

Übungen zu Mechanik B

Auflage 2018 - 2

in den Bachelorstudiengängen

Maschinenbau, Bauingenieurwesen und

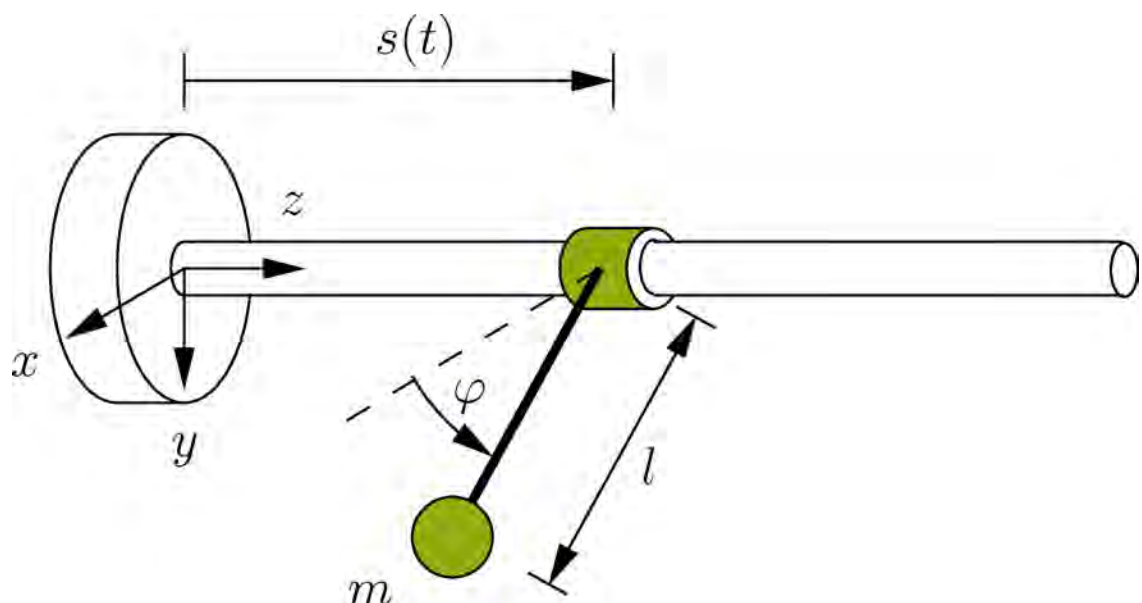
Umwelttechnik und Ressourcenmanagement

Prof. Dr.-Ing. Daniel Balzani

Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Dr.-Ing. Ulrich Hoppe

Dr.-Ing. habil. Philipp Junker



Übungen zu Mechanik B

in den Bachelorstudiengängen
Maschinenbau, Bauingenieurwesen und
Umwelttechnik und Ressourcenmanagement

Teil I: Elastostatik

Teil II: Kinematik, Kinetik, Dynamik

Auflage 2018 - 2

Prof. Dr.-Ing. Daniel Balzani
Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl
Dr.-Ing. habil. Philipp Junker
Dr.-Ing. Ulrich Hoppe

© 2018

Lehrstuhl für Mechanik – Materialtheorie

Lehrstuhl für Mechanik – Kontinuumsmechanik

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrecht zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung der Autoren. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen und die elektronische Einspeicherung, Verarbeitung sowie Verbreitung.

Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung **Übungen zu Mechanik B** wurde als Ergänzung der Arbeitsunterlagen für Hörerinnen und Hörer des Moduls **Mechanik B** in den Bachelorstudiengängen Maschinenbau, Bauingenieurwesen sowie Umwelt- und Ressourcenmanagement an der Ruhr-Universität Bochum zusammengestellt. Die Veranstaltungen umfassen Aspekte der Elastostatik wie auch der Kinematik, Kinetik sowie Dynamik. Die Aufgabensammlung untergliedert sich in zwei entsprechende Teile.

Während im Rahmen der Vorlesungs- und Übungsveranstaltungen die physikalischen Grundlagen vermittelt und geeignete Beschreibungs- sowie Lösungsmethoden entwickelt werden, ist es Ziel dieses Bandes, die Kompetenzen der Studierenden im eigenständiges Lösen von Übungsaufgaben zu schulen. Gerade diese Eigenständigkeit ist für das grundlegende Verständnis der physikalischen Sachverhalte und der abgeleiteten Methoden von elementarer Bedeutung. Zu diesem Zweck steht eine breite Auswahl an Übungsaufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zur Verfügung, die sowohl zur Nachbereitung der Veranstaltungsinhalte als auch zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden können. Zur besseren Lernkontrolle sind die Übungsaufgaben jeweils mit End- oder Teilergebnissen in Kurzform versehen. Die vollständigen Lösungswege können im Rahmen der umfangreich angebotenen Sprechstunden eingesehen werden. Der Schwierigkeitsgrad der jeweiligen Aufgabe kann mit Hilfe einer Skala von  (sehr leicht) bis  (sehr schwer) eingeschätzt werden.

An dieser Stelle sei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der beteiligten Lehrstühle für Mechanik herzlich gedankt, die zum Entstehen dieser Aufgabensammlung beigetragen haben.

Wir wünschen allen Hörerinnen und Hörern einen erfolgreichen Einstieg in die Welt der Mechanik.

Bochum, im April 2018

D. Balzani, K. Hackl, U. Hoppe, P. Junker

An den vorherigen Auflagen haben während ihrer Tätigkeit an der Ruhr-Universität maßgeblich mitgewirkt:

- Prof. Dr.-Ing. Holger Steeb (jetzt: Universität Stuttgart)
- Prof. Dr.-Ing. Ralf Jänicke (jetzt: Chalmers University of Technology, Göteborg, Schweden)

Inhaltsverzeichnis

I	Elastostatik	1
1	Spannungen und Verzerrungen	3
2	Elastostatik von Stäben	17
3	Elastostatik von Balken	25
II	Kinematik, Kinetik, Dynamik	41
4	Kinematik und Kinetik von Punktmassen	43
5	Kinematik und Kinetik von Starrkörpern	53



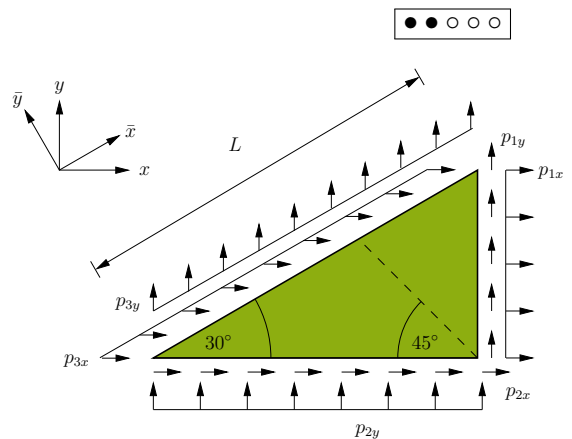
Elastostatik

1 Spannungen und Verzerrungen

Aufgabe 1.1.

Aus einem dünnwandigen Bauteil der Dicke h wird ein (kleines) Stück herausgeschnitten. Es wird durch die Linienkräfte $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ im Gleichgewicht gehalten.

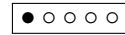
Geg: $p_{1x} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, $p_{2x} = 30 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$,
 $p_{2y} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$, $h = 0,25 \text{ mm}$, l



Bestimmen Sie

- p_{1y} , p_{3x} , p_{3y} sowie die Komponenten des Spannungstensors im $x - y$ -Koordinatensystem in einem beliebigen Punkt des Dreiecks,
- den Spannungsvektor auf der skizzierten, unter 45° geneigten Schnittebene,
- die Komponenten des Spannungstensors im $\bar{x} - \bar{y}$ -Koordinatensystem sowie
- die Hauptspannungen und ihre Richtungen.
- Ermitteln Sie den Spannungszustand sowie die weiteren Ergebnisse mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises.

Lsg: a) $\sigma_1 = 110 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = -60 \text{ N/mm}^2$,
 b) $\tau = \pm 85 \text{ N/mm}^2$, c) $\sigma_m = 25 \text{ N/mm}^2$,
 d) $\sigma_{\bar{x}\bar{x}} \approx 97,1 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \approx -45,0 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\bar{y}\bar{y}} \approx -47,1 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 1.2.

In einem ebenen Blech herrscht in einem Punkt der Spannungszustand

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & 40 \\ 40 & -50 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

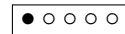
Bestimmen Sie unter Benutzung der Transformationsgleichungen sowie des Mohrschen Spannungskreises

- die Hauptnormalspannungen mit ihren Richtungen,
- die Hauptschubspannungen und die Winkel, unter denen sie auftreten,
- die mittlere Spannung sowie
- den Spannungszustand in einem um 30° gedrehten Koordinatensystem.

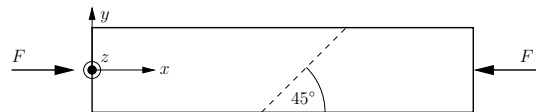
Lsg: a) $\sigma_1 = 110 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = -60 \text{ N/mm}^2$,

b) $\tau = \pm 85 \text{ N/mm}^2$, c) $\sigma_m = 25 \text{ N/mm}^2$,

d) $\sigma_{\bar{x}\bar{x}} \approx 97,1 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \approx -45,0 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{\bar{y}\bar{y}} \approx -47,1 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 1.3.

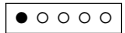
Ein Balken mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $a = 5 \text{ cm}$) wird durch eine unbekannte Druckkraft F belastet.



- Bestimmen Sie die Koeffizienten des Spannungstensors im x - y - z -Koordinatensystem für $F = 10 \text{ kN}$.
- Der Balken sei wie skizziert in einer um 45° geneigten Fläche geklebt. Wie groß darf die Kraft F werden, wenn die zulässigen Schubspannungen in der Klebefläche 4 N/mm^2 betragen?

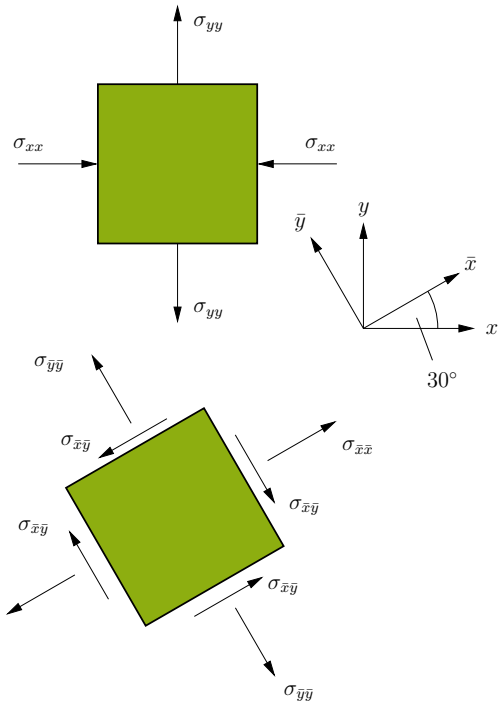
Lsg: a) $\sigma_{xx} \approx -0,51 \text{ kN/cm}^2$, b) $F_{\max} \approx \pm 15,704 \text{ kN}$

Aufgabe 1.4.



In einem Oberflächenpunkt eines Bauteils werden bei zwei unterschiedlichen Belastungen die beiden skizzierten Spannungszustände gemessen.

- Wie groß sind die Komponenten des Spannungstensors im x - y -Koordinatensystem, wenn beide Belastungen gemeinsam angreifen?
- Bestimmen Sie die dazu gehörenden Hauptspannungen sowie deren Richtungen.
- Überprüfen Sie Ihre Berechnungen aus a) und b) mit dem Mohrschen Spannungskreis.



Geg:

$$\sigma_{xx} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_{yy} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{x\bar{x}}$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = 800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_{\bar{y}\bar{y}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = 173 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Lsg: a) $\sigma_{xx} \approx 300 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{yy} \approx 300 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{xy} \approx 173 \text{ N/mm}^2$,

b) $\sigma_1 \approx 473 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 \approx 127 \text{ N/mm}^2$

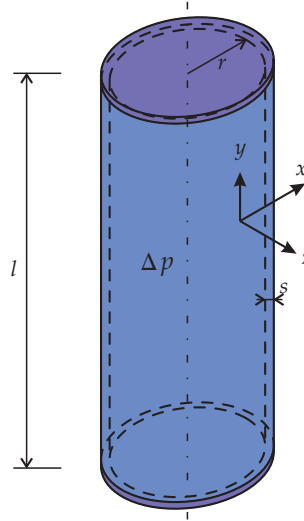
Aufgabe 1.5.

Ein aus dünnem Stahlblech gefertigter Zylinder (Länge l , Radius r , Blechdicke s) wird mit einem Gas befüllt und anschließend durch 2 aufgeschweißte Deckel abgedichtet. Durch die Verdichtung des Gases herrscht im Inneren des Zylinders ein Überdruck Δp .

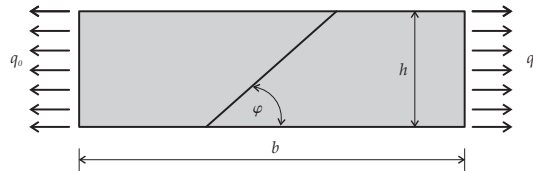
Bestimmen Sie den Spannungszustand in der Zylinderwand bezüglich des angegebenen Koordinatensystems.

Geg: $l, r, s \ll l, s, s \ll r, \Delta p$

Lsg: $\sigma_{xx} = \delta p r / s, \sigma_{yy} = \sigma_{xx} / 2, \sigma_{zz} \approx 0$

**Aufgabe 1.6.**

Ein homogenes, dünnes Blech mit den gegebenen Abmaßen (Dicke t) wird durch eine seitlich angreifende Linienkraft q_0 einachsrig belastet.



In der Mitte des Blechs befindet sich eine Schweißnaht unter dem unbekannten Winkel φ . Die Spannungen an der Schweißnaht wurden gemessen, so dass dort die Normalspannung σ_S sowie die Schubspannung τ_S bekannt sind (s. Skizze).

- Wie groß ist die angreifende Linienkraft q_0 ?
- Unter welchem Winkel φ ist die Schweißnaht angeordnet?
- Versagt das Material unter der Annahme eines c1) duktilen, c2) spröden Materialverhaltens?

Geg: $h = 10 \text{ cm}, b = 50 \text{ cm}, t = 1 \text{ mm},$

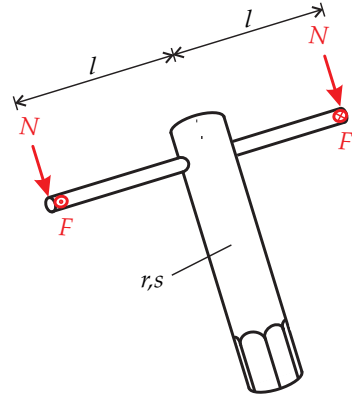
$$\sigma_S = 50 \text{ MPa}, \tau_S = -50\sqrt{3} \text{ MPa}, \sigma_{zul} = 150 \text{ MPa}$$

Lsg: a) $q_0 = 200 \text{ kN/m}$, b) $\varphi = 30^\circ$, c1) versagt nicht, c2) versagt

Aufgabe 1.7.



Es wird der in der Abbildung dargestellte Schraubenschlüssel betrachtet. Er besteht aus einem langen, dünnwandigen und zylindrischen Rohr (Radius r , Wanddicke s) und einem Hebel (Länge $2l$). Über den Hebel werden Kräfte N (parallel zum Rohr) und F (senkrecht zum Rohr) einge-
leitet, die jeweils auch senkrecht zum Hebel wirken. Bestimmen Sie unter der Vor-
aussetzung, dass sich die Schraube noch
nicht drehen lässt,



- den Spannungszustand in der Rohrwand,
- die Hauptspannungen sowie die Hauptspannungsrichtung,
- die maximal auftretende Schubspannung sowie die zugehörige Hauptschubspannungsrichtung.
- Untersuchen Sie, ob ein sprödes oder ein duktils Material unter dieser Belastung versagen würde.
- Veranschaulichen Sie die Ergebnisse anhand Mohr'scher Spannungskreise.

Geg: $l = 0,1 \text{ m}$, $r = 0,015 \text{ m}$, $r \ll l$, $s = 0,001 \text{ m}$, $s \ll r$,

$$N = 5 \text{ kN}, F = 1 \text{ kN}, \sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ N/mm}^2$$

Lsg: a) $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 141,47 & 0 \\ 141,47 & -106,10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2,$

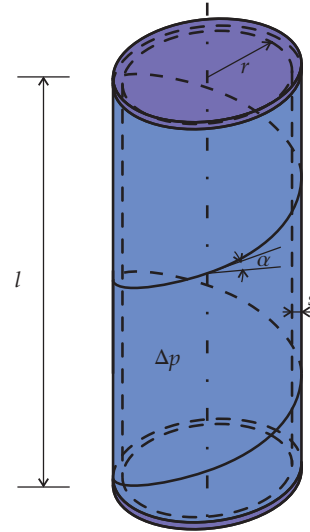
b) $\varphi_0 \approx 34,72^\circ$, $\sigma_1 \approx 98,04 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 \approx -204,14 \text{ N/mm}^2$,

c) $\tau_{\text{max}} \approx 151,09 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 1.8.

Der bereits in **Aufgabe 1.5** betrachtete dünnwandige Zylinder sei gefertigt worden, indem er aus Stahlblech aufgerollt und unter einem Winkel α schraubenförmig verschweißt wurde. Bestimmen Sie ausgehend von dem in **Aufgabe 1.5** bestimmten Spannungszustand

- die Zahlenwerte für die einzelnen Spannungen,
- den Spannungszustand bezogen auf die Lage der Schweißnaht $\alpha = 30^\circ$,
- die Ausrichtung der Schweißnaht (Winkel α), bei der die in der Naht auftretenden Schubspannungen maximal werden, sowie den zugehörigen Spannungszustand.

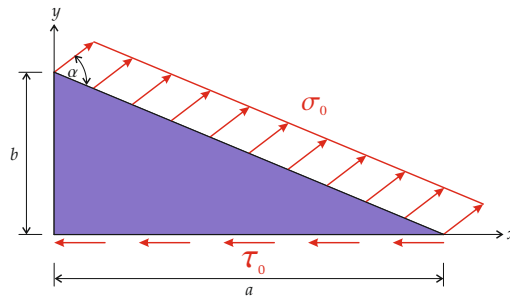


Geg: $l = 1,50 \text{ m}$, $r = 0,125 \text{ m}$, $r \ll l$, $s = 0,005 \text{ m}$, $s \ll r$, $\Delta p = 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

Lsg: b) $\sigma_{\bar{i}\bar{j}} \approx \begin{bmatrix} 6,563 & -1,624 \\ -1,624 & 4,688 \end{bmatrix} 10^8 \text{ N/mm}^2$, c) $\hat{\varphi} = \pm\pi/4$

Aufgabe 1.9.

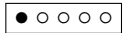
Das dargestellte dreieckförmige Blechstück ist an der schrägen Kante einer äußeren Flächenbelastung σ_0 ausgesetzt, die unter dem Winkel α zur Schrägen verläuft. Bestimmen Sie



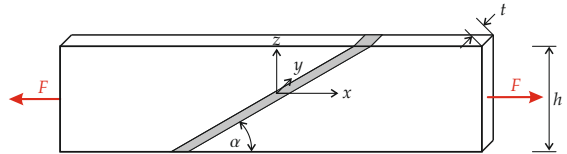
- die für den Gleichgewichtszustand erforderlichen Spannungen an den Kanten des Blechstückes,
- den Hauptspannungszustand sowie die zugehörigen Richtungen.

Geg: σ_0 , $\tau_0 = \sigma_0/2$, $\alpha = 60^\circ$, $a = 120 \text{ mm}$, $b = 50 \text{ mm}$

Lsg: a) $\sigma_{xx} \approx 0,866 \sigma_0$, $\sigma_{yy} \approx 0,449 \sigma_0$, $\tau_{xy} = \tau_0$, b) $\varphi_0 \approx 33,69^\circ$

Aufgabe 1.10.

Ein aus zwei unter dem Winkel α verschweißten Stücken bestehendes Blech (Länge l , Höhe h , Dicke t) wird in der dargestellten Weise durch zwei entgegengesetzte Zugkräfte belastet. Bestimmen Sie

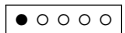


- den Spannungszustand im Blech bzgl. des angegebenen Koordinatensystems,
- den Spannungszustand in der Schweißnaht,
- die Hauptschubspannungsrichtungen sowie den zugehörigen Spannungszustand sowie
- die kritische Zugkraft F_{krit} , bei der das Material nach der Tresca- oder Rankine-Hypothese versagt.

Geg: $F = 300 \text{ kN}$, $h = 30 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_{\text{zul}} = 200 \text{ N/mm}^2$

Lsg: a) $\sigma_{xx} = 100 \text{ N/mm}^2$, b) $\bar{\sigma}_{ij} \approx \begin{bmatrix} 75 & 0 & -43,301 \\ 0 & 0 & 0 \\ -43,301 & 0 & 25 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$,

c) $\tau_{\text{max}} = 50 \text{ N/mm}^2$, d) $F_{\text{krit,T}} = 1200 \text{ kN}$, $F_{\text{krit,R}} = 600 \text{ kN}$

Aufgabe 1.11.

Gegeben sei ein Spannungstensor für ebene Spannungszustände

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die gegebenen Werte

- $\sigma_{xx} = 500 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{yy} = -300 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 300 \text{ N/mm}^2$
- $\sigma_{xx} = 200 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{yy} = 80 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = -45 \text{ N/mm}^2$

jeweils den Hauptnormalspannungs- sowie Hauptschubspannungszustand.

Lsg: a) $\sigma_1 = 600 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = -400 \text{ N/mm}^2$, $\varphi \approx 18,43^\circ$

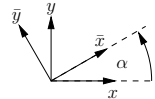
b) $\sigma_1 = 215 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = 65 \text{ N/mm}^2$, $\varphi \approx -18,43^\circ$

Aufgabe 1.12.



Gegeben sei der Spannungszustand in einem ebenen x - y -Koordinatensystem mit

$$\sigma_{11} = -50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{22} = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_{12} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

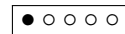


Bestimmen Sie

- rechnerisch die Hauptnormalspannungen sowie deren Richtungen im x - y -Koordinatensystem,
- die Komponenten des Spannungstensors in einem um $\alpha = -60^\circ$ gedrehten $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -Koordinatensystem,
- den Spannungsvektor auf einer Fläche, die um $\pm 45^\circ$ gegenüber dem Hauptspannungssystem geneigt ist.

Lsg: a) $\sigma_1 = 235,1 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = -85,1 \text{ N/mm}^2$, c) $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 166,24 \\ -60,17 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 1.13.



Gegeben sei das Verschiebungsfeld $u_i = [a x + b y, b x + c y]^T$, wobei a , b und c konstant bezüglich der Koordinaten x und y sind.

- Bestimmen Sie das Koeffizientenschema ε_{ij} des daraus abgeleiteten Verzerrungstensors.
- Seien $a = 0,01$, $b = 0$ und $c = -0,003$. Geben Sie den Winkel an, unter dem die Schubdeformation maximal wird. In welche Richtungen muss der Verzerrungszustand ausgewertet werden, dass sich zumindest je eine Normaldehnungskomponente zu null ergibt?

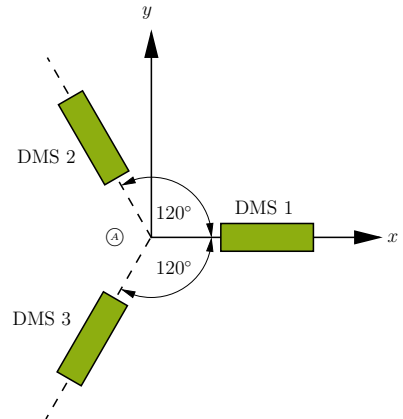
Geg: a, b, c

Lsg: b) $\varphi_1 \approx 28,7^\circ$, $\varphi_2 \approx 61,3^\circ$

Aufgabe 1.14.

Mit Hilfe einer auf die Oberfläche aufgetragenen DMS-Rosette (DMS bedeutet Dehnungs-Messstreifen) soll der Verzerrungszustand in einem dünnen Blech bestimmt werden. Die Messung ergibt folgende Werte:

$$\begin{aligned} \text{DMS 1 } \varepsilon^{(1)} &= 0,00050, \\ \text{DMS 2 } \varepsilon^{(2)} &= -0,00026, \\ \text{DMS 3 } \varepsilon^{(3)} &= 0,00028. \end{aligned}$$

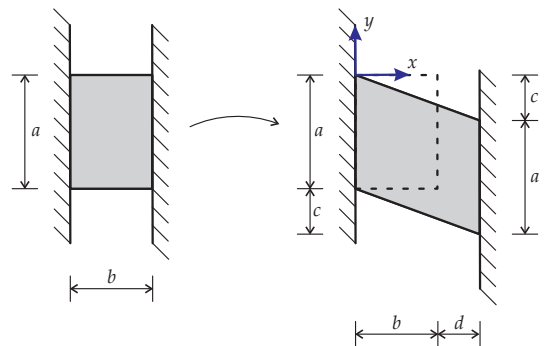


Ermitteln Sie daraus die Koeffizientendarstellung des Verzerrungstensors im Punkt (A) auf der Blechoberfläche, die Haupttrichtungen sowie die dazugehörigen Hauptdehnungen.

Lsg: $\varepsilon_1 \approx 6,249 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 \approx -2,782 \cdot 10^{-4}$

Aufgabe 1.15.

Zur Kompensation von Längenänderungen großformatiger Bauteile durch Temperaturänderungen werden, wie in der Abbildung schematisch dargestellt, Dehnungsfugen angeordnet. Durch Baugrundsetzungen hat sich eines der Bauteile gegenüber dem anderen derart verschoben, dass das Verbindungsstück in der gezeigten Weise verformt wurde.



- Bestimmen Sie unter der Annahme homogener Verformungen das sich ergebende Verschiebungsfeld für das Verbindungsstück,
- den sich daraus ergebenden Dehnungszustand,
- die Hauptdehnungen und Hauptscherungen, sowie die zugehörigen Richtungen für einen vorliegenden Ebenen Dehnungszustand.

Geg: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 0,1 \text{ mm}$, $d = 0,25 \text{ mm}$

Lsg: a) $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} d/bx \\ -c/bx \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0.005 & -0.001 \\ -0.001 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\varepsilon_1 \approx 5,193 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 \approx -1,93 \cdot 10^{-4}$, $\varphi \approx -10.9^\circ$, $\gamma_{\max} = 0.00538$, $\hat{\varphi} \approx 31.1^\circ (-55.9^\circ)$

Aufgabe 1.16.



Zur Bestimmung des Einflusses tektonischer Plattenbewegungen auf die Erdoberfläche in erdbebengefährdeten Gebieten wurde von Geologen die Verschiebung eines bestimmten Areals (Abmessungen $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$) wie folgt ermittelt:

$$\underline{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}x - \mathcal{B} \sin(\kappa y) + \mathcal{C}y^2 + u_0 \\ -\mathcal{D}(x - \lambda)^3 + \mathcal{A}y + v_0 \end{bmatrix}$$

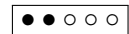
Bestimmen Sie aus dem vorgegebenen Verschiebungsfeld

- die Funktionen der Dehnungen $\varepsilon_{xx}(x, y)$, $\varepsilon_{yy}(x, y)$ und $\varepsilon_{xy}(x, y)$,
- unter der Annahme eines Ebenen Dehnungszustandes den Dehnungstensor im Punkt $(x, y) = (\lambda, \pi/(2\kappa))$,
- für diesen Punkt die Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Geg: $\mathcal{A} = 1,00 \cdot 10^{-4}$, $\mathcal{B} = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $\mathcal{C} = \frac{4}{\pi} \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$, $\mathcal{D} = 0,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}$, $\kappa = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, $\lambda = 12,31 \text{ m}$, $u_0 = 0,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $v_0 = 0,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Lsg: b) $\varepsilon_{ij}(\lambda, \pi/(2\kappa)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C} \pi/(2\kappa) \\ \mathcal{C} \pi/(2\kappa) & \mathcal{A} \end{bmatrix}$, c) $\varepsilon_{1,2} = \mathcal{A} \pm \frac{\mathcal{C} \pi}{2\kappa}$

Aufgabe 1.17.



In **Aufgabe 1.14** wurde der experimentell gemessene Dehnungszustand auf der Oberfläche eines dünnen Bleches ausgewertet. Basierend auf dem Ergebnis soll nun der dazugehörige Spannungszustand bestimmt werden. Das Blechmaterial soll als isotrop und linear-elastisch angenommen werden, so dass das Materialverhalten mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes beschrieben werden kann.

- Bestimmen Sie die Koeffizienten des Spannungstensors σ_{ij} .
- Geben Sie die Hauptnormalspannungen an.

Geg: $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$

Lsg: a) $\sigma_{11} \approx 105 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{12} \approx 50 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{22} \approx 0$,

b) $\sigma_1 \approx 124,9 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 \approx -20,94 \text{ N/mm}^2$

Aufgabe 1.18.

Der bereits in **Aufgabe 1.5** und **Aufgabe 1.8** betrachtete dünnwandige Zylinder soll nun hinsichtlich seiner durch den Innendruck Δp hervorgerufenen Verformungen auf Grundlage des Hookeschen Gesetzes untersucht werden. Bestimmen Sie ausgehend von dem in **Aufgabe 1.8** bestimmten Spannungszustand die Änderung des Radius Δr , die Längenänderung Δl in axialer Richtung sowie die Änderung der Wanddicke Δs .

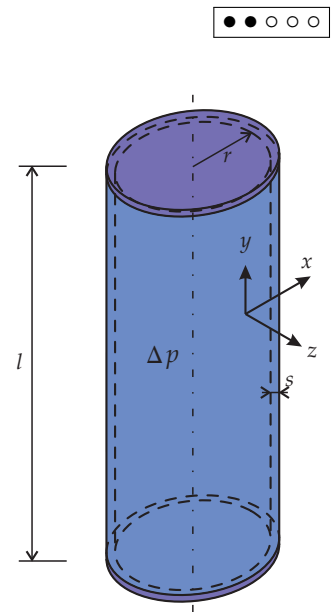
Geg: $l = 1,5 \text{ m}$, $r = 0,125 \text{ m}$, $r \ll l$,

$$s = 0,005 \text{ m}, s \ll r,$$

$$\Delta p = 3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2,$$

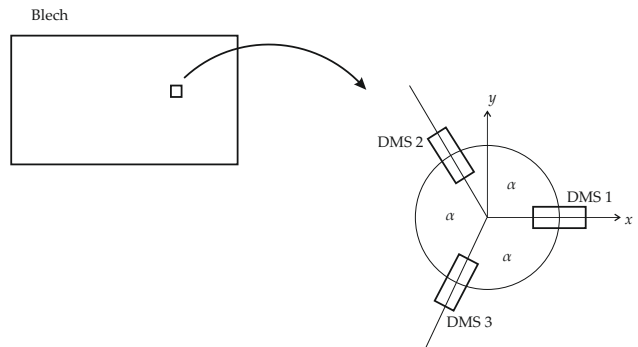
$$E = 210000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0,3$$

Lsg: $\Delta l \approx 1,1355 \text{ mm}$, $\Delta s \approx -0,00875 \text{ mm}$



Aufgabe 1.19.

Zur experimentellen Ermittlung der Beanspruchung des gezeigten, dünnen Bleches (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν) werden 3 sogenannte Dehnungsmessstreifen (DMS) in der dargestellten Anordnung auf dessen Oberfläche appliziert.



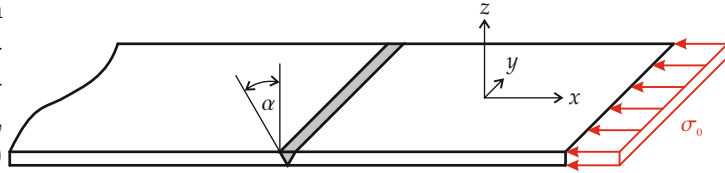
Die Messungen ergeben die Längenänderungen Δl_i der einzelnen DMS in Längsrichtung, wobei die Ausgangslänge aller DMS l_0 beträgt. Bestimmen Sie anhand der gegebenen Messwerte den Dehnungs- sowie Spannungszustand im Punkt A.

Geg: $l_0 = 10 \text{ mm}$, $\Delta l_1 = 0,0045 \text{ mm}$, $\Delta l_2 = -0,0025 \text{ mm}$, $\Delta l_3 = 0,0030 \text{ mm}$, $\alpha = 120^\circ$, $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$

Lsg: $\varepsilon_{xx} \approx 4,5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{xy} \approx 3,2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{yy} \approx -1,2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{zz} \approx -1,4 \cdot 10^{-4}$

Aufgabe 1.20.

Die beiden dargestellten Bleche aus einem linear elastischen Material (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν)



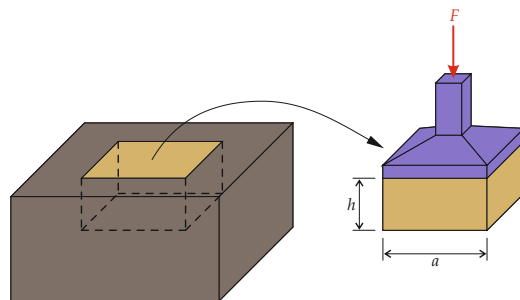
sollen durch eine parallel zur y -Achse des gegebenen Koordinatensystems verlaufende Schweißnaht in V-Form miteinander verbunden werden. Dabei sind die Kanten der Bleche jeweils um den Winkel α angestellt. Die Bleche sind in z -Richtung unverschieblich gelagert und die seitliche Ausdehnung in y -Richtung wird verhindert. Bestimmen Sie

- den Spannungszustand in den Blechen bezüglich des angegebenen Koordinatensystems.
- den Spannungszustand in der Kontaktebene zwischen Blech und Schweißnaht für $\alpha = 30^\circ$ sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch. Wenden Sie für die rechnerische Lösung sowohl Gleichgewichtsbetrachtungen als auch Koordinatentransformations-Formeln an.
- den Hauptschubspannungszustand unter Angabe der zugehörigen Richtung.
- die Längenänderungen des gesamten Blechstücks (Ausgangslängen $l_{0,x}$, $l_{0,y}$, $l_{0,z}$) bezüglich aller Richtungen.

Geg: σ_0 , E , ν **Lsg:** b) $\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = -\sigma_0/4$, $\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = -3\sigma_0/4$, $\sigma_{\bar{x}\bar{z}} = \sqrt{3}\sigma_0/4$

Aufgabe 1.21.

Für die Anordnung eines Fundaments wurde Erdreich in Form eines Prismas (quadratische Grundfläche der Kantenlänge a , Höhe h) ausgehoben und mit Beton gefüllt. Dieser soll nun vor dem kompletten Aushärten noch einmal verdichtet werden, was mittels eines mit der Kraft F beanspruchten Stempels geschieht.



Das Erdreich ist dabei als starr anzusehen und das Materialverhalten des Betons kann trotz des nicht vollendeten Erhärtungsprozesses bereits mit den elastischen Materialparametern Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν beschrieben werden. Bestimmen Sie den Spannungszustand innerhalb

des Betons und geben Sie die Absenkung des Fundamentes an. Was würde sich für ein inkompressibles Material (z.B. Gummi, $\nu = 0.5$) ergeben?

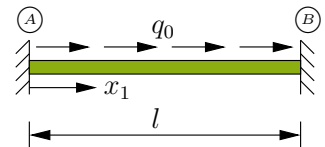
Geg: F, E, ν, a, h **Lsg:** $\Delta h = -\frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu) F h}{(1 - \nu) E a^2}$

2 Elastostatik von Stäben

Aufgabe 2.1.



Ein Stab der Länge l wird kräftefrei zwischen den Lagern $\textcircled{A}$ und $\textcircled{B}$ eingebaut und mit der konstanten axialen Streckenkraft $n_1 = q_0$ belastet. Bestimmen Sie:



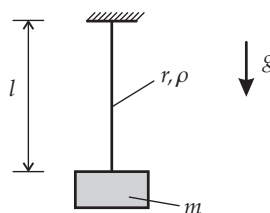
- die Verschiebungsfunktion und die Normalkraftverteilung im Stab.
- die Lagerreaktionen in $\textcircled{A}$ und $\textcircled{B}$ sowie

Geg: $q_0, l, EA = \text{konst}$ **Lsg:** $A_1 = B_1 = q_0 l/2, EA u(x_1) = q_0 (l x_1 - x_1^2)/2$

Aufgabe 2.2.



Zum Anbringen eines Beamers der Masse m in einem Seminarraum ist die im Foto dargestellte Konstruktion angedacht. Die als schlanker Stab mit kreisrunder Grundfläche anzunehmende Aufhängung



weist die Länge l sowie den Radius r auf und besteht aus einem Material der Dichte ρ . Die Verbindung mit der Decke ist dabei als Einspannung anzusehen. Bestimmen Sie die Spannungsverteilung im Stab sowie die maximal zulässige Masse $m_{\max}$ des Beamers, damit die zulässige Normalspannung σ_{zul} nicht überschritten wird.

Geg: $m, \rho, l, r \ll l, g, \sigma_{\text{zul}}$

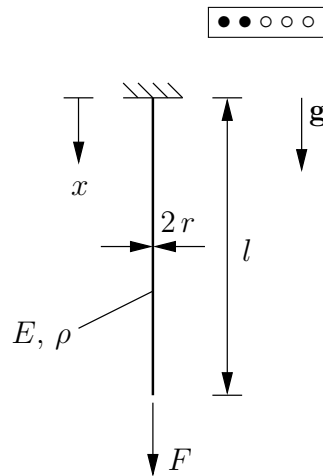
Lsg: $\sigma(x) = \frac{m g}{\pi r^2} + \rho g x, m_{\max} = \frac{\pi r^2}{g} (\sigma_{\text{zul}} - \rho g l)$

Aufgabe 2.3.

Ein schlanker Draht mit kreisförmigem Querschnitt (Radius r) wird durch die gegebene Kraft F belastet. Berechnen Sie die Verlängerung des Drahtes unter Berücksichtigung seines Eigengewichts im Schwerfeld der Erde.

Geg: r, l, g, E, ρ, F

Lsg: $u_{\max} = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} \rho g l^2 + \frac{F l}{\pi r^2} \right]$

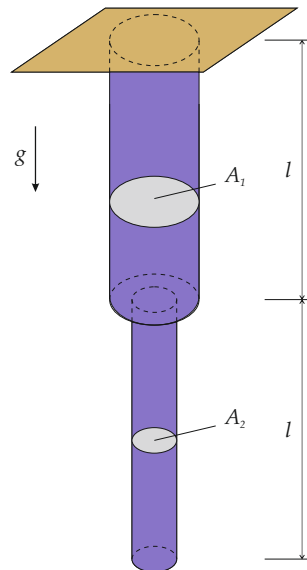
**Aufgabe 2.4.**

Die beiden dargestellten Stäbe (1) und (2) sind starr miteinander verbunden und weisen identische Materialparameter (Dichte ρ , Elastizitätsmodul E) sowie unterschiedliche Querschnittsflächen A_1 bzw. A_2 auf. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Eigengewichtes bei der Stäbe die Verschiebung der jeweiligen Endpunkte **mittels Kompatibilität**.

Geg: E, ρ, g, l, A_1, A_2

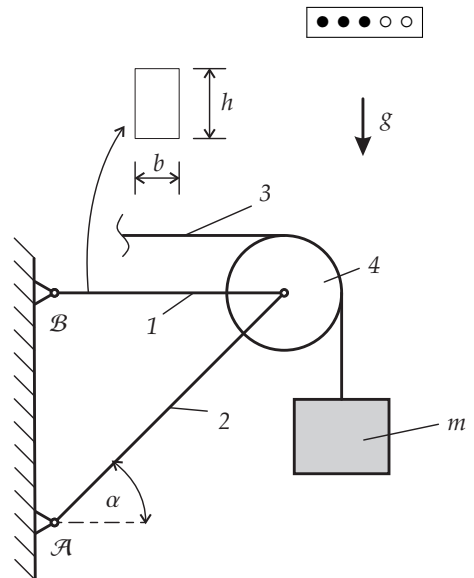
Lsg: $w_1 = \frac{\rho g l^2}{E} \left(\frac{1}{2} + \frac{A_2}{A_1} \right)$

$$w_2 = \frac{\rho g l^2}{E} \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right)$$



Aufgabe 2.5.

Eine Hebevorrichtung besteht aus zwei Holzbalken (1, 2) mit rechteckiger Querschnittsfläche (Breite b , Höhe h_1 bzw. h_2) und einer reibungsfrei drehbar gelagerten Rolle (4). Die Last der Masse m wird über ein Seil (3) angehoben, welches bspw. über eine Kurbel eingeholt werden kann (hier nicht dargestellt). Die Holzbalken sind in den Punkten A und B gelenkig mit der Fassade des Gebäudes verbunden. Bestimmen Sie jeweils die erforderliche Höhe h_{max} der beiden Holzbalken, damit die Normalspannungen den zulässigen Spannungswert nicht überschreitet.



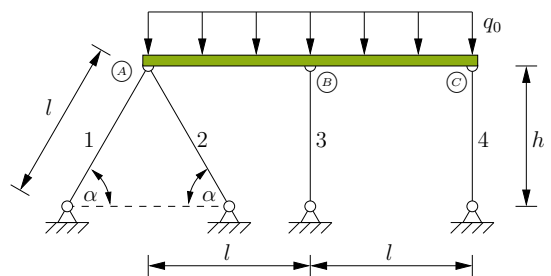
Geg: $m = 20 \text{ t}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $b = 100 \text{ mm}$, $\alpha = 30^\circ$,

$$\sigma_{\text{zul}}^{\text{Zug}} = 9 \text{ N/mm}^2, \sigma_{\text{zul}}^{\text{Druck}} = -11 \text{ N/mm}^2$$

Lsg: $h_1^{\min} \approx 16,0 \text{ cm}$, $h_2^{\min} \approx 35,7 \text{ cm}$

Aufgabe 2.6.

Ein starrer Balken ist wie skizziert auf vier elastischen Stäben mit der Dehnsteifigkeit EA gelagert. Bestimmen Sie die durch die konstante Streckenlast q_0 hervorgerufenen Stabkräfte.

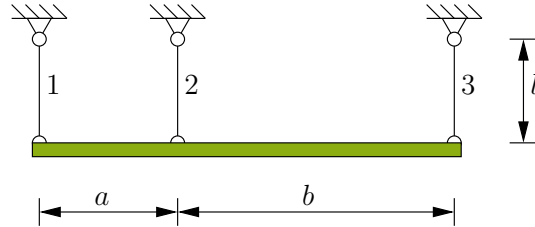


Geg: $EA = \text{konst.}$, l , q_0 , $\alpha = 60^\circ$

Lsg: $S_1 = S_2 \approx 0,4003 q_0 l$, $S_3 \approx 0,6135 q_0 l$, $S_4 \approx 0,6933 q_0 l$

Aufgabe 2.7.

Drei Stäbe der Länge l und dem konstanten Querschnitt A tragen wie skizziert einen starren Balken. Die Stäbe 1 und 3 weisen identische Materialparameter $E_1 = E_3$, $\alpha_1 = \alpha_3$ auf, während Stab 2 aus einem zu Stäben 1 sowie 3 verschiedenen Material gefertigt ist (E_2 , α_2).



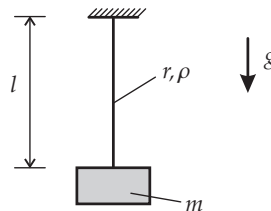
Bestimmen Sie die Kräfte in den Stäben infolge einer Temperaturänderung $\Delta\Theta$.

Geg: $a, b, l, A, E_1 = E_3, E_2, \alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2, \Delta\Theta$

Lsg: $S_2 = \frac{(a+b)^2 (\alpha_1 - \alpha_2) E_1 E_2 A}{(a+b)^2 E_1 + (a^2 + b^2) E_2} \Delta\Theta, S_1 = -S_2 \frac{b}{a+b}, S_3 = -S_2 \frac{a}{a+b}$

Aufgabe 2.8.

Zum Anbringen eines Beamers der Masse m in einem Seminarraum ist die im Foto dargestellte Konstruktion angedacht. Die als schlanker Stab mit kreisrunder Grundfläche anzunehmende Aufhängung



weist die Länge l sowie den Radius r auf und besteht aus einem Kunststoff (Dichte ρ , E-Modul E). Die Verbindung mit der Decke ist dabei als Einspannung anzusehen. Die Spannungsverteilung für dieses Problem wurde bereits in **Aufgabe 2.2** berechnet. Bestimmen Sie die sich in Folge der Belastung einstellende Absenkung des Beamers am unteren Ende des Stabes.

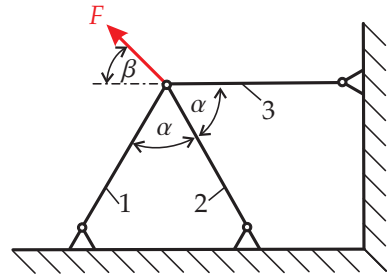
Geg: $m = 10 \text{ kg}, \rho = 2000 \text{ kg/m}^3, l = 50 \text{ cm}, r = 0.5 \text{ cm}, g = 9,81 \text{ N/kg}, E = 3,0 \text{ GPa}$

Lsg: $u_0 = -\frac{1}{E} \left(\frac{m g l}{\pi r^2} + \frac{1}{2} \rho g l^2 \right) \approx -0,209 \text{ mm}$

Aufgabe 2.9.



Ein Auflager für Tragkonstruktionen besteht aus drei identischen Stäben (1) – (3) (Länge l , Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A) in der dargestellten Anordnung. Diese sind alle in einem Punkt miteinander verbunden, an dem die Kraft F angreift. Bestimmen Sie alle Stabkräfte sowie die Verschiebung des Kraftangriffspunktes.



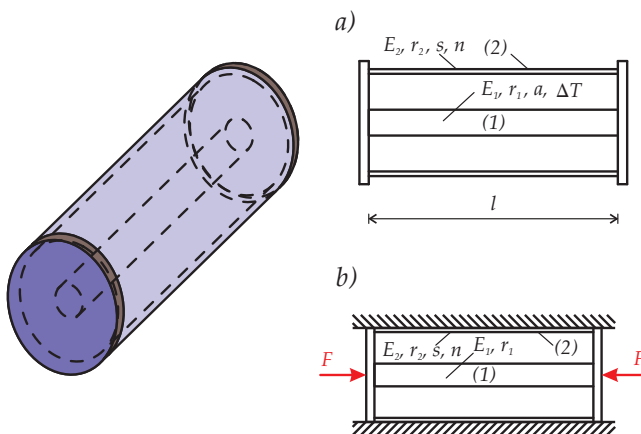
Geg: $F, l, E, A, \alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$

Lsg: $S_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{2}}F, S_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}F, S_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}F$

Aufgabe 2.10.



Das dargestellte Konstruktionsteil besteht aus einem kreisrunden Stab (1) (Elastizitätsmodul E_1 , Radius r_1 , Wärmeausdehnungskoeffizient α) und einer ihn umgebenden Hülse (2) in Form eines dünnwandigen Zylinders (Elastizitätsmodul E_2 , Querkontraktionszahl ν , Radius r_2 , Wanddicke s). Beide Körper weisen die Ausgangslänge l auf.



Während der Stab an beiden Enden starr mit je einer Platte verbunden ist, liegt die Zylinderwand lediglich reibungsfrei an diesen an (d.h. die Zylinderwand kann sich prinzipiell seitlich verschieben, bleibt jedoch immer gerade).

Berechnen Sie die in Stab und Zylinder auftretenden Spannungen für den Fall,
 a) dass der innen liegende Stab eine Temperaturänderung $\Delta T < 0$ erfährt.
 b) dass bei verhinderter Seitendehnung des Zylinders ein Kräftepaar F in axialer Richtung einwirkt.

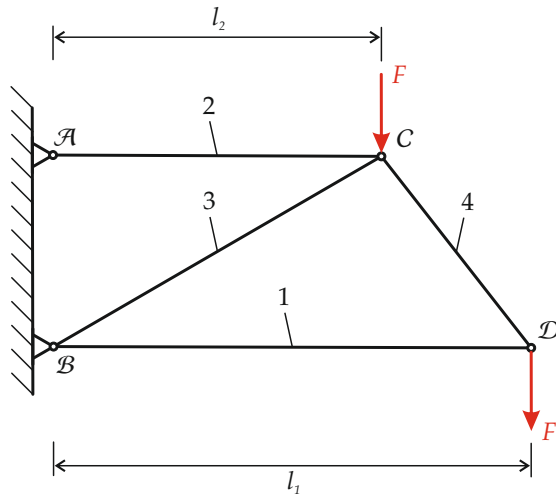
Geg: $E_1, E_2, \nu, r_1, r_2, \alpha, s, l, F$

Lsg: a) $\sigma_i = -\frac{E_1 \alpha \Delta T 2 E_2 r_2 s}{E_1 r_1^2 + 2 E_2 r_2 s}$, b) $\sigma_i = -\frac{E_2 F (1 - \nu^2)}{E_1 \pi r_1^2 (1 - \nu^2) + 2 E_2 \pi r_2 s}$

Aufgabe 2.11.



Die Stromleitungen der U-Bahnlinie U35 sind in der dargestellten Weise aufgehängt. Die Tragkonstruktion kann dabei als aus den Stäben (1) bis (4) bestehendes Fachwerk angesehen werden. Durch das Gewicht der Stromleitungen wird in den Punkten (C) und (D) jeweils die Kraft F eingeleitet. Wählen Sie die Rohrquerschnitte für die einzelnen Stäbe des Fachwerks so, dass die jeweilige Normalspannung möglichst nah an den zulässigen Wert von $|\sigma_{zul}| = 240 \frac{N}{mm^2}$ heranreicht, diesen aber nicht überschreitet.



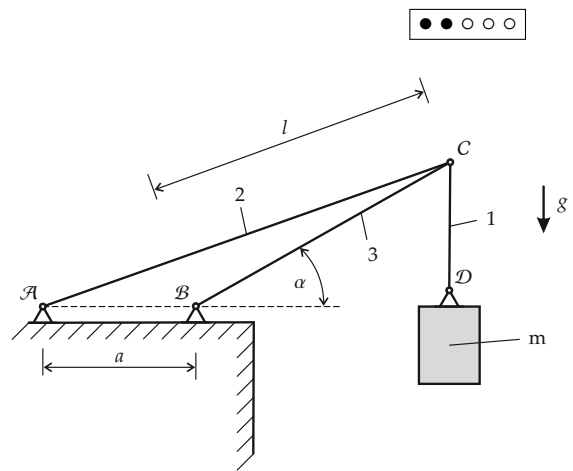
Hinweis: Berechnen Sie die theoretisch optimalen Werte für die Querschnittsflächen. Es gilt die Annahme, dass σ_{zul} sowohl für Druck- als auch Zugspannungen den maximalen Wert darstellt.

Geg: $F = 100 \text{ kN}$, $l_1 = 4,00 \text{ m}$, $l_2 = 2,75 \text{ m}$, $h = 1,25 \text{ m}$

Lsg: $A_1 \approx 4,17 \text{ cm}^2$, $A_2 \approx 22,50 \text{ cm}^2$, $A_3 \approx 20,14 \text{ cm}^2$, $A_4 \approx 5,89 \text{ cm}^2$

Aufgabe 2.12.

Die dargestellte Hebevorrichtung soll nun hinsichtlich der Spannungen untersucht werden. Die Querschnitte der Seile (1, 2) können als kreisrund angenommen werden, während der Stab (3) als Rohr mit dem vorgegebenen Außendurchmesser d_a gefertigt wurde. Bestimmen Sie



a) den notwendigen Radius der Seilquerschnitte,

b) die notwendige Wanddicke t des Rohres

sodass für die Normalspannungen in den Bauteilen jeweils $\sigma \leq \sigma_{\text{zul}}$ gilt.

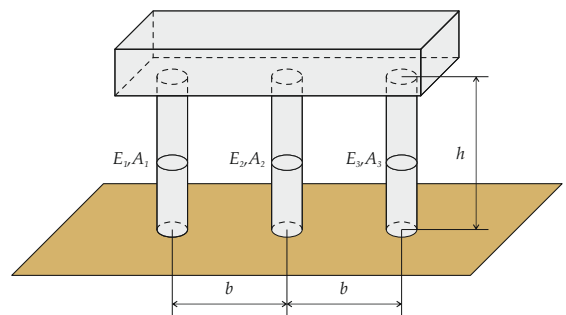
Geg: $m = 100 \text{ t}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $l = 2,50 \text{ m}$, $a = l/2$, $\alpha = 30^\circ$,

$$\sigma_{\text{zul}}^{\text{Stab}} = \pm 6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2, \sigma_{\text{zul}}^{\text{Seil}} = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2, d_a = 250 \text{ mm}$$

Lsg: $d_2^{\text{min}} = 17,74 \text{ cm}$, $d_1^{\text{min}} = 7,9 \text{ cm}$, $t^{\text{min}} = 1,2 \text{ cm}$

Aufgabe 2.13.

Der dargestellte Brückenkörper (Masse m) wird durch 3 symmetrisch angeordnete Pfeiler (Elastizitätsmoduli E_1, E_2, E_3 , Querschnittsflächen A_1, A_2, A_3), deren Eigengewicht vernachlässigt werden kann, abgestützt. Dabei gelte die Annahme, dass der Brückenkörper starr ist und sich gleichmäßig vertikal verschiebt.



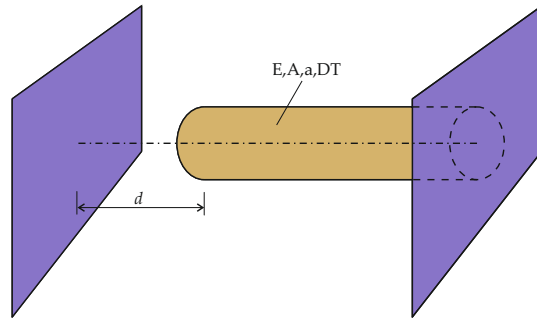
Bestimmen Sie alle Stabkräfte und geben Sie die Bedingung dafür an, dass sich der Brückenkörper wirklich gleichmäßig vertikal verschiebt.

Geg: $E_1, E_2, E_3, A_1, A_2, A_3, m, g$

$$\text{Lsg: } S_1 = S_3 = -\frac{E_1 A_1}{2 E_1 A_1 + E_2 A_2} m g, S_2 = -\frac{E_2 A_2}{2 E_1 A_1 + E_2 A_2} m g$$

Aufgabe 2.14.

Der dargestellte Stab (Ausgangslänge l , Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Wärmeausdehnungskoeffizient α) wird einer Temperaturänderung ΔT ausgesetzt. Dabei befindet sich in einem Abstand d vom unverformten Stabende in Achsrichtung gemessen eine starre Wand.



Bestimmen Sie

- die Grenztemperatur, bei der die Längenänderung des Stabes $\Delta l = d$ beträgt.
- die Normalkraft sowie Normalspannung des Stabes für die angegebene Temperaturänderung.

Geg: $l = 1 \text{ m}$, $d = 3 \text{ mm}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $A = 5 \text{ cm}^2$, $\Delta T = 350 \text{ K}$

Lsg: a) $\Delta T = 250 \text{ K}$, b) $\sigma = -E(\alpha \Delta T - d/l)$, $N = 270900 \text{ N}$, $\sigma = 541.8 \text{ N/mm}^2$

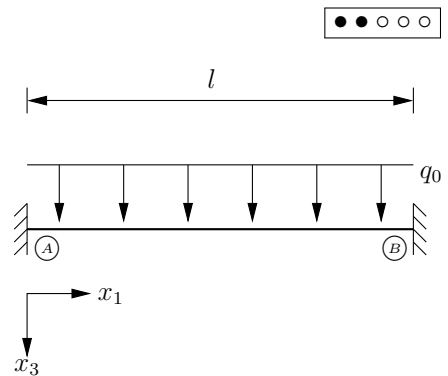
3 Elastostatik von Balken

Aufgabe 3.1.

Ein kräftefrei eingespannter Balken ($EI_{22} = \text{konst.}$) wird durch die konstante Linienkraft q_0 beansprucht. Berechnen Sie die Durchbiegung $w(x_1)$ des Balkens und geben Sie die maximale Durchbiegung an.

Geg: $l, q_0, EI_{22} = \text{konst.}$

Lsg:
$$w(x_1) = \frac{q_0 l^4}{24 EI_{22}} \left(\frac{x_1^4}{l^4} - 2 \frac{x_1^3}{l^3} + \frac{x_1^2}{l^2} \right)$$

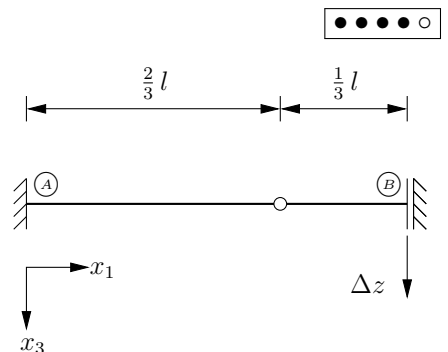


Aufgabe 3.2.

Der skizzierte kräftefrei eingespannte Balken ($EI_{22} = \text{konst.}$) mit Gelenk wird in $\textcircled{B}$ um den Wert Δz in x_3 -Richtung ausgelenkt. Berechnen Sie
a) die Gelenkkraft sowie
b) die Auflagerreaktionen in $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$.

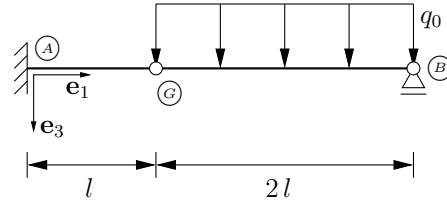
Geg: $l, EI_{22} = \text{konst.}, \Delta z$

Lsg: a) $G_3 = 9 \frac{EI_{22}}{l^3} \Delta z$, b) $A_3 = -G_3, M_A = \frac{2}{3} G_3 l, B_3 = G_3, M_B = \frac{1}{3} G_3 l$



Aufgabe 3.3.

Das skizzierte Tragwerk besteht aus zwei gelenkig verbundenen Balken und wird durch die konstante Linienkraft q_0 beansprucht. Bestimmen Sie die Durchbiegung, die die Balken durch die Belastung erfahren.



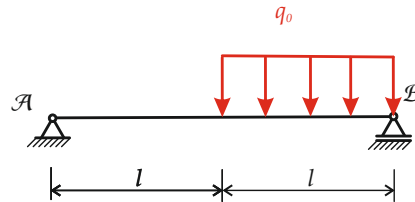
Geg: $l, q_0, EI_{22} = \text{konst.}$

Lsg: $0 \leq x_1 \leq l: EI w(x_1) = -\frac{1}{6} q_0 (l x_1^3 - 3 l^2 x_1^2)$

$$l \leq x_1 \leq 3l: EI w(x_1) = \frac{1}{24} q_0 (x_1^4 - 8 l x_1^3 + 18 l^2 x_1^2 - 12 l^3 x_1 + 9 l^4)$$

Aufgabe 3.4.

Der dargestellte Träger der Länge $2l$, dessen Eigengewicht vernachlässigt werden soll, wird halbseitig durch eine konstante Linienkraft q_0 belastet. Das Material des Bauteils besitzt den Elastizitätsmodul E während die Querschnittsfläche des Balkens ein Flächenmoment von I_y aufweist.



Bestimmen Sie die aus der Belastung resultierende Verformung des Trägers als Funktion der Koordinate x in Richtung der Längsachse.

Geg: q_0, l, E, I_y

Lsg: $0 \leq x \leq l: w(x) = (7l^3 - 2lx^2) q_0 x / (48EI),$

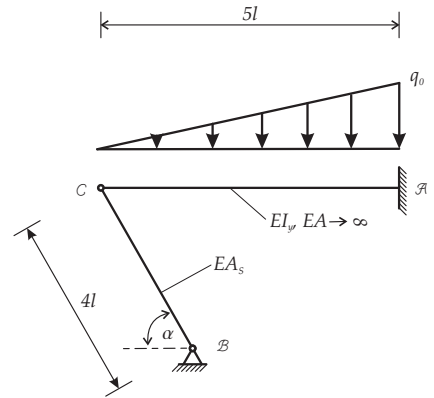
$$l \leq x \leq 2l: w(x) = (2l - x) (l^3 + 6lx^2 - 2x^3) q_0 / (48EI)$$

Aufgabe 3.5.



Ein horizontaler Balken (Länge $5l$, Biegesteifigkeit EI_y) ist im Punkt $\mathcal{A}$ eingespannt und wird durch eine dreiecksförmige Linienkraft (Maximum q_0) belastet. Ferner wird der Balken im Punkt $\mathcal{C}$ durch einen im Punkt $\mathcal{B}$ gelagerten Stab (Länge $4l$, Dehnsteifigkeit EA_S) gestützt. Bestimmen Sie

- alle Schnittgrößen des Systems,
- die sich ergebende Verformung.



Geg: $q_0, l, \alpha = 60^\circ, EI_y, EA_S$

Lsg:
$$\Delta l = -\frac{500 q_0 l^4}{\sqrt{3} (16 EI_y + 125 EA_S l^2)},$$

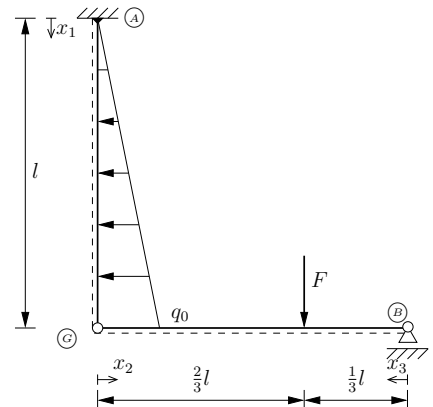
$$w(x) = \frac{q_0 [125 EA_S l^2 x (x^2 - 25 l^2) + 16 EI_y (12500 l^5 - 3125 l^4 x + x^5)]}{600 EI_y l [16 EI_y l + 125 EA_S l^2]}$$

Aufgabe 3.6.



Gegeben ist ein System aus zwei gelenkig verbundenen, dehnsteifen Balken ($EA \rightarrow \infty$).

- Skizzieren Sie qualitativ die Durchbiegung des Systems.
- Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten $\textcircled{A}$ und $\textcircled{B}$ sowie die Gelenkkräfte in $\textcircled{C}$,
- die Schnittmomentenverläufe unter Verwendung der vorgegebenen Laufkoordinaten x_1, x_2, x_3 und
- die Biegelinien $EI w(x_1), EI w(x_2), EI w(x_3)$ mittels Integration der Momentenverläufe.



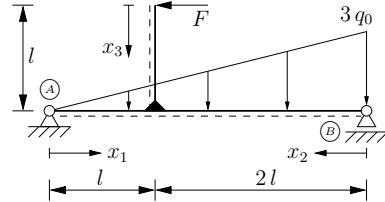
Geg: $q_0, l, F = q_0 l, EI, EA \rightarrow \infty, GA \rightarrow \infty,$
 $x_1 \in [0, l], x_2 \in [0, \frac{2}{3} l], x_3 \in [0, \frac{1}{3} l]$

Lsg: $w(x_2) = 4 F l^2 x_2 / 81 - F x_2^3 / 18$

Aufgabe 3.7.

Gegeben ist ein System aus zwei biegesteif verbundenen, dehnsteifen Balken ($EA \rightarrow \infty$).

- Skizzieren Sie qualitativ die Durchbiegung in Bezug auf das undeformierte System.
- Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten (A) und (B),
- die Schnittmomentenverläufe unter Verwendung der vorgegebenen Laufkoordinaten x_1 , x_2 , x_3 sowie
- die Biegelinien $EI w(x_1)$, $EI w(x_2)$, $EI w(x_3)$ mittels Integration der Momentenverläufe.



Geg: $q_0, l, F = q_0 l, EI, EA \rightarrow \infty, GA \rightarrow \infty$,

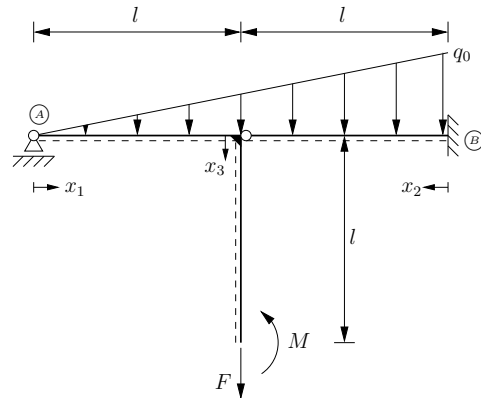
$$x_1 \in [0, l], x_2 \in [0, 2l], x_3 \in [0, l]$$

Lsg: c) $M(x_2) = \frac{8}{3} q_0 l x_2 - \frac{3}{2} q_0 x_2^2 + \frac{1}{6l} x_2^3$, $M(x_3) = -q_0 l x_3$

Aufgabe 3.8.

Gegeben ist ein System aus einem biegesteif gewinkeltem Rahmen und einem gelenkig verbundenen Balken. Alle Komponenten besitzen die Biegesteifigkeit EI ($EA \rightarrow \infty, GA \rightarrow \infty$).

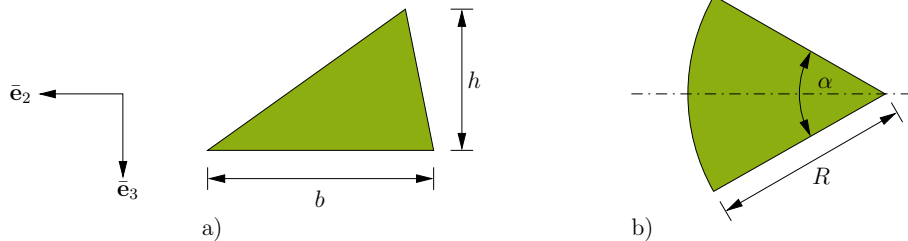
- Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten (A) und (B).
- Berechnen Sie die Biegelinien $EI w(x_1)$, $EI w(x_2)$ und $EI w(x_3)$ mittels Integration der Streckenlasten.



Geg: $q_0, l, F = q_0 l, M = q_0 l^2, EI, EA \rightarrow \infty, GA \rightarrow \infty$,

$$x_1 \in [0, l], x_2 \in [0, l], x_3 \in [0, l]$$

Lsg: b) $EI w(x_1) = \frac{1}{240} \frac{q_0}{l} x_1^5 - \frac{13}{72} q_0 l x_1^3 + \frac{14}{45} q_0 l^3$

Aufgabe 3.9.

Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente der skizzierten Balkenquerschnitte, bezogen auf die jeweiligen Flächenschwerpunkte, für eine Biegung um die $\bar{e}_2$ -Achse.

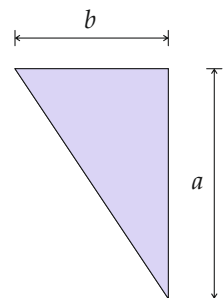
Geg: b, h, R, α

Lsg: a) $I_{22} = \frac{1}{36} b h^3$, b) $I_{22} = \frac{1}{8} R^4 (\alpha - \sin \alpha)$

Aufgabe 3.10.

Gegeben ist der dargestellte Querschnitt eines beliebigen Bauteils. Bestimmen Sie

- die Lage des Flächenschwerpunktes,
- ausgehend vom Schwerpunkt-Koordinatensystem die Flächenmomente,
- die Lage der Hauptträgheitsachsen sowie die Hauptträgheitsmomente.

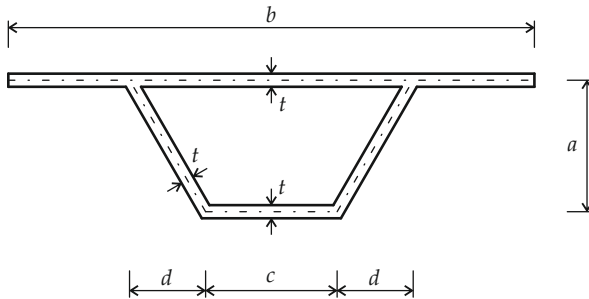


Geg: $a = \frac{3}{2}b, b$

Lsg: a) $S = \{\frac{1}{3}b, \frac{1}{2}b\}$, b) $I_y = \frac{3}{32}b^4, I_z = \frac{1}{24}b^4, I_{yz} = -\frac{1}{32}b^4$,
c) $\varphi_0 = 25,097^\circ, I_{\bar{y}} = \frac{1}{192}(13 + \sqrt{61})b^4$

Aufgabe 3.11.

Gegeben ist der dargestellte Querschnitt eines Bauteils.



Bestimmen Sie

- die Lage des Flächenschwerpunktes,
- ausgehend von den Schwerpunkt-Koordinaten die Flächenmomente,
- die Lage der Hauptträgheitsachsen sowie die Hauptträgheitsmomente.

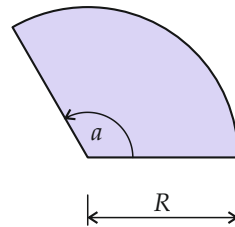
Geg: $a, b = 4a, c = a, d = \frac{3}{5}a, t = \frac{1}{10}a$

Lsg: b) $I_y = 0,1141 a^4, I_z = 0,6976 a^4, I_{yz} = 0$

Aufgabe 3.12.

Gegeben ist der dargestellte Querschnitt eines Bauteils. Bestimmen Sie

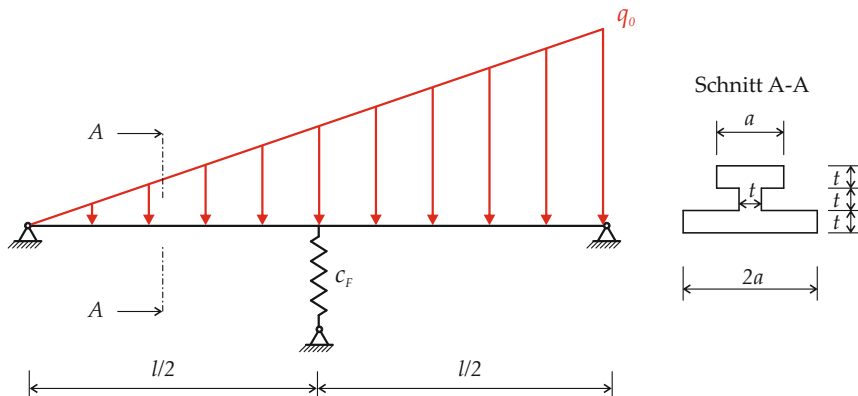
- die Lage des Flächenschwerpunktes,
- ausgehend von den Schwerpunkt-Koordinaten die Flächenmomente,
- die Lage der Hauptträgheitsachsen sowie die Hauptträgheitsmomente.



Geg: α, R **Lsg:** b) $I_y = \frac{1}{72} R^4 \left[9 (\alpha - \sin(\alpha) \cos(\alpha)) - \frac{16 (\cos(\alpha) - 1)^2}{\alpha} \right]$

Aufgabe 3.13.

Der in der Skizze dargestellte Balken der Länge l , der in seiner Mitte durch eine Feder der Steifigkeit c_F zusätzlich gelagert ist, besteht aus einem Material mit dem Elastizitätsmodul E und wird durch eine dreieckförmige Linienkraft mit dem maximalen Wert q_0 belastet. Der Querschnitt des Bauteiles ist im Schnitt A – A dargestellt.



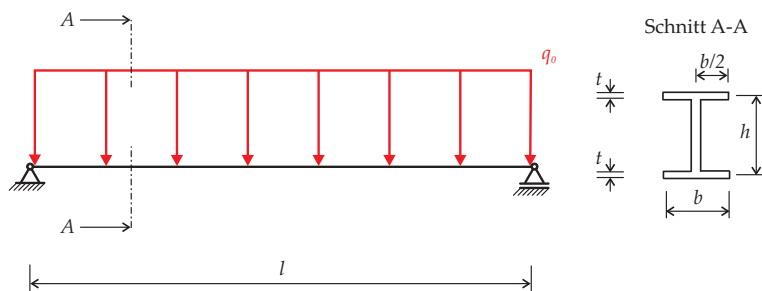
Bestimmen Sie die Auflagerkräfte und Schnittgrößenverläufe des Systems.

Geg: $q_0, l, E, a, t = a/3, c_F$

Lsg: $F_F = -5 c_F q_0 l^4 / (16 (48 E I_y + c_F l^3)), A = C/2 + q_0 l/6$

Aufgabe 3.14.

Der in der Skizze dargestellte Balken der Länge l besteht aus einem Material mit dem Elastizitätsmodul E und wird durch eine konstante Linienkraft q_0 belastet. Der Querschnitt des Bauteiles ist im Schnitt A–A dargestellt.



Bestimmen Sie

a) den Normalspannungsverlauf in dem Querschnitt, der durch Biegemomente

maximal beansprucht wird sowie
b) die Biegelinie des Balkens.

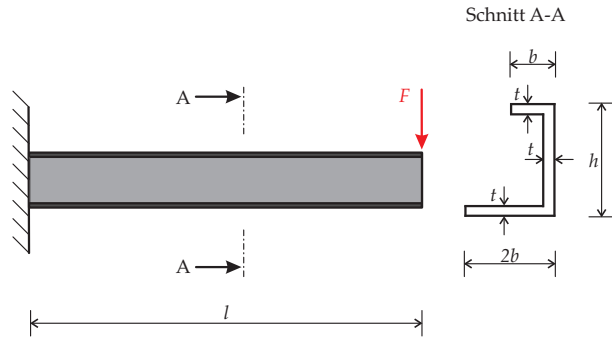
Geg: $q_0, l, E, h, b, t \ll h, b$

Lsg: $\sigma(z) = 3 q_0 l^2 / (2 t h^2 (h + 6 b)) z, w(x) = q_0 (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x) / (24 E I_y)$

Aufgabe 3.15.



Ein einseitig eingespannter Balken wird am freien Ende durch eine im Schwerpunkt angreifende Einzelkraft F belastet. Der Schnitt A-A zeigt die Abmessungen des als dünnwandig anzunehmenden Querschnittes, die über die gesamte Länge des Bauteils gleich bleiben. Gegenüber der äußeren Belastung ist das Eigengewicht des Balkens zu vernachlässigen.



Bestimmen Sie

- die Lage des Schwerpunktes des Querschnittes,
- die Flächenmomente bzgl. des Schwerpunkt-Koordinatensystems,
- das Hauptachsensystem sowie die zugehörigen Hauptflächenmomente,
- die Spannungsverteilung $\sigma(y, z)$ an der Stelle des maximal wirksamen Biegemomentes $M_{y,max}$,
- die Lage der neutralen Faser im korrespondierenden Querschnitt sowie
- die in diesem Querschnitt maximal wirkende Zug- und Druckspannung.

Geg: $F, l = 10 \text{ m}, h = 26 \text{ cm}, b = 13 \text{ cm}, t = 1,75 \text{ cm}, t \ll h, b$

Lsg: a) (6,5cm, 10,4cm),

b) $I_{yy} \approx 13328,47 \text{ cm}^4, I_{zz} \approx 6728,32 \text{ cm}^4, I_{yz} \approx 3844,75 \text{ cm}^4,$

c) $\varphi_0 \approx -24,68^\circ, I_{y_0} \approx 15095,21 \text{ cm}^4, I_{z_0} \approx 4961,59 \text{ cm}^4,$

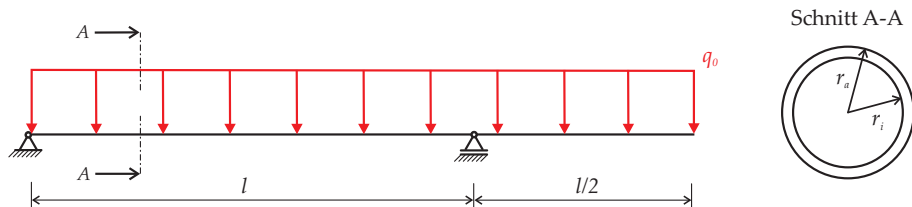
e) $\overset{\circ}{y} = 0,71 \overset{\circ}{z},$

f) $\sigma_z^{\max} \approx 1,74 F/\text{cm}^2, \sigma_D^{\max} \approx -1,27 F/\text{cm}^2$

Aufgabe 3.16.



Der in der Skizze dargestellte Balken der Länge $3/2 l$ besteht aus einem Material mit dem Elastizitätsmodul E und wird durch eine konstante Linienkraft q_0 belastet. Der Querschnitt des Bauteiles ist im Schnitt A-A dargestellt.



Bestimmen Sie

- den Normalspannungsverlauf in Polarkoordinaten r und φ in dem Querschnitt, der maximal durch Biegemomente beansprucht wird sowie
- die Biegelinie des Balkens.

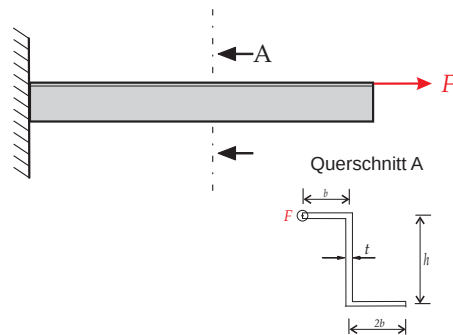
Geg: q_0, l, E, r_i, r_a

Lsg: a) $\sigma(z) = \frac{q_0 l^2}{2\pi(r_a^4 - r_i^4)} r \sin(\varphi)$, b) $w_I(x) = \frac{q_0 x}{48 EI_y} (l^3 - 3lx^2 + 2x^3)$

Aufgabe 3.17.



Ein einseitig eingespannter Balken wird am freien Ende durch eine Einzelkraft F belastet. Die Abmessungen des als dünnwandig anzunehmenden Querschnittes, die über die gesamte Länge des Bauteils gleich bleiben, sind der Detailzeichnung zu entnehmen.



Gegenüber der äußeren Belastung ist das Eigengewicht des Balkens zu vernachlässigen. Bestimmen Sie

- die Lage des Schwerpunktes des Querschnittes,
- die Flächenmomente bzgl. des Schwerpunkt-Koordinatensystems,
- das Hauptachsensystem sowie die zugehörigen Hauptflächenmomente,
- die Spannungsverteilung $\sigma(y, z)$ im Querschnitt des Trägers,
- die Lage der neutralen Faser sowie

f) die maximal wirkende Zug- und Druckspannung.

Geg: $F, h = 20 \text{ cm}, b = 7,5 \text{ cm}, t = 0,85 \text{ cm}, t \ll h, b$

Lsg: a) (1,98cm, 8,24cm),

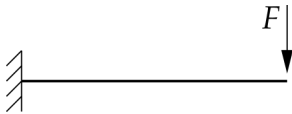
b) $I_{yy} \approx 2366,67 \text{ cm}^4, I_{zz} \approx 933,40 \text{ cm}^4, I_{yz} \approx -1068,75 \text{ cm}^4,$

c) $\varphi_0 \approx 28,08^\circ, I_{y_0} \approx 2936,81 \text{ cm}^4, I_{z_0} \approx 363,26 \text{ cm}^4,$

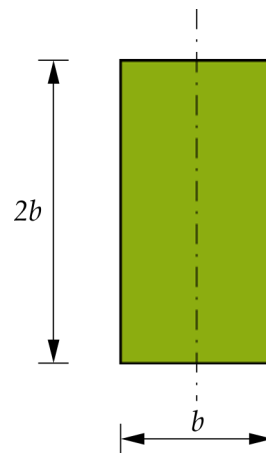
e) $\overset{\circ}{y} = 0,65 \overset{\circ}{z} - 3,55 \text{ cm},$

f) $\sigma_Z^{\max} \approx 12,55 \cdot 10^{-2} F/\text{cm}^2, \sigma_D^{\max} \approx -10,00 \cdot 10^{-2} F/\text{cm}^2$

Aufgabe 3.18.



Ein Kragarm mit dem skizzierten Querschnitt wird in der Symmetrieebene am freien Ende mit der Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung über die Höhe des Querschnitts.



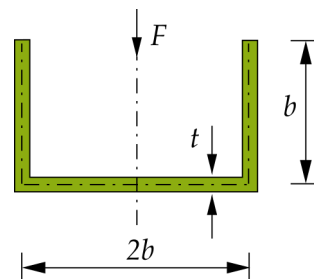
Geg: b, F

Lsg: $\sigma_{13}(z) = \frac{3F}{4b^2} \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)$

Aufgabe 3.19.



Ein Kragarm mit dem skizzierten, dünnwandigen Querschnitt wird in der Symmetrieebene am freien Ende mit der Kraft F belastet. Bestimmen Sie den Schubspannungsverlauf im Querschnitt.

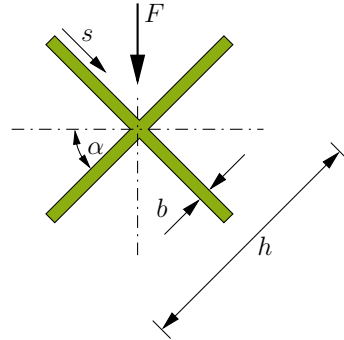


Geg: $F, b, t \ll b$

Lsg: $\sigma_{13}(z) = \frac{3F(9b^2 - 16z^2)}{40b^3t}$

Aufgabe 3.20.

Ein Kragarm mit dem skizzierten Querschnitt wird in der Symmetrieebene am freien Ende mit der Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Schubspannung an der Stelle s im Balkenquerschnitt.

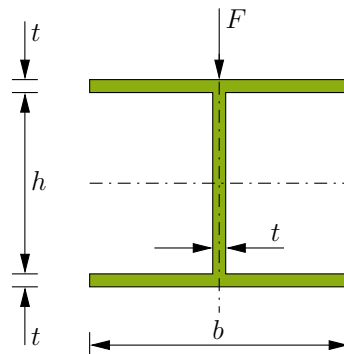


Geg: $b, h, F, \alpha = 45^\circ, 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(h-b)$

Lsg: $\sigma_{13} = -\frac{3\sqrt{2}bs(h-s)}{bh^3 + b^3h - b^4}$

Aufgabe 3.21.

Ein Kragarm mit der skizzierten Querschnittsfläche wird am freien Ende durch die Einzelkraft F beansprucht. Bestimmen Sie die durch die Kraft F bedingte Schubspannungsverteilung im Querschnitt des Trägers.



Geg: $F, b, h, t \ll b, t \ll h$

Lsg: $I_{22} = \frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{2}bth^2,$
 $\sigma_{s2}^{\max} = \frac{F}{8I_{22}}(h^2 + 4hb)$

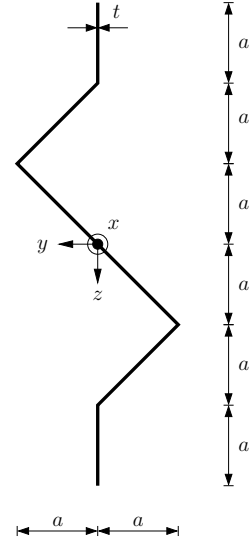
Aufgabe 3.22.

Ein Kragarm mit dem skizzierten, dünnwandigen Querschnittsprofil (Dicke t) wird am freien Ende durch die Einzelkraft F beansprucht.

- Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{22} bezogen auf den Flächenschwerpunkt.
- Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung im Querschnitt des Trägers und skizzieren Sie den Verlauf unter Angabe der charakteristischen Eckwerte (Nulldurchgänge, Extremwerte, Eckwerte).

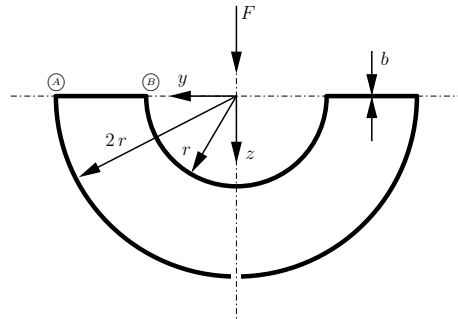
Geg: $F, a, t \ll a$

Lsg: a) $I_{22} = (38 + 16\sqrt{2}) t a^3 / 3$, b) $\tau(a) = 5 a^2 F / (2 I_{22})$

**Aufgabe 3.23.**

Ein dünnwandiger Kragarm ($b \ll r$) mit dem skizzierten Querschnittsprofil wird am freien Ende durch die Einzelkraft F belastet.

- Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{22} bezogen auf den Flächenschwerpunkt.
- Bestimmen Sie die Schubspannung im dünnwandigen Querschnitt des Trägers in den Punkten (A) und (B).



Geg: F, r, l, b

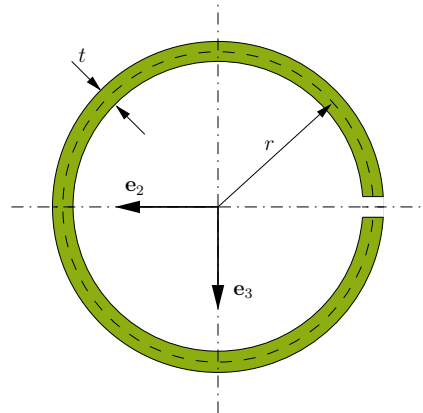
Lsg: a) $x_s = \frac{10 r}{2 + 3 \pi}$, $I_{22} = \left(\frac{9 \pi}{2} - \frac{100}{2 + 3 \pi} \right) r^3 b$

Aufgabe 3.24.

Ermitteln Sie die Lage des Schubmittelpunktes für den dargestellten geschlitzten, dünnwandigen Kreisringquerschnitt.

Geg: $r, t \ll r$

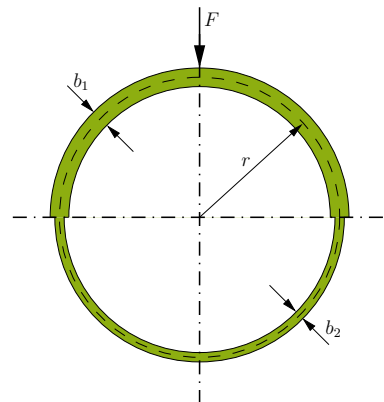
Lsg: $I_{22} = \pi t r^3, x_2 = 2r$

**Aufgabe 3.25.**

Der Querschnitt eines Kragarms, der am freien Ende durch die Kraft F belastet wird, setzt sich wie skizziert aus zwei Halbkreisringen mit den Wandstärken b_1 und b_2 zusammen. Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung im Querschnitt.

Geg: $F, r, b_1 \ll r, b_1 = 2b_2$

Lsg: $I_{22} = \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{4}{3\pi}\right) b_2 r, \sigma_{\alpha 1}^{\max} = \frac{4F}{3I_{22}r^2}$



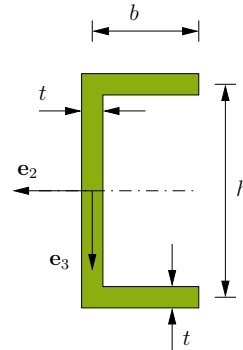
Hinweis: Aus Symmetriegründen kann die Schubspannung am oberen wie auch am unteren Ende des Querschnittes gleich null angenommen werden.

Aufgabe 3.26.

Ein einseitig eingespannter U-Träger wird am freien Ende durch eine Kraft F belastet. Wo muss die Kraft F im Querschnitt angreifen, damit dieser nicht tordiert wird?

Geg: $F, b, h, t \ll b$

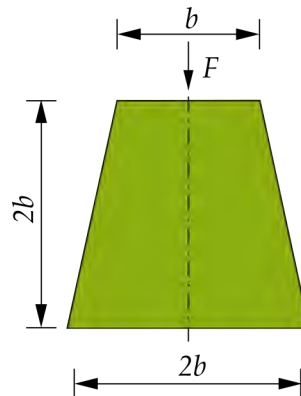
Lsg: $I_{22} = \frac{t h^3}{12} + \frac{h^2 b t}{2}, x_2 = \frac{t h^2 b^2}{4 I_{22}}$

**Aufgabe 3.27.**

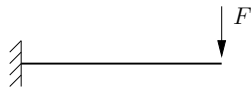
Ein Kragarm mit dem skizzierten, trapezförmigen Querschnitt wird in der Symmetrieebene am freien Ende mit der Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Verteilung der über die Breite gemittelten Schubspannung.

Geg: b, F

Lsg: $I_{22} = \frac{26b^4}{27}, \sigma_{13}(z) = \frac{F(-3200b^3 + 3402bz^2 + 729z^3)}{234b^4(28b + 9z)}$



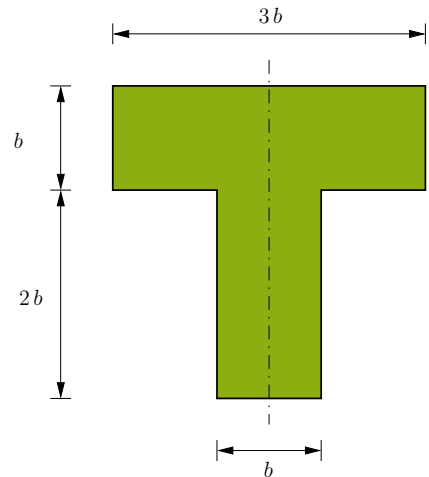
Aufgabe 3.28.



Ein Kragarm mit dem skizzierten Querschnitt wird in der Symmetrieebene am freien Ende mit der Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Verteilung der über die Breite gemittelten Schubspannung.

Geg: b, F

Lsg: $\sigma_{13}(z) = \frac{30 Q_3}{217 b^4} \left(-z^2 + \frac{361}{100} b^2 \right)$



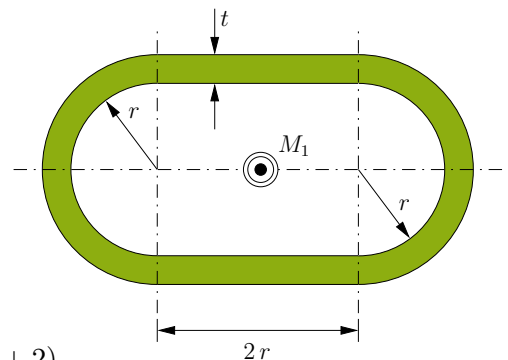
Aufgabe 3.29.



Ein dünnwandiges Rohr der Länge L , Schubmodul G , wird an den Stirnflächen durch entgegengesetzt wirkende Torsionsmomente M_1 beansprucht. Ermitteln Sie die Spannungsverteilung im Rohr und geben Sie die sich einstellende Verdrehung an.

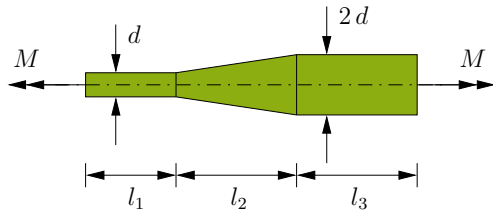
Geg: $M_1, G, r, t \ll r, L$

Lsg: $\sigma_{s1} = \frac{M_1}{2 t r^2 (\pi + 4)}, \varphi(x_1) = \frac{M_1 (\pi + 2)}{2 G t r^3 (\pi + 4)^2} x_1$



Aufgabe 3.30.

Eine Welle mit kreisförmigem Querschnitt (Schubmodul G) wird wie dargestellt durch das Drehmoment M beansprucht. Bestimmen Sie die Spannungsverteilung in der Welle sowie deren Verdrehung.

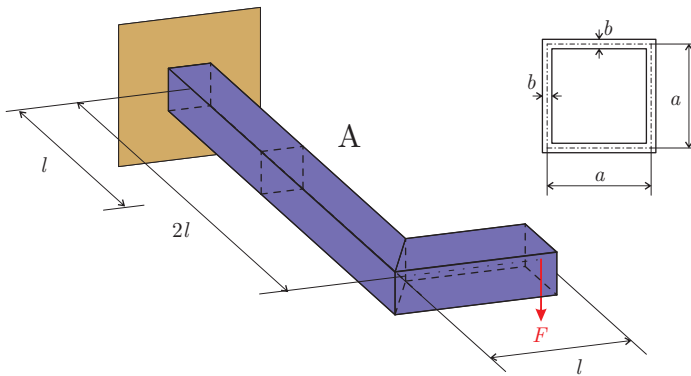


Geg: M, G, l_1, l_2, l_3, d

Lsg: $\varphi_{\max} = \frac{32 M}{\pi G d^4} \left(l_1 + \frac{7}{24} l_2 + \frac{1}{16} l_3 \right)$

Aufgabe 3.31.

Der abgebildete, als dünnwandige Kastenkonstruktion ausgeführte Kragarm (Elastizitätsmodul E , Schubmodul G) wird wie skizziert am freien Ende durch eine Einzelkraft F belastet.



Bestimmen Sie für den Querschnitt A die aus dem Torsionsmoment resultierende Schubspannung sowie die Verdrehung φ_A an der Knickstelle ($x = 2l$) des Balkens.

Geg: $F, l, a, b \ll a, E, G$

Lsg: $\tau = \frac{Fl}{2a^2b}, \varphi_A = \frac{2Fl^2}{Ga^3b}$



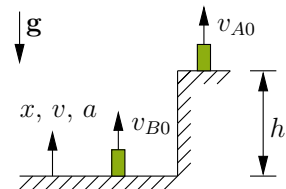
Kinematik, Kinetik, Dynamik

4 Kinematik und Kinetik von Punktmassen

Aufgabe 4.1.



Vom Dach eines Gebäudes der Höhe $x = h$ wird ein Feuerwerkskörper (A) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{A0} senkrecht nach oben geschossen, während gleichzeitig ein zweiter Feuerwerkskörper (B) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{B0} vom Boden aus gestartet wird. Bestimmen Sie

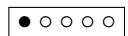


- die maximale Flughöhe des Körpers (B),
- die Flugzeit des Körpers (B),
- die Höhe, in der sich die beiden Körper begegnen sowie
- die Relativgeschwindigkeit von Körper (A) bezüglich Körper (B).

Geg: $h = 30 \text{ m}$, $v_{A0} = 15 \text{ m/s}$, $v_{B0} = 25 \text{ m/s}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lsg: a) $x_B \approx 31,86 \text{ m}$, b) $t \approx 5,1 \text{ s}$, c) $x_A \approx 30,86 \text{ m}$, d) $\Delta v = -10 \text{ m/s}$

Aufgabe 4.2.



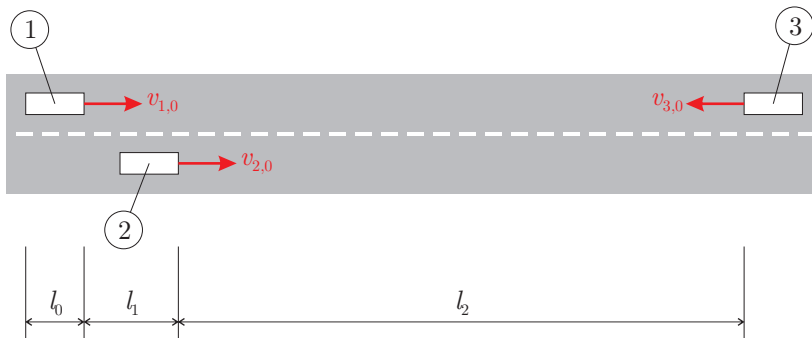
Ein Aufzug wird aus dem Stillstand $x = 0$ heraus auf einer Strecke von 50 m mit $a_1(x)$ beschleunigt und fährt dann 15 s mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Anschließend wird er durch einen Bremsvorgang mit a_3 wieder zum Stillstand gebracht. Berechnen Sie den Weg, den der Aufzug während der Fahrt insgesamt zurücklegt.

Geg: $a_1(x) = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(1 - \frac{1}{50 \text{ m}} x \right)$, $a_3 = -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Lsg: $x \approx 383,77 \text{ m}$

Aufgabe 4.3.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ schert das Fahrzeug (1) (Länge l_0) mit der Momentangeschwindigkeit $v_{1,0}$ zum Überholen des Fahrzeugs (2) aus, welches mit konstanter Geschwindigkeit $v_2(t) = v_{2,0}$ fortbewegt wird. Der Abstand zwischen den vorderen Enden der beiden Fahrzeuge beträgt zu diesem Zeitpunkt l_1 . Auf der Gegenspur nähert sich gleichzeitig ein LKW mit der konstant anzunehmenden Geschwindigkeit $v_3(t) = v_{3,0}$, welcher noch eine Distanz von l_2 zur Vorderkante des Fahrzeugs (2) aufweist.



- Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Fahrzeugen (1) und (3) nach erfolgtem Überholvorgang unter der Annahme, dass Fahrzeug (1) vom dargestellten Moment an konstant mit $a_1(t) = 1.0 \text{ m/s}^2$ beschleunigt wird. Der Überholvorgang soll dabei als abgeschlossen gelten, wenn das hintere Ende von Fahrzeug (1) und das vordere Ende von Fahrzeug (2) die gleiche Position in horizontaler Richtung haben (Fahrzeug (1) befindet sich auf der Gegenspur genau vor Fahrzeug (2)).
- Wieviel Zeit bleibt dem Fahrer des Fahrzeugs (1) danach noch, um die Spur zu wechseln und einen Zusammenprall mit Fahrzeug (3) zu vermeiden? Es gelte die Annahme, dass Fahrzeug (1) nach dem Überholvorgang eine konstante Geschwindigkeit beibehält.

Geg: $v_{1,0} = 110 \text{ km/h}$, $v_{2,0} = 85 \text{ km/h}$, $v_{3,0} = 70 \text{ km/h}$,
 $l_0 = 4,25 \text{ m}$, $l_1 = 50 \text{ m}$, $l_2 = 300 \text{ m}$

Lsg: a) $\Delta x \approx 55,99 \text{ m}$, b) $t_z \approx 1,01 \text{ s}$

Aufgabe 4.4.



Ein Flugzeug setzt mit einer (momentanen) Geschwindigkeit v_0 auf einer Landebahn auf. Bestimmen Sie die notwendige Länge der Landebahn vom Landepunkt des Flugzeugs aus



- a) unter Voraussetzung der gegebenen Beschleunigungs-Zeit-Funktion
 $a(t) = -0.2 \text{ m/s}^3 t$.
- b) unter Voraussetzung der gegebenen Beschleunigungs-Weg-Funktion
 $a(x) = -0.125 \frac{\text{m}^{5/9}}{\text{s}^2} x^{4/9}$.

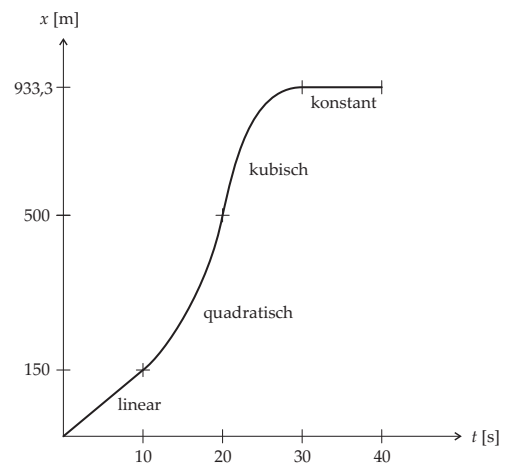
Geg: $v_0 = 250 \text{ km/h}$ **Lsg:** a) $\Delta s \approx 1226 \text{ m}$, b) $\Delta s \approx 1195,16 \text{ m}$

Aufgabe 4.5.



In einem Versuch wurde die Weg-Zeit-Funktion eines Fahrzeugs ermittelt und durch das angegebene Diagramm visualisiert. Die Übergänge der unterschiedlichen Bereiche sind dabei stets stetig und stetig differenzierbar, es treten also keine Knicke oder Sprünge in der Kurve auf.

- a) Bestimmen Sie aus dem gegebenen Diagramm die Weg-Zeit-Funktion $x(t)$.
- b) Leiten Sie daraus die Funktionen der Geschwindigkeit $v(t)$ sowie der Beschleunigung $a(t)$ ab.
- c) Stellen Sie $v(t)$ und $a(t)$ graphisch dar.



Geg: a, b, c

Lsg: $x_{III}(t) = -19/60 \text{ m/s}^3 t^3 + 21 \text{ m/s}^2 t^2 - 405 \text{ m/s } t + 8200/3 \text{ m}$

Aufgabe 4.6.

Eine Rakete startet mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 80^\circ$ zur Oberfläche. Die Triebwerke sorgen für eine 11 Sekunden anhaltende Beschleunigung von $17,1 \text{ m/s}^2$. Danach wird die zweite Brennstufe dazu geschaltet, sodass sich die Beschleunigung für weitere 7 Sekunden nochmals um 6 m/s^2 erhöht. Anschließend geht die Rakete in den freien Fall über. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

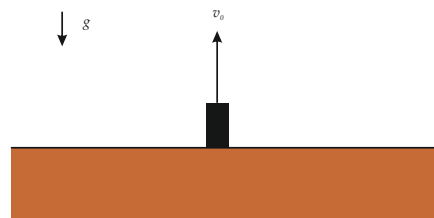
- Welchen Geschwindigkeitsvektor und welchen Geschwindigkeitsbetrag weist die Rakete am Ende der zweiten Brennstufe auf?
- In welcher Höhe befindet sie sich dann?
- Nach welcher Zeit ausgehend vom Start beginnt die Rakete den Sinkflug?
- Welche maximale Höhe erreicht sie und wo befindet sich ihr Landepunkte bezogen auf den Startpunkt?



Lsg: a) $\mathbf{v}_{II}^E = \begin{bmatrix} 60,74 \\ 167,91 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m/s}$, b) $y_{II}^E = 1283,67 \text{ m}$, d) $x_A = 2975,79 \text{ m}$

Aufgabe 4.7.

Ein Körper wird bei einem Experiment auf einem neu entdeckten Planeten mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschossen. Nach der Zeit t_A trifft dieser wieder auf der Oberfläche auf.



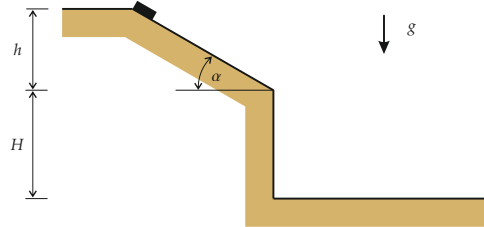
- Wie lässt sich aus den gegebenen Daten auf die vorherrschende Gravitationsbeschleunigung des Planeten schließen?
- Bestimmen Sie die maximale Flughöhe des Körpers.

Geg: v_0, t_A **Lsg:** a) $g = 2 v_0 / t_A$, b) $h_{max} = v_0 t_A / 4$

Aufgabe 4.8.



Eine Masse wird wie dargestellt auf einer schiefen Ebene in der Höhe $H + h$ festgehalten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Masse losgelassen und rutscht reibungsfrei auf der Ebene ab. Bestimmen Sie die Aufschlagstelle der Masse auf dem Boden.



Geg: $H = 0,4 \text{ m}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

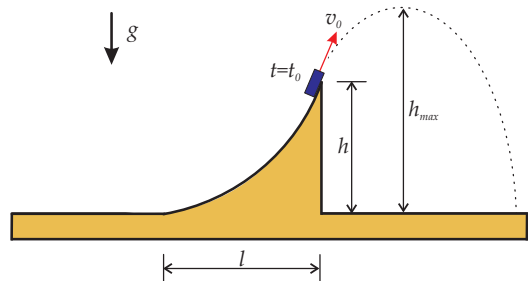
Lsg: $\Delta x = 0,39 \text{ m}$, gemessen ab der unteren Kante der Ebene

Aufgabe 4.9.



Ein als Punktmasse anzunehmender Körper verlässt zum Zeitpunkt $t = t_0$ die dargestellte Rampe der Länge l und Höhe h , welche in Form einer quadratischen Parabel konstruiert wurde, mit der Geschwindigkeit v_0 . Bestimmen Sie

- die maximale Flughöhe $h_{\max}$ des Körpers,
- den Ort des Auftreffens des Körpers auf das Fundament.



Geg: l , $h = \sqrt{3}/2 l$, v_0 , g

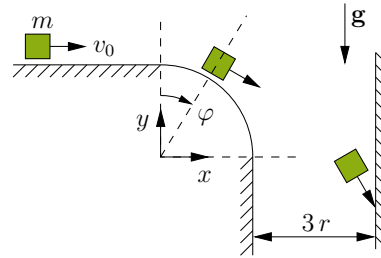
Lsg: a) $h_{\max} = 3 v_0^2 / (8 g) + \sqrt{3} l / 2$, b) $\Delta x = v_0 t_A / 2 + l$,

$$t_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{3}{4} \frac{v_0^2}{g^2} + 2 \frac{h}{g}}$$

Aufgabe 4.10.

Eine punktförmige Masse bewegt sich reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v_0 auf einer horizontalen Bahn, die schließlich in einem kreisförmig abfallenden Abschnitt mit dem Krümmungsradius r endet. Bestimmen Sie

- den Ort, an dem die Masse die Bahn verlässt und
- die Höhe, in der die Masse an der gegenüberliegenden Wand auftrifft.

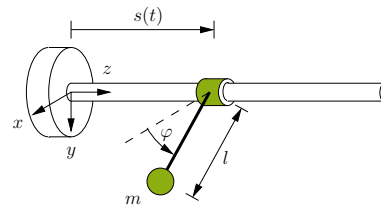


Geg: $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $r = 1 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lsg: a) $\varphi_0 \approx 36.82^\circ$, b) $y \approx -12,9 \text{ m}$

Aufgabe 4.11.

Das dargestellte System, bestehend aus einer horizontal verschieblich und drehbar gelagerten Masse m , soll eine aus einer Translation $s(t)$ und einer Rotation $\varphi(t)$ zusammengesetzte Bewegung ausführen. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung von m als Funktion der Zeit.

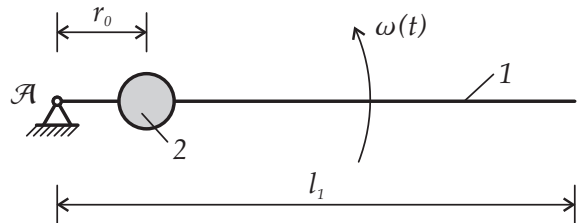


Geg: l , $s(t)$, $\varphi(t)$ **Lsg:** $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -l \sin \varphi \dot{\varphi} \\ +l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{bmatrix}$

Aufgabe 4.12.



Gegeben sei das skizzierte Modell einer Zentrifuge. Das System besteht dabei aus einem im Punkt $\mathcal{A}$ freidrehbar gelagerten Auslegerarm (1) der Länge l_1 sowie einer entlang des Auslegers reibungsfrei verschiebbaren Kapsel (2).

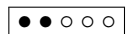


Im Rahmen eines Experimentes wird das System aus der dargestellten Ruhelage ($\omega(0) = 0$, $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$) heraus beschleunigt, wobei der Ausleger mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \alpha = \text{konst}$ rotieren soll. Bestimmen Sie die Bahn, auf der sich die Kapsel bewegt.

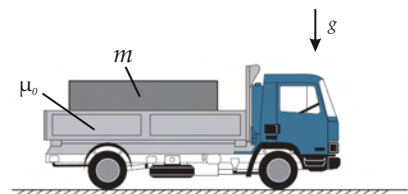
Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln(2x + 2\sqrt{x^2 - a^2})$

Geg: r_0 , α , $\omega(t) = \alpha$, m **Lsg:** $r(t) = \frac{r_0}{2e^{\alpha t}}(e^{2\alpha t} + 1)$

Aufgabe 4.13.



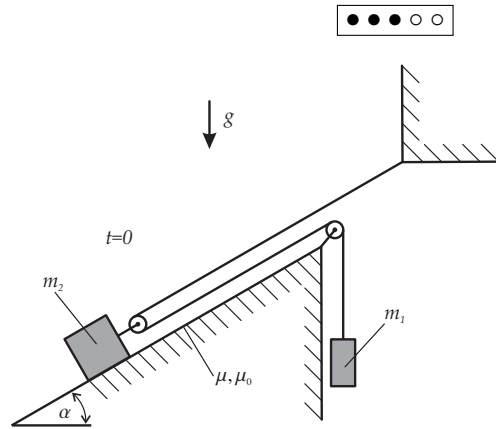
Ein mit einem Betonblock der Masse m beladener LKW fährt auf einer geraden Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 60 \text{ km/h}$. Die Kontaktfläche zwischen der Ladefläche und dem Block kann dabei durch den Haftreibungskoeffizienten μ_0 beschrieben werden. Bestimmen Sie den Bremsweg des Fahrzeugs, wenn es mit einer konstanten Verzögerung a_0 so schnell wie möglich zum Stillstand gebracht werden soll, ohne dass die Ladung dabei ins Rutschen kommt.



Geg: v_0 , μ_0 , g **Lsg:** $\Delta x_B = \frac{v_0^2}{2\mu_0 g}$

Aufgabe 4.14.

Das skizzierte System besteht aus zwei über ein masseloses Seil miteinander verbundenen Massen (m_1, m_2) sowie einem masselosen Rollenpaar und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der dargestellten Ruhelage heraus losgelassen, so dass es sich anschließend in Bewegung setzt. Bestimmen Sie die während der Bewegung übertragene Seilkraft sowie die Beschleunigungen der beiden Massen.



Geg: $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu_0 = 0,3$, $\mu = 0,25$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

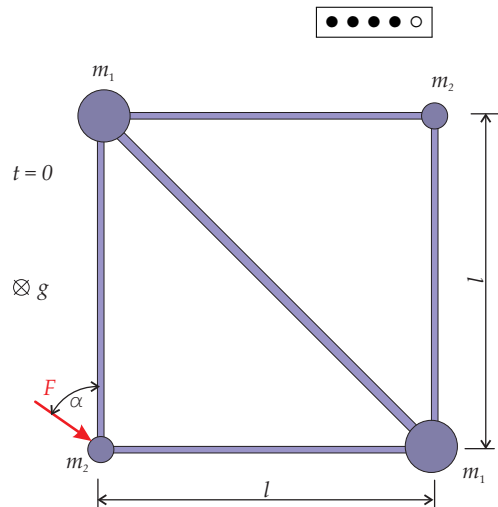
Lsg: $S \approx 79,56 \text{ N}$, $\ddot{x}_1 = g - s/m_1$, $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1/2$

Aufgabe 4.15.

Die dargestellte Konstruktion aus vier durch masselose Stäbe gelenkig miteinander verbundenen Massen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage heraus durch eine Kraft F beschleunigt. Bestimmen Sie die zum Zeitpunkt $t = 0$ im Diagonalstab wirkende Kraft.

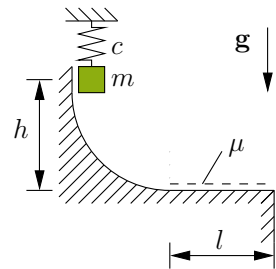
Geg: F , l , $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $\alpha = 60^\circ$

Lsg: $S = \frac{\sqrt{3} - 1}{4\sqrt{2}} F$



Aufgabe 4.16.

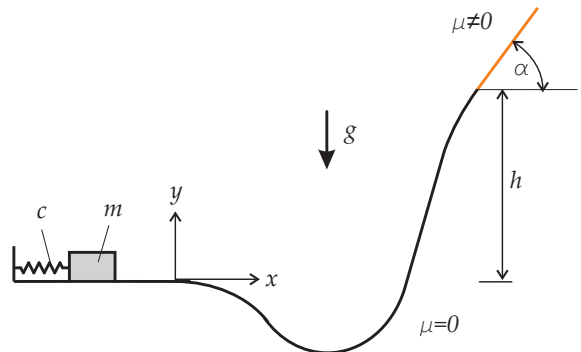
Eine punktförmige Masse m wird durch Entlastung einer mit der Kraft F_0 vorgespannten Feder entlang der dargestellten Bahn in Bewegung gesetzt. Die Masse gleitet zunächst reibungsfrei und erreicht schließlich einen reibungsbehafteten Bereich der Länge l . Wie groß muss die Vorspannkraft mindestens gewählt werden, damit die Masse den reibungsbehafteten Bereich überwinden kann?



Geg: c, m, g, μ, l, h **Lsg:** $F_0 = \sqrt{2 c m g (\mu l - h)}$

Aufgabe 4.17.

Eine punktförmige Masse m wird durch Entlastung einer vorgespannten Feder (Federkonstante c , Vorspannkraft F_0) entlang der dargestellten Bahn in Bewegung gesetzt. Die Bahn weist dabei einen reibungsfreien Bereich auf, dessen genaue Geometrie nicht bekannt ist, sowie einen zweiten, reibungsbehafteten Bereich, welcher gerade unter einem Winkel α zur Horizontalen verläuft und im bemaßten Punkt zur gekrümmten Bahn anschließt.



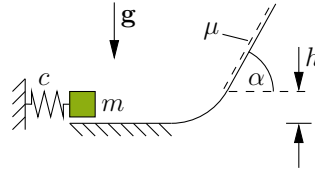
Es gilt die Annahme, dass die Punktmasse zu jeder Zeit Kontakt mit der Bahn aufweist. Bestimmen Sie die Höhe, welche die Masse maximal erreichen wird.

Geg: $m, c, F_0, h, \mu, \alpha = 60^\circ$

Lsg: $H = \frac{\sqrt{3} F_0^2 + 2 \mu m g h c}{2 (\mu + \sqrt{3}) m g c}$

Aufgabe 4.18.

Eine punktförmige Masse m wird durch Entlastung einer mit der Kraft F_0 vorgespannten Feder entlang der dargestellten Bahn in Bewegung gesetzt. Die Masse gleitet zunächst reibungsfrei und erreicht schließlich einen reibungsbehafteten Bereich. Bestimmen Sie die maximale Höhe, die die Masse erreichen kann.

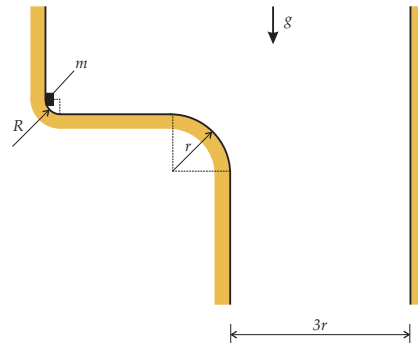


Geg: F_0, c, m, g, h, μ **Lsg:** $H = \frac{F_0^2 + 2\mu m g h c}{2 m g c (1 + \mu)}$

Aufgabe 4.19.

Eine Punktmasse m wird aus der dargestellten Lage dem Schwerfeld der Erde überlassen. Nachdem die Masse einen Vierteilkreisbogen (Radius R) durchlaufen hat, bewegt sie sich auf einer horizontalen Bahn, die schließlich an einem Abgrund mit einem erneut vierteilkreisförmigen Bahnabschnitt (Radius r) endet. Alle Flächen sind dabei als reibungsfrei anzunehmen. Bestimmen Sie

a) die Kontaktkraft, die entlang des gesamten Weges von der Masse auf das Fundament übertragen wird,



- b) den Ort, an dem die Masse die Bahn verlässt, sowie
c) die Höhe, in der die Masse an der gegenüberliegenden Wand auftrifft.

Geg: $m, r, R = r/4, g$

Lsg: a) $N(\varphi) = 3 m g \sin \varphi$ (Bereich I),

$N = m g$ (Bereich II),

$N(\varphi) = (3 \cos \varphi - 5/2) m g$ (Bereich III),

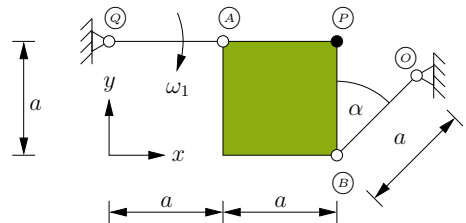
b) $\varphi_V \approx 33,56^\circ$, c) $y(t_A) \approx -12,69 r$

5 Kinematik und Kinetik von Starrkörpern

Aufgabe 5.1.



Das abgebildete Getriebe besteht aus einer quadratischen Scheibe sowie zwei drehbar gelagerten Stangen. In der dargestellten Lage rotiert die Stange zwischen $\textcircled{Q}$ und $\textcircled{A}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung in $\textcircled{P}$ in der dargestellten Lage.



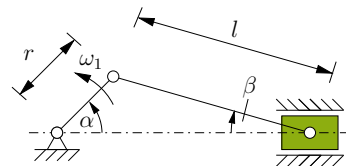
Geg: $\omega_1, a, \alpha = 45^\circ$

Lsg: $\mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 a \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} -5/4 a \omega_1^2 \\ (2 + \sqrt{2})/4 a \omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.2.



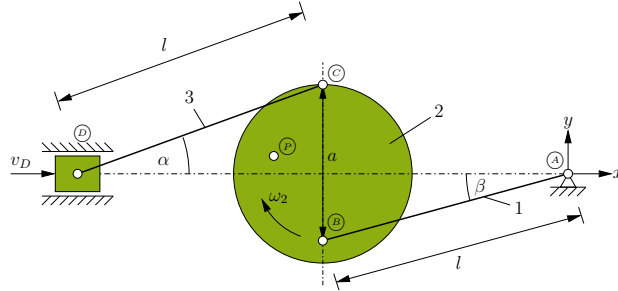
Die Kurbel eines Antriebs dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Pleuels sowie die Geschwindigkeit des Kolbens in der dargestellten Konfiguration. Die Bauteile können als starr angenommen werden.



Geg: $r, l, \alpha, \beta, \omega_1 = \text{konst.}$ **Lsg:** $\omega_2 = -\frac{\cos \alpha r}{\cos \beta l} \omega_1$

Aufgabe 5.3.

Ein ebenes Getriebe bestehend aus zwei starren, gelenkig verbundenen Stangen sowie einer starren Scheibe wird durch die konstante Kolbengeschwindigkeit v_D angetrieben. Zum skizzierten Zeitpunkt beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ω_2 .



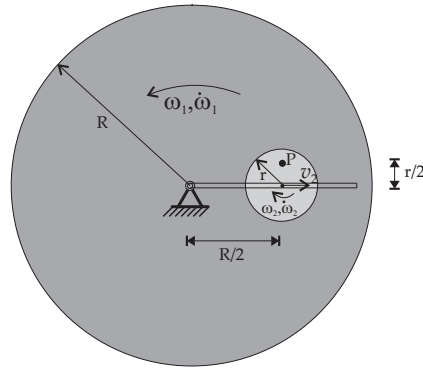
Bestimmen Sie die Lage des Punktes $\textcircled{P}$ so, dass sich dort zum skizzierten Zeitpunkt der Geschwindigkeitsvektor zu null ergibt ($\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$).

Geg: l, a, v_D, ω_2

Lsg: $\omega_1 = (v_D + \omega_2 a) / (l \sin \beta - l \tan \alpha \cos \beta)$

Aufgabe 5.4.

Auf einer Kreisscheibe (Radius R , momentane Winkelgeschwindigkeit ω_1 , momentane Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$) bewegt sich in einer Nut der Mittelpunkt einer zweiten Kreisscheibe (Radius r) mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 . Zusätzlich rotiert diese Scheibe mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω_2 um ihren Mittelpunkt und wird dabei beschleunigt (momentane Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$). Die Größen ω_2 und $\dot{\omega}_2$ beziehen sich auf ein sich mitdrehendes Koordinatensystem. Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeit und -beschleunigung des Punktes $\mathcal{P}$ in der dargestellten Lage.



Geg: $R = 10 \text{ m}, r = 2 \text{ m}, \omega_1 = 1/\text{s}, \omega_2 = 4/\text{s}, \dot{\omega}_1 = 1/\text{s}^2, \dot{\omega}_2 = 2/\text{s}^2, v_2 = 2 \text{ m/s}$

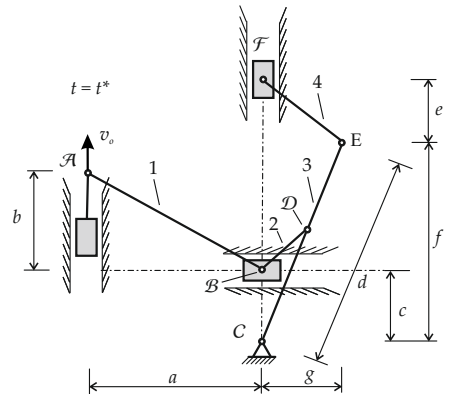
Lsg: $v_P^{\text{abs}} \approx 7,07 \text{ m/s}, a_P^{\text{abs}} \approx 12,65 \text{ m/s}^2$

Aufgabe 5.5.



Bei dem dargestellten, aus 4 masselosen und gelenkig miteinander verbundenen Stäben bestehenden System sei in der dargestellten Lage zum Zeitpunkt $t = t^*$ die Geschwindigkeit an der skizzierten Stelle durch v_0 gegeben. Bestimmen Sie für die dargestellte Lage

- die Lage der Momentanpole aller Stäbe,
- die Winkelgeschwindigkeiten aller Stäbe sowie
- die Geschwindigkeit $v_F(v_0)$ im Punkt F in Abhängigkeit von v_0 .



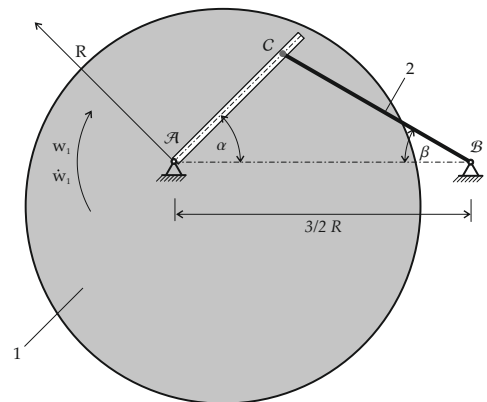
Geg: v_0, a, b, c, d, e, f, g

Lsg: b) $\omega_1 = v_0/a, \omega_2 = \omega_3 = v_0 b/(ac)$, c) $v_F = v_0 (f + e) b g/(ace)$

Aufgabe 5.6.



Die mit einer Nut versehene Kreisscheibe 1 (Radius R) dreht in der dargestellten Lage mit einer momentanen Winkelgeschwindigkeit ω_1 sowie momentanen Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ um das Lager A. In der Nut, die im dargestellten Moment unter einem Winkel α zur Horizontalen verläuft, ist im Punkt C der Stab 2 angeschlossen, der wiederum einen Neigungswinkel β aufweist. Bestimmen Sie für die dargestellte Lage die Winkelgeschwindigkeit ω_2 sowie Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$ des Stabs 2.

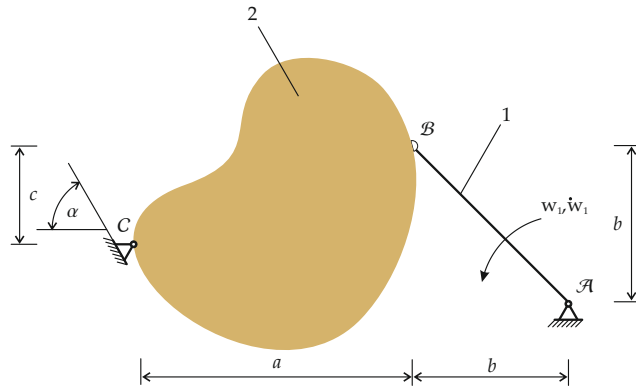


Geg: $R, \omega_1, \dot{\omega}_1, \alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$

Lsg: $\omega_2 = 2\omega_1/(\sqrt{3}-1), \dot{\omega}_2 = -2(7+4\sqrt{3})\omega_1^2 + (1+\sqrt{3})\dot{\omega}_1$

Aufgabe 5.7.

Ein willkürlich geformter, starrer Körper (2) ist im Punkt C verschieblich gelagert und wird durch den im Punkt B mit ihm verbundenen, um den Punkt A drehenden Stab (1) in Bewegung versetzt. Zum dargestellten Zeitpunkt weist dieser die Winkelgeschwindigkeit ω_1 sowie Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ auf.



Bestimmen Sie für die (nicht maßstäblich) dargestellte Lage die Winkelgeschwindigkeit ω_2 sowie Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$ des Körpers.

Geg: $\alpha = 60^\circ$, ω_1 , $\dot{\omega}_1$, $a = 2b$, b , $c = \sqrt{3}/3b$

Lsg: $\omega_2 = -(1 + \sqrt{3})\omega_1$, $\dot{\omega}_2 = (63 + 37\sqrt{3})\omega_1^2 - (5 + 3\sqrt{3})\dot{\omega}_1$

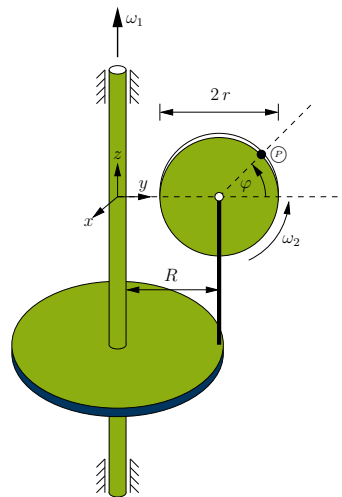
Aufgabe 5.8.

Das dargestellte System besteht aus zwei starren Scheiben, die mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um ihre Achsen rotieren. Bestimmen Sie für die abgebildete Konfiguration die Beschleunigung im Punkt P im angegebenen Koordinatensystem.

Hinweis: In der dargestellten Lage befindet sich Scheibe 2 in der $y-z$ -Ebene.

Geg: r , R , $\omega_1 = \text{konst.}$, $\omega_2 = \text{konst.}$

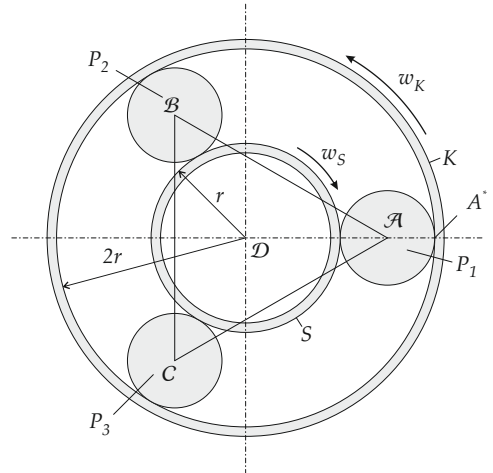
Lsg: $\mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} r \sin \varphi \omega_1 \omega_2 \\ -(R + r \cos \varphi) \omega_1^2 - r \cos \varphi \omega_2^2 \\ -r \sin \varphi \omega_2^2 \end{bmatrix}$



Aufgabe 5.9.



Im skizzierten Planetengetriebe drehen sich das Käfigrad K (Radius $2r$) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_K und das Sonnenrad S (Radius r) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_S um ihre gemeinsame Drehachse D. Die Planetenräder P_1 , P_2 und P_3 sind dabei so angeordnet, dass ihre Mittelpunkte (A, B, C) auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Bestimmen Sie



- die Winkelgeschwindigkeit des Planetenrades P_1 ,
- den Momentanpol des Planetenrades P_1 ,
- die Winkelgeschwindigkeit des Dreiecks ABC sowie
- die Beschleunigung des Punktes A^* des Planetenrades P_1 .

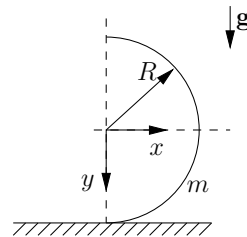
Geg: r, ω_K, ω_S

Lsg: a) $\omega_{P_1} = 2\omega_K + \omega_S$, c) $\omega_D = (2\omega_K - \omega_S)/3$,
 d) $\mathbf{a}_{A^*} = -((2\omega_K - \omega_S)^2 + 3(\omega_K + \omega_S)^2) r/6$

Aufgabe 5.10.



Eine halbkreisförmige, dünne Schale mit dem Radius R wird aus der gezeichneten Ruhelage losgelassen und beginnt im Schwerfeld der Erde auf der Unterlage abzurollen. Welche Kräfte wirken in diesem Augenblick zwischen Schale und Unterlage?

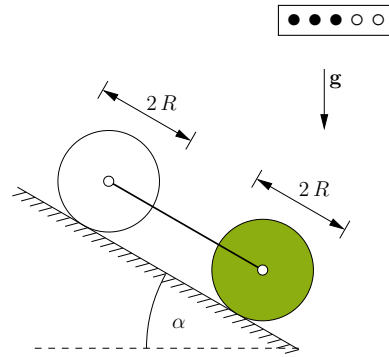


Geg: m, g, R **Lsg:** $A_x = \frac{mg}{\pi}$, $A_y = -mg(1 - 2/\pi^2)$

Aufgabe 5.11.

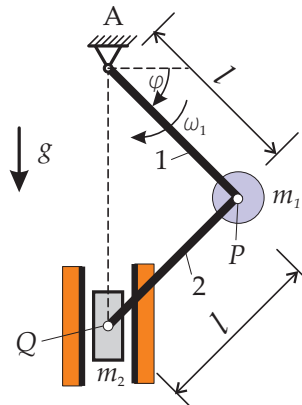
Ein Hohl- und ein Vollzylinder, beide besitzen den Radius R sowie die Masse m , rollen im Schwerfeld der Erde eine um den Winkel α geneigte Ebene hinab. Beide Zylinder sind mit einer Stange gelenkig verbunden. Bestimmen Sie die Kraft in der Stange.

Geg: m, g, R, α **Lsg:** $S = \frac{1}{7} m g \sin \alpha$

**Aufgabe 5.12.**

Der dargestellte Kurbeltrieb besteht aus zwei identischen Stäben 1 und 2 (Länge l), deren Massen vernachlässigbar und die im Punkt P gelenkig miteinander verbunden sind. Das System unterliegt dem Schwerfeld der Erde, wobei Stab 1 in der dargestellten Lage ($\varphi = 45^\circ$) eine Winkelgeschwindigkeit ω_1 aufweist. Diese Drehbewegung wird über die Stäbe an die Punktmassen m_1 im Punkt P bzw. m_2 im Punkt Q übertragen, wobei letztere vertikal durch eine Nut geführt wird. Bestimmen Sie

- die Geschwindigkeit der Masse m_1 in der gestreckten Lage ($\varphi = 90^\circ$),
- die Stabkräfte sowie die von der Masse m_2 auf die Nut übertragene Auflagerkraft für die dargestellte Lage ($\varphi = 45^\circ$)



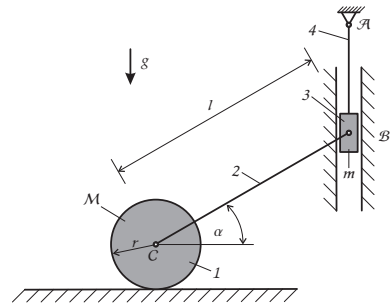
Geg: m_1, m_2, g, ω_1

Lsg: a) $v_P = \omega_1 l$, b) $S_1 = m_1 (\sqrt{2} g/2 + \omega_1^2 l)$, $S_2 = 2 m_1 m_2 / (m_1 + 2 m_2) \omega_1^2 l$

Aufgabe 5.13.



Gegeben ist das dargestellte System, welches aus einer homogenen Walze 1 (Masse M , Radius r), einer masselosen Stange 2 (Länge l) sowie einer Punktmasse 3 (Masse m) besteht. Die Anordnung wird durch ein masseloses Halteseil 4 in Ruhe gehalten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil durchtrennt. Bestimmen Sie die Beschleunigung der Walze 1 unmittelbar nach dem Durchtrennen des Halteseiles unter der Voraussetzung, dass sie schlupfrei rollt.



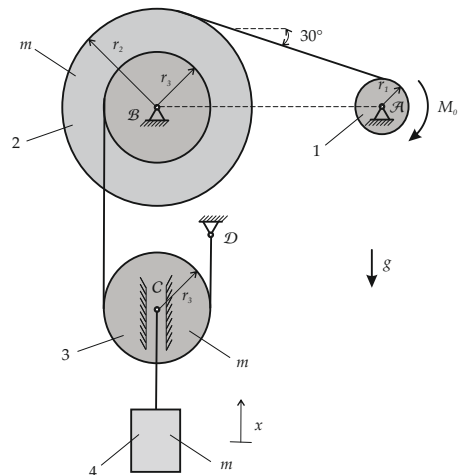
Geg: M, m, α, r, l, g

Lsg: $\ddot{x}_c = -\frac{2mg \tan \alpha}{3M \tan^2 \alpha + 2m}$

Aufgabe 5.14.



Das dargestellte System besteht aus zwei fest gelagerten Rollen 1 und 2 (jeweils Masse m und Radien r_1 bzw. r_2) sowie einer vertikal geführten Rolle 3 (Masse m , Radius r_3), die starr mit einem Körper 4 (Masse m) verbunden ist. Durch ein äußeres Drehmoment M_0 wird die Rolle 1 in Bewegung versetzt. Diese Bewegung wird durch zu jeder Zeit gespannte Riemen auf die anderen Körper schlupffrei übertragen. Bestimmen Sie



- die Beschleunigung $\ddot{x}$ der Masse 4 sowie
- die Auflagerreaktionen in $\mathcal{B}$.

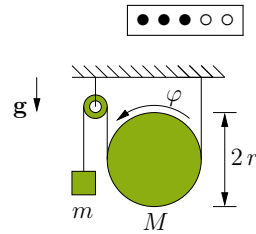
Geg: $M_0, m, r_1 = r, r_2 = 4r, r_3 = 2r, g$

Lsg: a) $\ddot{x} = [8M_0/(mr) - 2g]/37$, b) $B_y = (41M_0/r + 110mg)/74$

Hinweis: Rolle 2 besteht aus einer großen Scheibe mit Radius r_2 . Der kleinere Radius, um den der zweite Riemen gewickelt ist, hat keinen Einfluss auf das Massenträgheitsmoment.

Aufgabe 5.15.

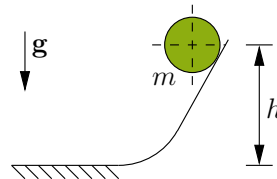
Der skizzierte Flaschenzug besteht aus einer losen Rolle (Masse M , Radius r) sowie einer masselosen Umlenkrolle und wird im Schwerfeld der Erde durch eine Masse m belastet. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems. Reibungseffekte sind dabei zu vernachlässigen.



Geg: m, M, r, g **Lsg:** $\ddot{\varphi} = \frac{2gr(M-2m)}{(3M+8m)r^2}$

Aufgabe 5.16.

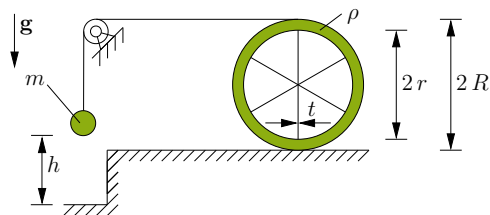
Eine kreisförmige, homogene Scheibe (Radius r , Masse m) wird in der Höhe h losgelassen und rollt eine Rampe hinunter. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit der Scheibe? Reibungsverluste sind dabei zu vernachlässigen.



Geg: m, g, r, h **Lsg:** $v = \sqrt{g(h-r)}$

Aufgabe 5.17.

Über ein Seil und eine reibungsfreie Umlenkrolle sind eine Masse m und ein ebenes Speichenrad miteinander verbunden. Das Rad besteht aus einem Radreifen (Dicke $R-r$) und Speichen ($t \ll r$). Radreifen und Speichen sind aus dem selben Material mit der Flächendichte ρ gefertigt.



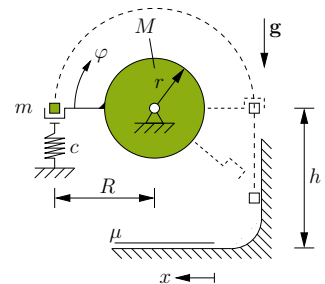
- Berechnen Sie die Masse M sowie das polare Massenträgheitsmoment Θ_S des Rades bezogen auf dessen Massenschwerpunkt.
- Das System wird aus der skizzierten Ruhelage losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse m nach Zurücklegen der Strecke h unmittelbar vor dem Aufprall auf den Boden.

Geg: $r, R, h, t \ll r, m, g, \rho$

Lsg: a) $\Theta_S = 2\rho r^3 t + \frac{\pi}{2}\rho(R^4 - r^4)$, $v_m = 2R \sqrt{\frac{2mgh}{(4m+M)R^2 + \Theta_S}}$

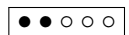
Aufgabe 5.18.

Eine Punktmasse m liegt in einer Schale, die wie skizziert starr mit einer drehbar gelagerten Kreisscheibe der Masse M verbunden ist. Die Masse der Schale und der Verbindung kann dabei vernachlässigt werden. Aus der Ruhe heraus ($\varphi = 0$) wird das System schlagartig durch Entlastung einer Feder (Vorspannkraft F) in Bewegung gesetzt. Bei $\varphi = \pi$ löst sich m aus der Schale und gleitet reibungsfrei auf der skizzierten Bahn, während sich die Kreisscheibe weiterdreht. Ab $x = 0$ wirkt zwischen Punktmasse m und Bahn schließlich der Gleitreibungskoeffizient μ .

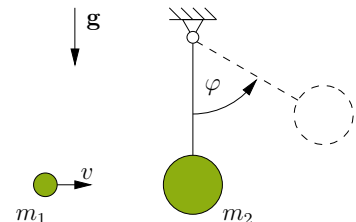


Bestimmen Sie die Position x , bei der die Punktmasse zur Ruhe kommt.

Geg: $F, c, r, R = 2r, h, m, M = 2m, g, \mu$ **Lsg:** $x = \frac{2F^2}{5\mu mgc} + \frac{h}{\mu}$

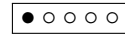
Aufgabe 5.19.

Eine Masse m_1 bewegt sich mit der Geschwindigkeit v und trifft plastisch auf eine an einem Seil der Länge l aufgehängte, ruhende Masse m_2 . Dabei wird der Ausschlagwinkel φ beobachtet. Beide Massen können als Punktmassen betrachtet werden. Wie groß war die Geschwindigkeit v ?



Geg: l, m_1, m_2, φ

Lsg: $v = (1 + m_2/m_1) \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}$

Aufgabe 5.20.

Zwei Kugeln der Masse m bewegen sich wie skizziert gleichförmig mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf einer gemeinsamen Bahn. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten nach dem Stoß, wenn dieser a) elastisch, b) plastisch und c) teilplastisch ($e = 0,5$) erfolgt.

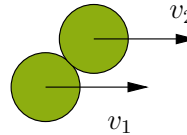


Geg: $v_1 = 3 \text{ m/s}$, $v_2 = 1 \text{ m/s}$

Lsg: a) $\bar{v}_1 = 1 \text{ m/s}$, $\bar{v}_2 = 3 \text{ m/s}$, b) $\bar{v}_1 = 2 \text{ m/s}$, $\bar{v}_2 = 2 \text{ m/s}$,
c) $\bar{v}_1 = 1,5 \text{ m/s}$, $\bar{v}_2 = 2,5 \text{ m/s}$

Aufgabe 5.21.

Zwei glatte Kugeln der Masse m treffen unter 45° zusammen. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß.



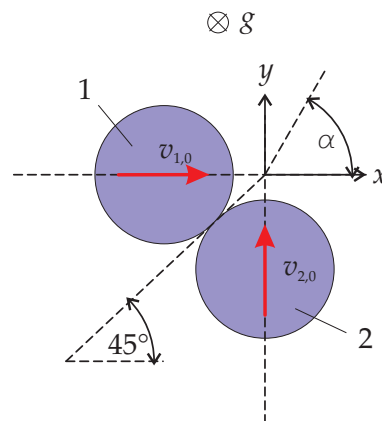
Geg: $v_1 = 3 \text{ m/s}$, $v_2 = 1 \text{ m/s}$, e

Lsg: $\bar{v}_{1t} = 3\sqrt{2}/2 \text{ m/s}$, $\bar{v}_{1n} = \sqrt{2}(2-e)/2 \text{ m/s}$
 $\bar{v}_{2t} = \sqrt{2}/2 \text{ m/s}$, $\bar{v}_{2n} = \sqrt{2}(2+e)/2 \text{ m/s}$

Aufgabe 5.22.

Zwei Billardkugeln (1,2) der Masse m_1 bzw. m_2 treffen in der dargestellten Weise aufeinander. Unmittelbar vor dem Zusammenstoß weisen diese die Momentangeschwindigkeiten $v_{1,0}$ bzw. $v_{2,0}$ auf. Bestimmen Sie

- die Geschwindigkeitskomponenten beider Massen unmittelbar nach dem Stoßvorgang sowie
- die benötigte Geschwindigkeit $v_{2,0}$, damit sich Kugel 1 nach dem Stoßvorgang unter einem Winkel von $\alpha = 60^\circ$ zur x -Achse fortbewegt.

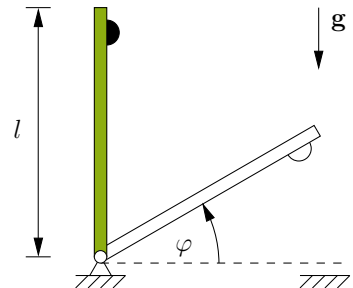


Geg: $v_{1,0}$, m_1 , m_2 , e

Lsg: b) $v_{2,0} = \frac{(3 - \sqrt{3})m_1 + (2 - \sqrt{3} - e)m_2}{(1 + e)m_2}$

Aufgabe 5.23.

Eine homogene Stange der Länge l ist im Schwerfeld der Erde drehbar gelagert und besitzt einen Gummipuffer, dessen Masse gegenüber derjenigen der Stange vernachlässigt werden kann. Die Stange kippt aus der gezeichneten Lage, stößt auf den Untergrund (Stoßzahl e) und federt zurück.

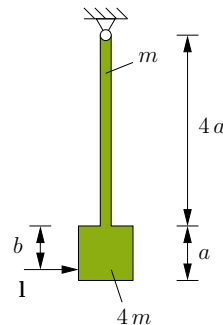


- Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Stange unmittelbar vor dem Stoß?
- Bis zu welchem Winkel φ springt die Stange zurück?

Geg: l, g, e **Lsg:** a) $\omega = \sqrt{3g/l}$, b) $\sin \varphi = e^2$

Aufgabe 5.24.

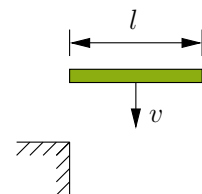
Ein Würfel der Kantenlänge a und der Masse $4m$ ist durch einen Stab der Länge $4a$ und der Masse m wie skizziert drehbar aufgehängt. An welcher Position b muss das Pendel durch den Impuls I angestoßen werden, damit keine horizontale Lagerkraft auftritt?



Geg: a **Lsg:** $b = 7a/20$

Aufgabe 5.25.

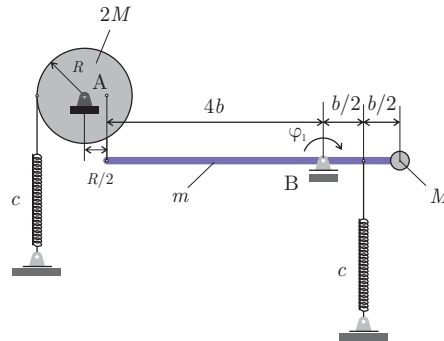
Ein Stab der Länge l trifft mit der Geschwindigkeit v (Rotationsgeschwindigkeit $\omega = 0$) auf eine starre Kante (Stoßzahl e). Bestimmen Sie den Geschwindigkeitszustand des Stabes nach dem Stoß.



Geg: l, e, v **Lsg:** $\bar{\omega} = 3v(1+e)/(2l)$, $\bar{v} = v(3-e)/4$

Aufgabe 5.26.

Ein System besteht aus einer Walze (Masse $2M$) und einem Balken (Länge $5b$, Masse m), an dem zusätzlich eine Einzelmasse M am rechten Ende befestigt ist. Die Walze und der Balken sind durch einen starren Stab miteinander verbunden. An der Walze und dem Balken greifen zwei Federn in der dargestellten Weise an. Die Federn sind in der gezeichneten Lage ungespannt.



Bestimmen Sie unter Annahme kleiner Auslenkungen die

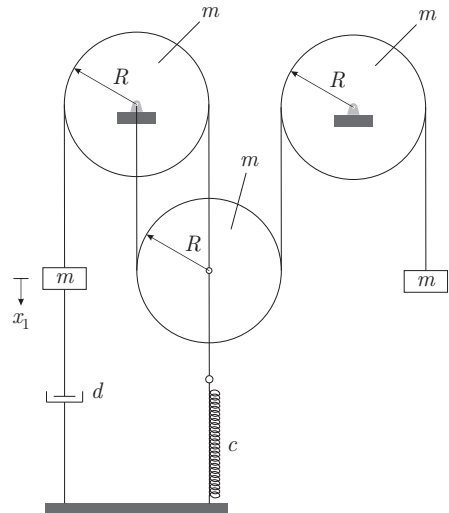
- Eigenfrequenz
- Amplitude der Schwingung für $\varphi_1(t=0) = 0, \dot{\varphi}_1(t=0) = 0$

Geg: $M, m = \frac{3}{4}M, c, b, R$

Lsg: a) $\omega = \sqrt{\frac{257}{273} \frac{c}{M}}$, b) $\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Aufgabe 5.27.

Das dargestellte System, welches aus zwei fest gelagerten sowie einer schwebend aufgehängten Rolle (jeweils Masse m , Radius R), zwei Einzelmassen m , einer Feder (Federkonstante c) und einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) besteht, befindet sich in der gezeigten Lage in statischer Ruhelage.



Bestimmen Sie

- die Bewegungs-Differentialgleichung des Systems
- die Abklingkonstante δ
- die Eigenkreisfrequenz ω

Geg: m, c, d, R

Lsg: a) $\ddot{x}_1 + \frac{d}{9m}\dot{x}_1 + \frac{c}{9m}x_1$, b) $\delta = \frac{d}{18m}$, c) $\omega = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}$

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 158**

ISBN 978-3-935892-36-0