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{-e}) = \text{skw}(\dot{\mathbf{V}}^e \mathbf{V}^{-e} + \mathbf{V}^e \Omega^e \mathbf{V}^{-e}), \quad (\text{B.10})$$

wobei die Größen \mathbf{V}^e , $\dot{\mathbf{V}}^e$ und Ω^e durch die Gleichungen (B.3), (B.6) und (B.7) schon bekannt sind. Hier und im folgenden bezeichnet $\text{sym}(\bullet)$ bzw. $\text{skw}(\bullet)$ den symmetrischen bzw. antimetrischen Anteil des Tensors (\bullet) . Mit der bekannten Größen \mathbf{L} , \mathbf{F}^e und \mathbf{L}^e kann \mathbf{L}^i berechnet werden:

$$\mathbf{L}^i = \mathbf{F}^{-e} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^e) \mathbf{F}^e = \mathbf{F}^{-e} (\mathbf{L} - \mathbf{D}^e - \mathbf{W}^e) \mathbf{F}^e. \quad (\text{B.11})$$

Daraus folgen

$$\mathbf{D}^i = \text{sym}(\mathbf{L}^i) = \text{sym}(\mathbf{F}^{-e} (\mathbf{L} - \mathbf{D}^e - \mathbf{W}^e) \mathbf{F}^e), \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{W}^i = \text{skw}(\mathbf{L}^i) = \text{skw}(\mathbf{F}^{-e} (\mathbf{L} - \mathbf{D}^e - \mathbf{W}^e) \mathbf{F}^e). \quad (\text{B.13})$$

Man beachte, daß die Fließregel für die elastisch-inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^{ei} angegeben wurde.

Aus diesen Ausführungen folgt, daß der hier verwendete Rahmen für Elastoplastizität nach Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) also eine eindeutige und konsistente Bestimmung der elastischen Deformation \mathbf{F}^e und der inelastischen Deformation \mathbf{F}^i und allen mit \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i zusammenhängenden kinematischen Größen ermöglicht.

Mit Hilfe von Sylvesters Formel (2.57) kann aus (B.7) die folgende basisfreie Darstellung für den elastischen Spin Ω^e als Funktion von \mathbf{D}^e , \mathbf{D} , \mathbf{W} , \mathbf{B}^e und \mathbf{B} hergeleitet werden:

$$\Omega^e = \Omega^{\text{Log}} - \mathbf{N}^e \quad (\text{B.14})$$

mit

$$\mathbf{N}^e = \begin{cases} \mathbf{0}, & \chi_1^e = \chi_2^e = \chi_3^e \\ \nu^e [\mathbf{B}^e \mathbf{D}^e], & \chi_1^e \neq \chi_2^e = \chi_3^e \\ \nu_1^e [\mathbf{B}^e \mathbf{D}^e] + \nu_2^e [(\mathbf{B}^e)^2 \mathbf{D}^e] + \nu_3^e [(\mathbf{B}^e)^2 \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e], & \chi_1^e \neq \chi_2^e \neq \chi_3^e \neq \chi_1^e, \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

$$\nu^e = \frac{1}{\chi_1^e - \chi_2^e} \left(\frac{2 \lambda_1^e \lambda_2^e}{\lambda_2^{e2} - \lambda_1^{e2}} + \frac{1}{\ln \lambda_1^e - \ln \lambda_2^e} \right), \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{cases} \nu_k^e = -\frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^3 (-\chi_i^e)^{3-k} \left(\frac{2z_i^e}{s_i^e} + \frac{1}{\ln \epsilon_i^e} \right), & k = 1, 2, 3 \\ \epsilon_1^e = \lambda_2^e/\lambda_3^e, \epsilon_2^e = \lambda_3^e/\lambda_1^e, \epsilon_3^e = \lambda_1^e/\lambda_2^e, \\ s_1^e = \lambda_2^{e2} - \lambda_3^{e2}, s_2^e = \lambda_3^{e2} - \lambda_1^{e2}, s_3^e = \lambda_1^{e2} - \lambda_2^{e2} \\ z_1^e = \lambda_2^e \lambda_3^e, z_2^e = \lambda_3^e \lambda_1^e, z_3^e = \lambda_1^e \lambda_2^e, \\ \Delta = (\lambda_1^e - \lambda_2^e)(\lambda_2^e - \lambda_3^e)(\lambda_3^e - \lambda_1^e), \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

wobei hier die Notation

$$[(\mathbf{B}^e)^r \mathbf{D}^e (\mathbf{B}^e)^s] = (\mathbf{B}^e)^r \mathbf{D}^e (\mathbf{B}^e)^s - (\mathbf{B}^e)^s \mathbf{D}^e (\mathbf{B}^e)^r \quad (\text{B.18})$$

für $r, s = 0, 1, 2$ verwendet wird.

B.2 Objektivität im allgemeinen Sinne

Um zu zeigen, daß man in diesem Rahmen auch die Invarianzforderung im allgemeinen Sinne erfüllen kann, wird die durch Gleichung (2.2) gegebene Beobachtertransformation betrachtet. In dem Bezugssystem \mathcal{O}^* soll sich außerdem die Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}^*$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durch eine Rotation $\bar{\mathbf{Q}}$ von der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0^* unterscheiden. Es gilt also

$$\mathbf{F}^{e*}|_{t=0} = \mathbf{Q}|_{t=0} \bar{\mathbf{Q}}^T, \quad \mathbf{F}^{i*}|_{t=0} = \bar{\mathbf{Q}}, \quad (\text{B.19})$$

und die Differentialgleichung und Anfangsbedingung (B.4) für die elastische Rotation nehmen die Formen

$$\dot{\mathbf{R}}^{e*} = \boldsymbol{\Omega}^e \mathbf{R}^{e*}, \quad \mathbf{R}^{e*}|_{t=0} = \mathbf{Q}|_{t=0} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (\text{B.20})$$

an. Der Gradient $(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})$ ergibt den elastischen Anteil \mathbf{h}^e des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors \mathbf{h} . Da \mathbf{h}^e objektiv ist, ist der Gradient $(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})$ auch objektiv (siehe Lemma **B** in Xiao, Bruhns & Meyers (2000a)). Daraus folgt, daß seine logarithmische Zeitableitung auch objektiv ist. Damit und mit (6.63) und (B.3) erhält man

$$\mathbf{D}^{e*} = \mathbf{Q} \star \mathbf{D}^e, \quad \mathbf{V}^{e*} = \mathbf{Q} \star \mathbf{V}^e. \quad (\text{B.21})$$

Aus (2.42)₂, (2.99), (2.100) und (2.121) folgt die Transformationsbeziehung

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}*} = \mathbf{Q} \star \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (\text{B.22})$$

für den Log-Spin. Aus Gleichung (B.7), (B.21) und (B.22) folgt

$$\boldsymbol{\Omega}^{e*} = \mathbf{Q} \star \boldsymbol{\Omega}^e + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T. \quad (\text{B.23})$$

Aus einem Vergleich der Beziehungen (B.20) und (B.23) mit (B.4) kann man

$$\dot{\mathbf{R}}^{e*} = \mathbf{Q} \mathbf{R}^e \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (\text{B.24})$$

gewinnen. Gleichung (B.21)₂ und (B.24) ergeben

$$\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{V}^{e*} \mathbf{R}^{e*} = \mathbf{Q} \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{Q}}^T, \quad (\text{B.25})$$

und damit folgt aus (B.8)

$$\mathbf{F}^{i*} = (\mathbf{F}^{e*})^{-1} \mathbf{F}^* = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^i. \quad (\text{B.26})$$

Gleichungen (B.25) und (B.26) sind genau die von Casey & Naghdi (1981) und Naghdi (1990) angegebenen Invarianzbedingungen für die Zerlegung (2.86). Ein Modell der Elastoplastizität in dem von Xiao, Bruhns & Meyers (2000a) entwickelten Rahmen erfüllt also die Forderung der Objektivität im allgemeinen Sinne.

Anhang C

Symmetrieeigenschaften von \mathbf{G}

Um zu zeigen, daß der vierstufige Tensor \mathbf{G} symmetrisch ist, wird hier die folgende Beziehung betrachtet:

$$\Delta = \tau \Omega - \Omega \tau \quad (\text{C.1})$$

mit

$$\Omega = \sum_{r,s} \rho_{rs} (\mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s - \mathbf{B}^s \mathbf{D} \mathbf{B}^r), \quad (\text{C.2})$$

wobei ρ_{rs} eine allgemeine Funktion der Invarianten von \mathbf{B} ist. \mathbf{D} bezeichnet die Verzerrungsgeschwindigkeit und τ den Kirchhoffschen Spannungstensor. Für *isotropes* Material sind τ und \mathbf{B} coaxial und man hat

$$\mathbf{n}_i \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{n}_i = \chi_i \mathbf{n}_i, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{n}_i \tau = \tau \mathbf{n}_i = \tau_i \mathbf{n}_i, \quad (\text{C.4})$$

wobei hier τ_i die Eigenwerte von τ bezeichnen, χ_i die Eigenwerte von \mathbf{B} und \mathbf{n}_i die entsprechenden orthonormalen Eigenvektoren. Setzt man Gleichung (C.2) in (C.1) ein, ergibt sich die Form

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{r,s} \rho_{rs} (\tau \mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s + \mathbf{B}^s \mathbf{D} \mathbf{B}^r \tau - \tau \mathbf{B}^s \mathbf{D} \mathbf{B}^r - \mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s \tau) \\ &= \mathbf{G} : \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

die auch den Tensor vierter Stufe \mathbf{G} definiert. Wählt man $\mathbf{D} = (\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_l)$, folgt mit (C.3) aus (C.5) die folgende Eigenwertbeziehung:

$$\mathbf{G} : (\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_l) = \left[\sum_{r,s} \rho_{rs} (\tau_k - \tau_l) (\chi_k^r \chi_l^s - \chi_k^s \chi_l^r) \right] (\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_l). \quad (\text{C.6})$$

Im sechsdimensionalen Tensorraum ist \mathbf{G} ein Tensor zweiter Stufe, und die letzte Beziehung zeigt, daß die $(\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_l)$ ein vollständiges orthonormales System von Eigenvektoren von \mathbf{G} bilden. Daraus folgt, daß \mathbf{G} symmetrisch ist und die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbb{G}_{ijkl} = \mathbb{G}_{jikl} = \mathbb{G}_{ijlk} = \mathbb{G}_{klij} \quad (\text{C.7})$$

besitzt. Man beachte, daß nur durch das Vertauschen der Indizes die Symmetrie von \mathbf{G} bzw. \mathbf{X} – siehe Gleichung (3.51) – schwer feststellbar ist.

Anhang D

Liste der verwendeten Symbole

Symbol Bezeichnung

$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
a_1 – a_{12}	Materialkonstanten der Fließkurve
\mathbf{a}	Menge der internen Zustandsvariablen
\mathbf{A}	zurückgedrehte Menge der internen Zustandsvariablen
\mathbf{A}	Anisotropietensor
\mathbf{b}	Volumenkraftdichte
b_0, b_1	Materialparameter der Fließkurve
\mathcal{B}	Körper
\mathbf{B}	Linker Cauchy–Green Tensor
\mathbf{B}_σ	Eigenprojektion des linken Cauchy–Green Tensors \mathbf{B}
\mathcal{B}	Momentankonfiguration
$\bar{\mathcal{B}}$	Zwischenkonfiguration
\mathcal{B}_0	Referenzkonfiguration
$\partial\mathcal{B}$	Oberfläche von \mathcal{B}
$\partial\mathcal{B}_0$	Oberfläche von \mathcal{B}_0
\mathbf{C}	Rechter Cauchy–Green Tensor
\mathbf{C}_σ	Eigenprojektion des rechten Cauchy–Green Tensors \mathbf{C}
\mathbf{C}	Elastizitätstensor
d	skalarwertige Schädigungsvariable
d_i	Eigenwerte von d
$d\mathbf{a}, d\mathbf{A}$	differentielles gerichtetes Flächenelement in $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$
$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$	materielles Linienelement in $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$
$d\nu, dV$	Volumen eines differentiellen Volumenelementes von $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$
\mathbf{d}	Schädigungstensor
\mathbf{D}	Verzerrungsgeschwindigkeit
\mathbf{D}	Nachgiebigkeitstensor
\mathbf{e}	Almansischer Dehnungstensor
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}	Greenscher Dehnungstensor
\mathbf{e}_i	Basisvektoren der Momentankonfiguration

\mathbf{E}_α	Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\mathbf{e}^m(\mathbf{U})$	allgemeiner Eulerscher Dehnungstensor
$\mathbf{E}^m(\mathbf{V})$	allgemeiner Lagrangescher Dehnungstensor
\mathbf{E}	Euklidischer Vektorraum
f	Porenvolumenanteil
F	Fließfunktion
\mathbf{F}	Deformationsgradient
F_G	Fließfunktion von Gurson (1977)
g	Quadrat der Fließspannung
\mathbf{g}	Temperaturgradient
\mathbf{h}	räumlicher Henckyscher Dehnungstensor
\mathbf{H}	referentieller Henckyscher Dehnungstensor
I, II, III	Grundinvarianten eines Tensors zweiter Stufe
I_1, I_2, I_3	Hauptinvarianten eines Tensors zweiter Stufe
\mathbf{I}	Einheitstensor vierter Stufe
J	Determinante des Deformationsgradienten
K	Kinetische Energie
\mathbf{L}	Geschwindigkeitsgradient
m	Masse
\mathbf{M}	Schädigungseffektstensor
\mathbf{M}_ε	Schädigungseffektstensor zur Berechnung von $\hat{\varepsilon}$
\mathbf{M}_σ	Schädigungseffektstensor zur Berechnung von $\hat{\sigma}$
n	Anzahl ungleicher Eigenwerte von \mathbf{B}, \mathbf{C}
\mathbf{n}	Normalenvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{N}	Normalenvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{o}, \mathbf{O}	Koordinatenursprung in $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$
\mathcal{O}	Beobachter bzw. Bezugssystem
\mathbf{q}	Wärmestromvektor in \mathcal{B}
q_1, q_2, q_3	Materialkonstanten in F_G
Q	Wärmeleistung
Q_d	Plastisches Dissipationspotential
\mathbf{Q}	Drehtensor
\mathbf{Q}	Wärmestromvektor in \mathcal{B}_0
p	Vergleichsdehnung
\mathbf{P}	Nomineller Spannungstensor
r	spezifische Wärmequelle
\mathbf{R}	Rotationstensor
s	spezifische Entropie
S	Entropie
\mathbf{S}	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
SO_3	allgemeine orthogonale Gruppe
t	Zeit
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{T}	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
u	spezifische innere Energie

\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
U	innere Energie
\mathbf{U}	Rechter Strecktensor
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{V}	Linker Strecktensor
W	Gesamtenergie
\mathbf{W}	Drehgeschwindigkeitstensor
\mathbf{x}	Ortsvektor von X in der Momentankonfiguration
X	Teilchen
\mathbf{X}	Back-Stress Tensor
\mathbf{X}	Ortsvektor von X in der Referenzkonfiguration
\mathbf{Y}	zu \mathbf{d} arbeitskonjugierte Größe
α	kinematische Verfestigungsvariable
ε	Dehnung
$\boldsymbol{\varepsilon}$	infinitesimaler Verzerrungstensor
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Effektivverzerrungstensor
\mathcal{E}	Euklidischer Punktraum
δ_{ij}	Kroneckerdelta
λ_α	Eigenwerte von \mathbf{V}, \mathbf{U}
λ	Lamésche Konstante
λ	Proportionalitätsfaktor
κ	isotrope Verfestigungsvariable
κ	Kompressionsmodul
μ	Lamésche Konstante
ν	Querkontraktionszahl
$\boldsymbol{\pi}$	zu \mathbf{h} arbeitskonjugierter Eulerscher Spannungstensor
$\boldsymbol{\Pi}$	zu \mathbf{H} arbeitskonjugierter Lagrangescher Spannungstensor
ψ	freie Energie
ψ	Kontinuität
ρ	Dichte in der Momentankonfiguration
ρ_0	Dichte in der Referenzkonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyscher Spannungstensor
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Effektivspannung
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoffscher Spannungstensor
Θ	Temperatur
χ_α	Eigenwerte von \mathbf{B}, \mathbf{C}
$\boldsymbol{\chi}$	Konfiguration, Bewegung, Deformation
$\eta_1 \dots \eta_4$	Materialparameter für Σ
Φ	freie Enthalpie
Σ	komplementäres hyperelastisches Potential

Literaturverzeichnis

- Anand, L. (1979). On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations. *Journal of Applied Mechanics* **46**, 78–82.
- Anand, L. (1986). Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **34**(3), 293–304.
- Auricchio, F. & R. L. Taylor (1999). A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes. *International Journal of Plasticity* **15**, 1359–1378.
- Baltov, A. & A. Sawczuk (1965). A rule of anisotropic hardening. *Acta Mechanica* **1**(2), 81–92.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Bertram, A. (1989). *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Betten, J. (1982). Net-stress analysis in creep mechanics. *Ingenieur-Archiv* **52**, 405–419.
- Boehler, J. P. (1977). On irreducible representations for isotropic scalar functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **57**, 323–327.
- Boehler, J. P. (1987a). Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 13–30. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. (1987b). Physical motivation. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 3–11. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. (1987c). Representation for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 31–53. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. & A. Sawczuk (1976). Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids. *Mechanics Research Communications* **3**, 277–283.
- Bowen, R. M. & C.-C. Wang (1976). *Introduction to Vectors and Tensors*, Volume 1,2. New York: Plenum Press.

- Bruhns, O. T. (1987). Einige Bemerkungen zur Beschreibung inelastischer Prozesse im Bereich hoher Deformationsgeschwindigkeiten. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **67**(4), T 181–T 183.
- Bruhns, O. T. (1992). Kontinuumsmechanik: Einführung in die Beschreibung inelastischen Materialverhaltens. Arbeitsheft zur Vorlesung Kontinuumsmechanik II, Ruhr-Universität Bochum.
- Bruhns, O. T. (1993). Neue Materialgleichungen der Plastomechanik. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **73**, T 6–T 19.
- Bruhns, O. T. & H. Diehl (1989). An internal variable theory of inelastic behaviour at high rates of strain. *Archives of Mechanics* **41**(4), 427–460.
- Bruhns, O. T. & M. Pitzer (1991). Some remarks on integration procedures for a viscoplastic constitutive law. *International Journal of Plasticity* **7**, 235–254.
- Bruhns, O. T. & P. Schiesse (1996). A continuum model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids. *European Journal of Mechanics, A/Solids* **15**(3), 367–396.
- Bruhns, O. T., H. Xiao & A. Meyers (1999a). On representations of yield functions for crystals, quasicrystals and transversely isotropic solids. *European Journal of Mechanics, A/Solids* **18**, 47–67.
- Bruhns, O. T., H. Xiao & A. Meyers (1999b). Self-consistent Eulerian rate type elastoplasticity models based upon the logarithmic stress rate. *International Journal of Plasticity* **15**(5), 479–520.
- Bruhns, O. T., H. Xiao & A. Meyers (2000). A self-consistent Eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage. *International Journal of Solids and Structures* **38**(4), 657–683.
- Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**, 223–227.
- Budiansky, B. (1970). Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites. *Journal of Composite Materials* **4**, 286–295.
- Budiansky, B. & R. J. O'Connell (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures* **12**, 81–97.
- Casey, J. & P. M. Naghdi (1981). Discussion of Lubarda & Lee (1981). *Journal of Applied Mechanics* **48**, 983–984.
- Casey, J. & P. M. Naghdi (1983). On the nonequivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theory. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 350–354.
- Casey, J. & P. M. Naghdi (1992). A prescription for the identification of finite plastic strain. *International Journal of Engineering Science* **30**(10), 1257–1278.
- Chaboche, J.-L. (1978). *Description thermodynamique et phénoménologique de la visco-plasticité cyclique avec écrouissage*. Ph. D. thesis, Université P. et M. Curie. Zitat aus Cordebois & Sidoroff (1982).

- Chaboche, J.-L. (1988). Continuum damage mechanics: Part I - General concepts, part II - Damage growth, crack initiation, and crack growth. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 59-72.
- Chaboche, J. L. (1998). Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions. In H. Altenbach and J. Skrzypek (Eds.), *Modelling of Creep and Damage Processes in Materials and Structures*, Number 399 in CISM Courses and Lectures. Springer-Verlag.
- Chadwick, P. (1976). *Continuum Mechanics, Concise Theory and Problems*. London: George Allen & Unwin Ltd.
- Chow, C. L. & J. Wang (1987). An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *International Journal of Fracture* **33**, 3-16.
- Coleman, B. D. & M. E. Gurtin (1967). Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics* **14**(2), 597-613.
- Coleman, B. D. & W. Noll (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **13**, 167-178.
- Cordebois, J. & F. Sidoroff (1982). Anisotropic damage in elasticity and plasticity. *Journal de Mécanique théorique et appliquée Numéro spécial*, 45-60.
- Cordebois, J. P. & F. Sidoroff (1979). Damage induced elastic anisotropy. In J. P. Boehler (Ed.), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Number 295 in CNRS, pp. 761-774. Martinus Nijhoff Publishers.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Volume 1,2. New York: John Wiley & Sons.
- Dafalias, Y. F. (1983). Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 561-565.
- Davison, L., A. L. Stevens & M. E. Kipp (1977). Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **25**, 11-28.
- de Souza Neto, E., D. Perić & D. R. J. Owen (1992). A computational model for ductile damage at finite strains. In D. R. J. Owen, E. Onate, and E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pp. 1425-1441. Pine-ridge Press.
- Dienes, J. K. (1979). On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica* **32**, 217-232.
- Dougill, Y. W. (1975). Some remarks on path independence in the small in plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics* **33**, 233-243.
- Doyle, T. C. & J. L. Ericksen (1956). *Nonlinear Elasticity*. Number 4 in Advances in Applied Mechanics. New York: Academic Press.
- Dragon, A. & Z. Mróz (1979). A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science* **17**, 121-137.

- Eterovic, A. L. & K.-J. Bathe (1990). A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **30**, 1099–1114.
- Feldmüller, A. (1991). *Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Green, A. E. & P. M. Naghdi (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **18**, 251–281.
- Green, A. E. & P. M. Naghdi (1966). A thermodynamic development of elastic plastic continua. In H. Parkus and L. I. Sedov (Eds.), *Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids*, IUTAM, pp. 117–131. Springer-Verlag.
- Green, A. E. & P. M. Naghdi (1979). A note on invariance under superposed rigid body motions. *Journal of Elasticity* **9**(1), 1–8.
- Guo, Z.-H. (1963). Time derivatives of tensor fields in non-linear continuum mechanics. *Archives of Mechanics* **15**(1), 131–163.
- Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology* **99**, 2–15.
- Hackl, K. (1997). Generalized standard media and variational principles in classical and finite strain elastoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **45**(5), 667–688.
- Halm, D. & A. Dragon (1996). A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect. *International Journal of Damage Mechanics* **5**, 384–402.
- Hansen, N. R. & H. L. Schreyer (1994). A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. *International Journal of Solids and Structures* **31**(3), 359–389.
- Hansen, N. R. & H. L. Schreyer (1995). Damage deactivation. *Journal of Applied Mechanics* **62**, 450–458.
- Hayakawa, K. & S. Murakami (1997). Thermodynamical modeling of elastic-plastic damage and experimental validation of damage potential. *International Journal of Damage Mechanics* **6**(4), 333–363.
- Hayhurst, D. R. (1972). Creep rupture under multi-axial states of stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **20**, 381–390.
- Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Oxford University Press.
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**, 213–222.
- Hill, R. (1968). On constitutive inequalities for simple materials-I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **16**, 229–242.

- Hill, R. (1978). Aspects of invariance in solid mechanics. In C.-S. Yih (Ed.), *Advances in Applied Mechanics*, Volume 18, pp. 1–75. New York: Academic Press.
- Hoppe, U. (1996). *Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Horii, H. & S. Nemat-Nasser (1983). Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **31**(2), 155–171.
- Hult, J. (1987). Introduction and general overview. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications*, Number 295 in CISM, pp. 1–36. Springer-Verlag.
- Ilyushin, A. A. (1960). On the increments of plastic deformations and the yield surface. *PMM: Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **24**(4), 663–666.
- Janson, J. & J. Hult (1977). Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach. *Journal de Mécanique Appliquée* **1**(1), 69–84.
- Jansson, S. & U. Stigh (1985). Influence of cavity shape on damage parameter. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 609–614.
- Ju, J. W. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* **25**(7), 803–833.
- Ju, J. W. (1990). Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics* **116**(12), 2764–2770.
- Kachanov, L. M. (1958). On the time to failure under creep conditions. *Isw. AN SSSR. Otd Techn. Nauk* **8**, 26–31. Zitat aus Jansson & Stigh (1985).
- Kachanov, M. (1992). Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews* **45**(8), 304–335.
- Khan, A. S. & S. Huang (1995). *Continuum Theory of Plasticity*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Kleiber, M. (1986). On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars. *International Journal of Plasticity* **2**, 205–221.
- Kojić, M. & K.-J. Bathe (1987). The effective-stress-function algorithm for thermo-elasto-plasticity and creep. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **24**, 1509–1532.
- Krajcinovic, D. (1983). Constitutive equations for damaging materials. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 355–360.
- Krajcinovic, D. (1984). Continuum damage mechanics. *Applied Mechanics Reviews* **37**(1), 1–6.
- Krajcinovic, D. (1985). Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 829–834.

- Krajcinovic, D. (1987). Micromechanical basis of phenomenological models. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics; Theory and Applications*, Number 295 in CISM Courses and Lectures, pp. 195–206. Springer-Verlag.
- Krajcinovic, D. (1989). Damage mechanics. *Mechanics of Materials* **8**, 117–197.
- Krajcinovic, D. (1996). *Damage Mechanics*. Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland.
- Krajcinovic, D. & G. U. Fonseka (1981). The continuous damage theory of brittle materials. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 809–824.
- Krajcinovic, D. & J. Lemaitre (1987). *Continuum Damage Mechanics: Theory and Applications*. Number 295 in CISM Courses and Lectures. Berlin: Springer-Verlag.
- Krajcinovic, D. & D. Sumarac (1987). Micromechanics of the damage processes. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics; Theory and Applications*, Number 295 in CISM Courses and Lectures, pp. 135–194. Springer-Verlag.
- Kreiig, R. (1992). *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Leipzig-Köln: Fachbuchverlag.
- Kroener, E. (1960). Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **4**, 273–334.
- Leckie, F. A. & D. R. Hayhurst (1974). Creep rupture of structures. *Proceedings of the Royal Society of London A* **340**, 323–347.
- Leckie, F. A. & E. T. Onat (1981). Tensorial nature of damage measuring internal variables. In J. Hult and J. Lemaitre (Eds.), *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, pp. 140–155. Springer-Verlag.
- Lee, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics* **36**, 1–6.
- Lehmann, T. (1964). Anisotrope plastische Formänderungen. *Rheologica Acta* **3**(4), 281–285.
- Lehmann, T. (1972). Anisotrope plastische Formänderungen. *Romanian Journal of Technical Sciences: Applied Mechanics* **5**(17), 1077–1086.
- Lehmann, T. (1984). General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations. In T. Lehmann (Ed.), *The constitutive Law in Thermoplasticity*, Volume 281 of *CISM Courses and Lectures*, pp. 379–463. Springer-Verlag.
- Lehmann, T. (1989). Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica* **79**, 1–24.
- Lehmann, T. (1991). Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International Journal of Plasticity* **7**, 79–98.
- Lemaitre, J. (1985a). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology* **107**, 83–89.

- Lemaitre, J. (1985b). Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **51**, 31–49.
- Lemaitre, J. (1987). Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics; Theory and Applications*, Number 295 in CISM Courses and Lectures, pp. 37–90. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics* (2 ed.). Berlin: Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. & J. L. Chaboche (1978). Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *J. Méc. Appl.* **2**(3), 317–365. Zitat aus Simo & Ju (1987).
- Lemaitre, J. & J.-L. Chaboche (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lubarda, V. A. & D. Krajcinovic (1995a). Constitutive structure of rate theory of damage in brittle elastic solids. *Applied Mathematics and Computation* **67**, 81–101.
- Lubarda, V. A. & D. Krajcinovic (1995b). Some fundamental issues in the rate theory of damage–elastoplasticity. *International Journal of Plasticity* **11**(7), 763–797.
- Lubarda, V. A. & E. H. Lee (1981). A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 35–40.
- Lubliner, J. (1972). On the thermodynamic foundation of non-linear solid mechanics. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **7**, 237–254.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Mariano, P. M. & G. Augusti (1997). Some axioms and theorems in damage mechanics and fatigue of materials. *International Journal of Solids and Structures* **34**(25), 3337–3350.
- Marsden, J. E. & T. J. R. Hughes (1983). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Meyers, A. (1999). On the consistency of some Eulerian strain rates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **79**(3), 171–177.
- Miehe, C. (1996). Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **134**, 223–240.
- Miehe, C. & E. Stein (1992). A canonical model of multiplicative elasto-plasticity. Formulation and aspects of the numerical implementation. *European Journal of Mechanics, A/Solids* **11**, 25–43.
- Murakami, S. (1988). Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 280–286.
- Murakami, S. & N. Ohno (1981). A continuum theory of creep and creep damage. In A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst (Eds.), *Creep in Structures*, pp. 422–444. Springer-Verlag.

- Naghdi, P. M. (1990). A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* **41**, 315–394.
- Naghdi, P. M. & J. A. Trapp (1975). The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space. *International Journal of Engineering Science* **13**, 785–797.
- Nagtegaal, J. C. & J. E. de Jong (1982). Some aspects of non-isotropic workhardening in finite strain plasticity. In E. H. Lee and R. L. Mallet (Eds.), *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Computation and Experiment*, pp. 65–106. Stanford University and Rensselaer Polytechnic Institute.
- Needleman, A. & V. Tvergaard (1984). An analysis of ductile rupture in notched bars. *International Journal of Solids and Structures* **32**(6), 461–490.
- Nemat-Nasser, S. (1982). On finite deformation elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures* **18**, 857–872.
- Nemat-Nasser, S. (1992). Phenomenological theories of elastoplasticity and strain localization at high strain rates. *Applied Mechanics Reviews* **45**(3), S19–S45.
- Nerzak, T. (1997). *Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Ogden, R. W. (1984a). *Non-linear Elastic Deformations*. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- Ogden, R. W. (1984b). On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics. *Archives of Mechanics* **36**(2), 207–218.
- Ortiz, M. (1985). Constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials* **4**, 67–93.
- Ortiz, M. & J. C. Simo (1986). An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **23**, 353–366.
- Perić, D., D. R. J. Owen & M. E. Honnor (1992). A model for finite strain elastoplasticity based on logarithmic strains: Computational issues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **94**, 35–61.
- Perrin, G. & J.-B. Leblond (2000). Accelerated void growth in porous ductile solids containing two population of cavities. *International Journal of Plasticity* **16**(1), 91–120.
- Prager, W. (1960). An elementary discussion of definitions of stress rate. *Quarterly Journal of Applied Mathematics* **18**, 403–407.
- Quent, T. (2001). *Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.

- Rabier, P. J. (1989). Some remarks on damage theory. *International Journal of Engineering Science* **27**(1), 29–54.
- Rabotnov, Y. N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Reinhardt, W. D. & R. N. Dubey (1996). Coordinate-independent representation of spins in continuum mechanics. *Journal of Elasticity* **42**, 133–144.
- Reinhardt, W. D. & R. N. Dubey (1998). An Eulerian-based approach to elastic-plastic decomposition. *Acta Mechanica* **131**, 111–119.
- Rice, J. R. (1971). Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **19**, 433–455.
- Schieck, B. & H. Stumpf (1993). Deformation analysis for finite elastic-plastic strains in a Lagrangean-type description. *International Journal of Solids and Structures* **30**(19), 2639–2660.
- Schieck, B. & H. Stumpf (1995). The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures* **32**(24), 3643–3667.
- Schieße, P. (1994). *Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Schütte, H. (2001). *Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Schütte, H. & O. Bruhns (2001). On a geometrically nonlinear damage model, based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient and the propagation of microcracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, accepted for publication.
- Sidoroff, F. (1981). Description of anisotropic damage application to elasticity. In J. Hult and J. Lemaitre (Eds.), *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, pp. 237–244. Springer-Verlag.
- Simo, J. C. (1988a). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **66**, 199–219.
- Simo, J. C. (1988b). A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **68**, 1–31.
- Simo, J. C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **99**, 61–112.

- Simo, J. C. (1993). Recent developments in the numerical analysis of plasticity. In E. Stein (Ed.), *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structures*, Number 321 in CISM Courses and Lectures, pp. 115–173. Springer-Verlag.
- Simo, J. C. & T. J. R. Hughes (1998). *Computational Inelasticity*, Volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. New York: Springer.
- Simo, J. C. & J. W. Ju (1987). Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures* **23**(7), 821–840.
- Simo, J. C. & G. Meschke (1993). A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials. *Computational Mechanics* **11**, 253–278.
- Simo, J. C. & C. Miehe (1992). Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **98**, 41–104.
- Simo, J. C. & M. Ortiz (1985). A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **49**, 221–245.
- Simo, J. C. & K. S. Pister (1984). Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **46**, 201–215.
- Simo, J. C. & R. L. Taylor (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **48**, 101–118.
- Simo, J. C. & R. L. Taylor (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **22**, 649–670.
- Spencer, A. J. M. (1984). Constitutive theory for strongly anisotropic solids. In A. J. M. Spencer (Ed.), *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*, Number 282 in CISM Courses and Lectures, pp. 1–32. Springer-Verlag.
- Steinmann, P., C. Miehe & E. Stein (1994). Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile materials. *Computational Mechanics* **13**, 458–474.
- Stumpf, H. & U. Hoppe (1997). The application of tensor algebra on manifolds to nonlinear continuum mechanics – Invited survey article. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **77**(5), 327–339.
- Tang, C. Y. & W. B. Lee (1995). Effects of damage on the shear modulus of aluminum alloy 2024T3. *Scripta Metallurgica et Materialia* **32**(12), 1993–1999.
- Truesdell, C. & W. Noll (1965). The non-linear field theories of mechanics. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik* (1992, 2 ed.), Volume III/3. Berlin: Springer-Verlag.
- Truesdell, C. & R. A. Toupin (1960). The classical field theories. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik*, Volume III/1. Berlin: Springer-Verlag.
- Tvergaard, V. (1982). Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **30**(4), 265–286.

- Voyiadjis, G. Z. (1988). Degradation of elastic modulus in elastoplastic coupling with finite strains. *International Journal of Plasticity* **4**, 335–353.
- Voyiadjis, G. Z. & P. I. Kattan (1990). A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity-II. Damage and finite strain plasticity. *International Journal of Engineering Science* **28**(6), 505–524.
- Voyiadjis, G. Z. & P. I. Kattan (1992). A plasticity-damage theory for large deformation of solids-I. Theoretical formulation. *International Journal of Engineering Science* **30**(9), 1089–1108.
- Voyiadjis, G. Z. & T. Park (1999). The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids. *International Journal of Engineering Science* **37**(7), 803–830.
- Voyiadjis, G. Z. & G. Thiagarajan (1997). Micro and macro anisotropic cyclic damage-plasticity models for MMCs. *International Journal of Engineering Science* **35**(5), 467–484.
- Wang, C.-C. (1970). A new representation theorem for isotropic functions, part 1 and 2. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **36**, 166–223.
- Weber, G. & L. Anand (1990). Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **79**, 173–202.
- Wegener, K. (1991). *Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 2-1991, Dissertation, Technische Universität Braunschweig.
- Xiao, H. (1995). Unified explicit basis-free expressions for the time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain. *International Journal of Solids and Structures* **32**(22), 3327–3340.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1997a). Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *Journal of Elasticity* **47**, 51–68.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1997b). Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica* **124**, 89–105.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998a). Direct relationship between the Lagrangean logarithmic strain and the Lagrangean stretching and the Lagrangean Kirchhoff stress. *Mechanics Research Communications* **25**(1), 59–67.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998b). Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures. *Archives of Mechanics* **50**(6), 1015–1045.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998c). On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures* **35**(30), 4001–4014.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998d). Strain rates and material spins. *Journal of Elasticity* **52**, 1–41.

- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (2000a). A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient. *International Journal of Plasticity* **16**(2), 143–177.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. T. M. Meyers (2000b). The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate. *Proceedings of the Royal Society of London A* **456**, 1865–1882.
- Zhu, Y. Y. & S. Cescotto (1995). A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures* **32**(11), 1607–1641.
- Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor (1994). *The Finite Element Method* (Fourth ed.), Volume 1,2. London: McGraw-Hill.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli
1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli
1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember
1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)

- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)

- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schießle:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finte elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finte Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)

- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
(Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
(Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
(Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
(Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allge-
meinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
(Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
(Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit
Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines
monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen
Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle
hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei
schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)

- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse (August 2000)
- Nr. 125 Daniela Lürding
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)
- Nr. 126 Thorsten Quent
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung (Mai 2001)
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung (Mai 2001)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 127**

978-3-935892-1-8