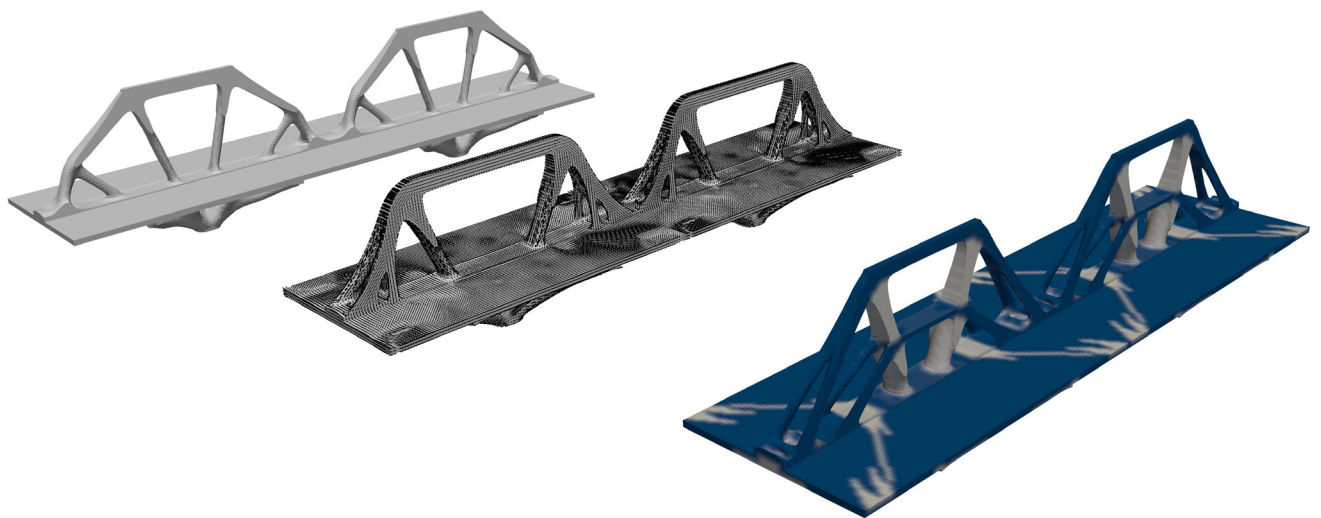


Innovative Ansätze zur Topologie- und Materialoptimierung basierend auf thermodynamischen Prinzipien

Dustin Roman Jantos



**Innovative Ansätze zur
Topologie- und Materialoptimierung
basierend auf thermodynamischen Prinzipien**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

der
Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von

Dustin Roman Jantos

aus Dorsten

Bochum 2019

Herausgeber (Publisher):
Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 978-3-935892-62-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

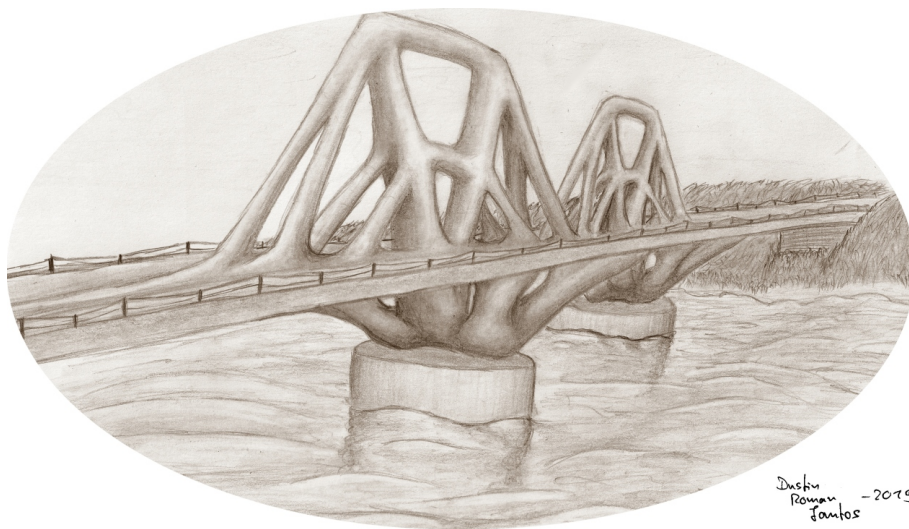
This material is presented to ensure timely dissemination of scholarly and technical work. Copyright and all rights therein are retained by the copyright holders. All persons copying this information are expected to adhere to the terms and constraints invoked by the author's copyright. These works or parts of it may not be used to repost reprint/republish or for creating new collective works for resale or redistribution to servers or lists without the explicit permission of the copyright holder.

©2019 Dustin R. Jantos, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Einreichung der Dissertation (thesis submission): 14. Oktober 2019
Tag der mündlichen Prüfung (thesis defense): 05. Dezember 2019

Erster Referent (second referee):	Priv.-Doz. Dr.-Ing. Philipp Junker
Zweiter Referent (first referee):	Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl
Vorsitzender (committee chair):	Prof. Dr.-Ing. Werner Theisen



Für meine Eltern

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Thema der Strukturoptimierung. Ziel der Strukturoptimierung ist die Bestimmung einer Struktur, welche eine gegebene Zielfunktion unter Nebenbedingungen maximiert oder minimiert. Ein häufiger Anwendungsfall für die Zielfunktion ist die Maximierung der Struktursteifigkeit, die durch Topologie und lokale Materialeigenschaften bestimmt wird.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines effizienten Modells zur thermodynamischen Optimierung (TDO) der Topologie und der Materialeigenschaften basierend auf dem Hamilton-Prinzip, welches im Einklang mit den Hauptsätzen der Thermodynamik steht und innerhalb der Materialmodellierung von mikrostrukturellen Prozessen etabliert ist. Zur Regularisierung des mathematisch nicht-wohlgestellten Problems wird eine Gradientenbestrafung eingeführt. Zwecks möglichst effizienter numerischer Lösung des regularisierten Problems werden zwei Verfahren vorgestellt: Ersteres basiert auf der Verwendung eines diskontinuierlichen Galerkin Ansatzes innerhalb der Finite-Elemente-Methode. Zweiteres basiert auf einer Taylor-Reihenentwicklung zwischen benachbarten Datenpunkten unabhängig von der Finite-Elemente-Methode.

Des Weiteren wird die TDO der lokaler Materialeigenschaften mit Hilfe des Hamilton-Prinzips diskutiert. Hierfür werden zwei Materialoptimierungen gezeigt, welche jeweils simultan zur Topologie ausgeführt werden: Die lokale Orientierung von anisotropen Materialien und die Optimierung der Materialverteilung innerhalb von Strukturen bestehend aus zug- und druckaffinen Materialien.

Die Herleitungen der Gleichungen, die numerischen Beziehungen sowie entsprechende Simulationsergebnisse der jeweiligen Modelle für den zwei- und dreidimensionalen Fall werden präsentiert und analysiert.

Summary

The presented work addresses the topic of structural optimization. The objective of the structural optimization is the determination of a structure, which minimizes or maximizes a given objective function subject to constraints. A common objective is the stiffness maximization, which is determined by the topology and the local material properties.

The objective of the present work is the development of efficient models for thermodynamic optimization (TDO) of the topology and the material, that are based on the Hamilton principle, which is in accordance with the principal laws of thermodynamics and is well established within material modeling of micro-structural processes. A gradient penalization is introduced to regularizes the mathematically ill-posed problem. Two different approaches are presented in order to solve the regularized problem numerically efficient: one approach is based on a discontinuous Galerkin approach within the finite element method, while the second approach is based on a Taylor series expansion between neighboring data points which is independent of the finite element method.

Furthermore, the TDO of local material properties via the Hamilton principle is discussed. To this end, two material optimization approaches are presented, which are applied simultaneously to the topology optimization: the local material orientation of an anisotropic material and the optimization of the material distribution within structures containing tension and compression affine materials.

The derivations, numerical methods, and simulation examples will be presented and analyzed for the respective models for the two-dimensional and three-dimensional case.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	xi
1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Aufbau der Arbeit	3
2. Stand der Technik	5
2.1. Grundlagen der Strukturoptimierung	5
2.2. Diskrete Dichte	9
2.3. Optimierung der Mikrostruktur und Homogenisierung	11
2.4. Kontinuierliche Dichte	13
2.5. Ansätze basierend auf Grenzflächen	19
2.6. Checkerboarding, Regularisierung und Filtertechniken	23
2.7. Erweiterungen und Anwendungen	26
3. Mathematische und physikalische Grundlagen	31
3.1. Grundlagen der Thermodynamik	31
3.1.1. Erster Hauptsatz der Thermodynamik	31
3.1.2. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	33
3.1.3. Interne Variablen	34
3.2. Hamilton-Prinzip	35
3.3. Extremal unter Nebenbedingungen	37
3.4. Wohlgestelltheit	39
3.5. Regularisierungstechniken	41
3.6. Thermodynamische Optimierung (TDO)	44
3.7. Thermodynamische Topologieoptimierung (TTO)	45
3.7.1. Materialgesetz	45
3.7.2. Nebenbedingungen	47
3.7.3. Dissipationsfunktion	48
3.7.4. Regularisierung der DichtevARIABLE	49
3.7.5. Stationaritätsbedingungen	50
4. Numerische Lösungsverfahren	53
4.1. Finite-Elemente-Methode	53
4.1.1. Schwache Form der Impulsbilanz	53
4.1.2. Diskretisierung	54
4.1.3. Isoparametrische Elemente	56
4.1.4. Steifigkeitsmatrix für die Topologieoptimierung	58
4.1.5. Programmablauf	58
4.1.6. Konsistente Tangente	61
4.2. Diskretisierung und Regularisierung der DichtevARIABLE	62
4.2.1. Bestimmung der diskretisierten Triebkräfte	62

4.2.2.	Diskontinuierlicher Galerkin-Ansatz	63
4.2.3.	Finite-Differenzen-Methode	65
4.2.4.	Neighbored-Point-Method (NPM)	67
4.2.5.	Neumann-Randbedingung	72
4.2.6.	Regularisierungsparameter	74
4.3.	Schrittweitenkontrolle	75
4.3.1.	Instabiles Verhalten	75
4.3.2.	Ansätze für die Viskosität und das Zeitinkrement	76
4.3.3.	Stabilitätskriterium für FTCS-Diskretisierung	77
4.4.	Nebenbedingungen	80
4.4.1.	Intervallbegrenzung	80
4.4.2.	Wachstumsansatz	80
4.4.3.	Konstantes Strukturvolumen (SIMP)	82
5.	Numerische Ergebnisse	85
5.1.	Randbedingungen	85
5.2.	Wachstum mit diskontinuierlichem Galerkin Ansatz	88
5.2.1.	Numerische Parameter und Beziehungen	88
5.2.2.	Evolution der Topologie	89
5.2.3.	Netzunabhängigkeit	92
5.2.4.	Dreidimensionaler Fall	97
5.2.5.	Zusammenfassung	98
5.3.	Konstantes Strukturvolumen mit NPM	99
5.3.1.	Numerische Parameter und Beziehungen	99
5.3.2.	Evolution der Topologie	100
5.3.3.	Netzunabhängigkeit	105
5.3.4.	Mindeststrukturabmaß	110
5.3.5.	Berechnungszeiten	113
5.3.6.	Mehrlastfall	119
5.3.7.	Dreidimensionaler Fall	121
5.3.8.	Realitätsbezogene Beispiele	123
5.3.9.	Zusammenfassung	127
5.4.	Vergleich der Verfahren	128
6.	Erweiterungsmöglichkeiten des Modells	131
7.	Optimierung der Materialorientierung	133
7.1.	Einleitung	133
7.2.	Hamilton-Prinzip	134
7.2.1.	Materialgesetz	134
7.2.2.	Dissipationsfunktion	137
7.2.3.	Stationaritätsbedingung	138
7.2.4.	Numerische Lösung	139
7.3.	Faserkrümmungsfiler	141
7.4.	Numerische Ergebnisse	145
7.4.1.	Parameter und Anfangsbedingungen	145
7.4.2.	Ergebnisse mit Wachstum	148
7.4.3.	Ergebnisse mit SIMP und Faserkrümmungsfiler	153
7.5.	Zusammenfassung	170

8. Zug-Druck-Anisotropie	171
8.1. Einleitung	171
8.2. Hamilton-Prinzip	171
8.2.1. Materialgesetz	171
8.2.2. Zug-Druck-Anisotropie	172
8.2.3. Dissipationsfunktion und Nebenbedingungen	174
8.2.4. Stationaritätsbedingung und numerische Lösung	174
8.2.5. Regularisierung	177
8.3. Numerische Ergebnisse	178
8.3.1. Parameter und Anfangsbedingungen	178
8.3.2. Evolution der Topologie	179
8.3.3. Mehrlastfall	191
8.3.4. Dreidimensionaler Fall	194
8.4. Zusammenfassung	197
9. Zusammenfassung	199
A. Anhang	203
A.1. Herleitung der Triebkräfte	203
A.2. Cowin-Mehrabadi Notation	206
Literaturverzeichnis	208
Hinweis auf Vorveröffentlichungen	227
Lebenslauf	228

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

b	Volumenkräfte
B	Operatormatrix zur Berechnung der Dehnungen
B^∇	Operatormatrix für Laplace-Operator
C	Funktional der Nebenbedingungen
d	Anzahl an räumlichen Dimensionen
dA, dV	Flächeninkrement, Volumeninkrement
D	Koeffizientenmatrix der Taylor-Reihenentwicklung
e_i	Basisvektor
E	Elastizitätsmodul
$\mathbb{E}$	Steifigkeitstensor
f	Funktion in Nebenbedingung
$\hat{f}$	Vektor der Knotenkräfte
$\mathcal{G}$	Gibbs-Energie
h	Netzweite (Wärmequelle in Kapitel 3)
$\mathcal{H}$	Funktional des Hamilton-Prinzips
J, J	Jacobi-Determinante, Jacobi-Matrix
$\mathcal{K}$	kinetische Energie
K	Systemsteifigkeitsmatrix
l, m	Nebenbedingungen
n	(Oberflächen-)Normalenvektor
N_e	Anzahl an finiten Elementen
N_j	Anzahl an inneren Iterationsschritten
N_k	Anzahl an Nachbarpunkten
N_∂	Anzahl an (unbekannten) Ableitungen
p	Exponent des Potenzgesetzes (Interpolationsfunktion)
$\mathcal{P}$	Bestrafungsfunktional
q, Q	Wärmefluss, Wärme
Q	Rotationsmatrix
r_χ, r_α	Filterradius
$\mathbf{r} = \{r, s, t\}$	natürliche/lokale Koordinaten
$\mathcal{R}$	Funktional der Regularisierung
s, S	(spezifische) Entropie
S	(normierte) Struktursteifigkeit
S	Ansatzfunktion (Formfunktion)
$t, \Delta t$	Zeit- bzw. Iterationsschritt, Zeitinkrement
t	Traktionskräfte

$\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$	Verschiebung, Geschwindigkeit
U	innere Energie
$\mathbf{v}$	interne Variablen
$w, \tilde{w}$	Gewichtungsfunktion, Wichtungsfaktor in Gauß-Integration
$W, \mathcal{W}$	Arbeit der äußeren Kräfte, Arbeit der dissipativen Kräfte
$\mathbf{x}$	Ortsvektor in kartesischen Koordinaten
$z, \mathcal{Z}$	Zielfunktion (Kostenfunktion)
$\mathcal{Z}_x$	Sensitivität

Griechische Buchstaben

$\alpha = \{\phi, \nu, \omega\}$	Euler-Winkel
β	Regularisierungsparameter
γ	Kuhn-Tucker Parameter für Intervallbegrenzung
ε	Dehnungstensor
ζ	Fließgrenze
η	Viskosität
θ	Absolute Temperatur
κ	relative Dichte bei Abwesenheit von Material
λ	Lagrange-Multiplikator
λ_S	Steuerparameter für Lagrange-Shift-Ansatz
μ	Kuhn-Tucker-Parameter
ν	Querkontraktionsszahl/Poisson-Zahl
ξ	(eindimensionale) Laufkoordinate
Π_+, Π_-	Zug- und Druck-Energieanteile
ρ	Dichte (Interpolationsfunktion)
ϱ	relatives Strukturvolumen
σ	Spannungstensor
τ	thermodynamische Triebkraft
τ^*	dissipative Kraft
φ	Phasenvariable
Φ	Dissipationsfunktion
χ	Dichtevvariable
$\partial\chi$	Vektor der räumlichen Ableitungen der Dichtevvariable
$\Delta\chi$	Vektor der Differenzen der Dichtevvariable
Ψ	Helmholtz-Energie
Ω	Gebiet/Volumen des Designraumes
Ω_e	Gebiet/Volumen eines finiten Elementes
Ω_S	Gebiet/Volumen der Struktur
$\partial\Omega_i$	Rand eines Gebietes/Volumens Ω_i

Abkürzungen

AESO	Additive Evolutionary Estructural Optimization
BESO	Bi-directional Evolutionary Estructural Optimization
CFAO	Continuous Fiber Angle Optimization
DGL	(gewöhnliche) Differentialgleichung
DMO	Discrete Material Optimization
ESO	Evolutionary Estructural Optimization
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
LSM	Level-Set-Methode
MBB	Messerschmitt-Bölkow-Blohm
MMA	Method of Moving Asymptotes
NPM	Neighbored Point Method
OCM	Optimality Criteria Method
PDG	partielle Differentialgleichung
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SLP	Sequential Linear Programming
SQP	Sequential Quadratic Programming
TDO	Thermodynamic Optimization
TTO	Thermodynamic Topology Optimization
WLS	Weighted Least Squares

Mathematische und numerische Operatoren

Hinweise: Bei einigen Ausdrücken wird die Einstein'sche Summenkonvention angewandt.

$\hat{\chi}$	diskretisiert in Knoten
$\tilde{\chi}$	diskretisiert in Integrationspunkten
$\bar{\chi}$	elementweise diskretisiert
δ	Präfix für Variation/Gâteaux-Ableitung
∂	Präfix für partielle Ableitung
d	Präfix für totales Differential
$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$	Nabla-Operator
$\nabla \chi$	Gradient
$\nabla \cdot \mathbf{v}$	Divergenz
$\nabla^2 \chi = \nabla \cdot \nabla \chi = \sum_i \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i^2}$	Laplace-Operator
$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & \cdots & v_1 w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m w_1 & \cdots & v_m w_n \end{pmatrix}$	dyadisches Produkt
$\mathbb{C} : \mathbf{B} = \mathbb{C}_{ijkl} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	doppelte innere Produkt zweier Tensoren vierter und zweiter Stufe
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	doppelte innere Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$	innere Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe (Matrizen-Multiplikation)
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = A_{ij} v_j \mathbf{e}_i$	innere Produkt zweier Tensoren zweiter und erster Stufe (Matrix-Vektor-Multiplikation)
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_j w_j$	innere Produkt zweier Tensoren erster Stufe (Skalarprodukt)
$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$	Norm eines Tensors erster Stufe
$\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$	Norm eines Tensors zweiter Stufe
$\mathbf{A}^T = A_{ji} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	Transponierte eines Tensors zweiter Stufe
$[w * \chi]$	Faltungsoperator
$\{a, \dots, b\}$	diskrete Menge
$[a, b]$	kontinuierliche Menge

1. Einleitung

1.1. Motivation

Die Strukturoptimierung befasst sich mit der Optimierung der Größe, Form und/oder Topologie mechanisch belasteter Bauteile. Der allgemeinste Fall ist dabei die Topologieoptimierung: Hierbei werden nur die mechanischen Randbedingungen einer Struktur vorgegeben. Es werden keine Annahmen bezüglich der Form der Struktur getroffen, sodass die Geometrie der Struktur vollständig der Optimierung unterliegt. Des Weiteren können Materialauswahl und Ausprägung lokaler Materialeigenschaften Teil der Optimierung sein. Ziel einer Optimierung ist die Bestimmung der Ausprägung von sogenannten Designvariablen, sodass eine Zielfunktion unter Vorgabe von Nebenbedingungen minimiert oder maximiert wird. Die Designvariablen bezeichnen hierbei alle Parameter, welche die Bauteileigenschaften definieren und gezielt eingestellt werden können, wie beispielsweise Geometrieparameter oder bestimmte lokale Materialeigenschaften.

In der Industrie gewinnt die Strukturoptimierung zunehmend größere Bedeutung: Der optimierte Einsatz von Material ermöglicht die Senkung von Materialkosten sowie die effizientere Ausnutzung immer knapper werdender Ressourcen. Besonders die damit einhergehende Gewichtsreduktion von motorisierten Fortbewegungsmitteln kann helfen, den Treibstoff- bzw. Energieverbrauch zu senken. Häufig ergeben sich aus der Optimierung komplexe Strukturen, welche sich mit konventionellen Fertigungsverfahren nur umständlich oder unmöglich produzieren lassen. Dank der Entwicklung innovativer Fertigungsverfahren, allen voran additive bzw. generative Fertigungsverfahren (so genanntes 3D-Drucken), wird die Produktion immer komplexer werdender Geometrien zunehmend wirtschaftlicher. Dementsprechend dienen die Ergebnisse einer Strukturoptimierung nicht nur der Findung einer ersten Designidee sondern finale Produkte nähern sich den direkten Ergebnissen einer Strukturoptimierung immer weiter an (siehe Abb. 1.1.1). Dabei sind praktische Anwendungsfälle im Bereich der Strukturmechanik i.d.R. so komplex, dass analytische Lösungsverfahren unzureichend sind. Mit der Entwicklung numerischer Methoden und immer leistungsfähiger Computer wurde in den letzten 30 Jahren die Entwicklung vieler Strukturoptimierungsmethoden basierend auf unterschiedlichsten Modellansätzen ermöglicht. Die meisten Ansätze basieren hierbei auf rein mathematischen Algorithmen, welche meist vielseitig und für allgemeine Optimierungsprobleme ausgelegt und seltener speziell auf mechanische Strukturoptimierung zugeschnitten sind. Die Komplexität und Umfang moderner Anwendungsfälle stellen dennoch hohe Anforderungen an effiziente numerische Lösungsverfahren, um Entwicklungszeiten neuer Produkte zu minimieren.

Dementsprechend ist ein Ziel der vorliegenden Arbeit die Entwicklung von auf die Strukturoptimierung zugeschnittenen effizienten und (numerisch) stabilen Lösungsverfahren. Es wird ein Ansatz basierend dem *Hamilton-Prinzip für dissipative Prozesse*, welches sich in der Materialmodellierung von mikrostrukturellen Prozessen etabliert hat, entwickelt. Das Hamilton-Prinzip basiert auf der Stationarität eines Energiefunktionals und steht im Einklang mit den Gesetzen der Thermodynamik. Damit können speziell auf die Problemstellung zugeschnittene thermodynamisch bzw. physikalisch konsistente und dementsprechend Modelle entwickelt

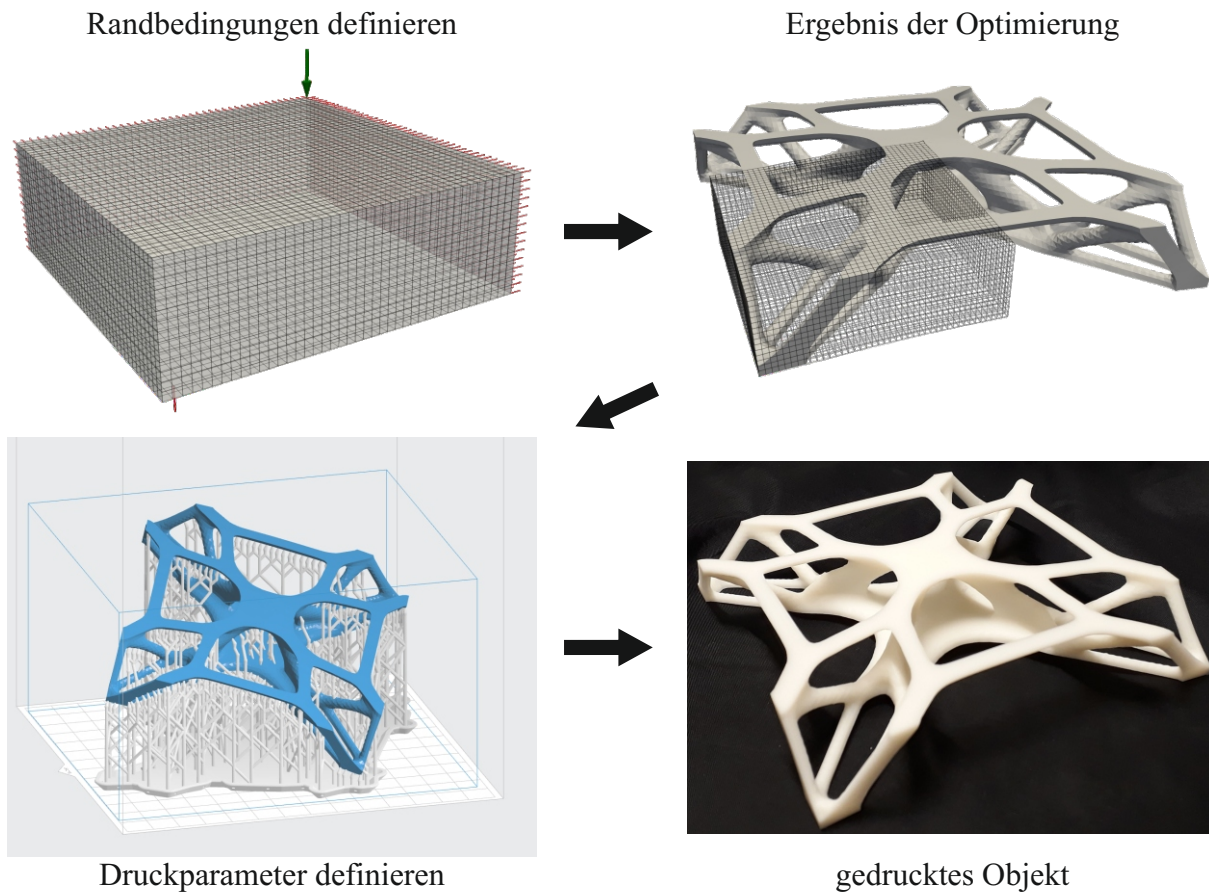


Abbildung 1.1.1.: Illustration des Arbeitsablaufs der Optimierung sowie direkten Fertigung der Struktur mit Hilfe additiver Herstellungsverfahren. Verwendeter 3D-Drucker: *Form2* der Firma *Formlabs Inc* mit Präprozessor *PreForm 2.14.0*.

werden. Zudem ist die Beschreibung und damit einhergehend die Optimierung lokaler Materialeigenschaften bzw. Mikrostrukturen mit Hilfe der Methoden der Materialmodellierung nahelegend.

Bei der Lösung der gängigen Strukturoptimierungsproblemen ist eine *Regularisierung* des mathematischen Problems essentiell: Aufgrund der i.d.R. mathematisch nicht-wohlgestellten Optimierungsprobleme kommt es zu Lokalisierungseffekten bzw. numerischen Instabilitäten wie *Checkerboarding* und Netzabhängigkeiten. Ähnliche Effekte sind bereits in Bereichen der Materialmodellierung bekannt, beispielsweise bei der Modellierung von Schädigungseffekten. Dementsprechend können bekannte Regularisierungstechniken für die Optimierung genutzt werden bzw. umgekehrt können die hier entwickelten Regularisierungstechniken potentiell in der Materialmodellierung eingesetzt werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden thermodynamisch konsistente Modelle zur Strukturoptimierung, zusammengefasst unter dem Begriff *thermodynamische Optimierung* (TDO), im Sinne einer *thermodynamischen Topologieoptimierung* (TTO) sowie einer Optimierung lokaler Materialeigenschaften vorgestellt, wobei besonderer Fokus auf eine numerisch effiziente Umsetzung der Regularisierung gelegt wird. Die Funktionsweise der Modelle wird anhand numerischer Beispiele gezeigt und analysiert.

1.2. Aufbau der Arbeit

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird auf eine Ausführung der mathematischen Grundlagen bezüglich der Variationsrechnung und Vektoranalysis sowie grundlegende Prinzipien der Kontinuumsmechanik verzichtet. Verwendete Notation für Symbole und mathematische Operatoren sind im Symbolverzeichnis gegeben. Weitere Informationen bezüglich mathematischer Grundlagen können in Gelfand u. a. (2000); Dacorogna (2007); Elsgolc (2012) gefunden werden. Kontinuumsmechanische Grundlagen lassen sich beispielsweise in Berdichevsky (2009); Gurtin u. a. (2010); Truesdell (2012); Silhavy (2013); Demtröder (2017) finden.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst wird in Kapitel 2 eine Einführung in die Strukturoptimierung gegeben gefolgt von einer Übersicht und Einteilung etablierter Ansätze zur Topologieoptimierung. In Kapitel 3 werden die mathematischen sowie physikalischen Grundlagen bezüglich der Kontinuumsthermodynamik, Wohlgestelltheit und Regularisierung von Extremwertproblemen sowie insbesondere die Erläuterung des Hamilton-Prinzips für dissipative Systeme unter Nebenbedingungen und dessen Anwendung für die thermodynamische Optimierung (TDO) diskutiert. Kapitel 4 stellt numerische Lösungsverfahren für die aus dem Hamilton-Prinzip folgenden partiellen Differentialgleichungen vor. Zentraler Punkt ist hierbei die Finite-Elemente-Methode, welche in ihren Grundzügen erläutert wird. Der Fokus liegt auf der Diskretisierung und Regularisierung der Designvariablen bzw. des Optimierungsproblems und dessen numerischer Lösung. Kapitel 5 zeigt die numerischen Ergebnisse für die thermodynamische Topologieoptimierung (TTO) eines isotropen, linear elastischen Materials für zwei unterschiedliche Modellansätze: Ein Wachstumsansatz basierend auf der schwachen Form der Stationaritätsbedingung mit einem diskontinuierlichem Galerkin-Ansatz sowie einem Ansatz basierend auf der starken Form, bei welchem die für die Regularisierung benötigten räumlichen Ableitungen unabhängig von der FEM mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung zwischen benachbarten Datenpunkten bestimmt werden. Am Ende des Kapitels 5 werden beide Modelle kurz miteinander verglichen und in Kapitel 6 die Erweiterungsmöglichkeiten diskutiert. Zwei mögliche Erweiterungen werden in den Kapiteln 7 und 8 vorgestellt: In Kapitel 7 wird die Topologieoptimierung für ein anisotropes Material vorgestellt, wobei die lokale Materialorientierung als zusätzliche Designvariable der Optimierung unterliegt. Kapitel 8 zeigt die Topologieoptimierung bei Verwendung von zug- und druckaffinen Materialien, d.h. ein zugaffines Material soll nur unter Zugbelastung stehen und entsprechend ein druckaffines Material nur unter Druckbelastung. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung der Arbeit in Kapitel 9.

2. Stand der Technik

2.1. Grundlagen der Strukturoptimierung

Ziel der Strukturoptimierung ist die Bestimmung der Ausprägung von *Designvariablen*, welche eine gegebene *Zielfunktion* $\mathcal{Z}$ (auch Kostenfunktion genannt) für ein gegebenes Randwertproblem minimiert oder maximiert. Die Designvariablen bezeichnen hierbei alle Parameter, welche Struktureigenschaften definieren und gezielt eingestellt werden können. Folglich sind die Designvariablen die zu bestimmenden Unbekannten des Optimierungsproblems. Üblicherweise wird das Optimierungsproblem um Nebenbedingungen erweitert, welche i.d.R. physikalisch und/oder aufgrund fertigungstechnischer Bedingungen motiviert sein können. Somit ergibt sich eine Minimierung bzw. Maximierung unter Nebenbedingungen in der Form

$$\min_{\chi} [\mathcal{Z}(\chi)] = \max_{\chi} [-\mathcal{Z}(\chi)] \quad (2.1.1)$$

$$\text{u.d.B.: } l(\chi) = 0 \quad (2.1.2)$$

$$m(\chi) \leq 0. \quad (2.1.3)$$

Die Nebenbedingungen sind in Form von Gleichheitsbedingungen wie in Gl. (2.1.2) oder als Ungleichheitsbedingungen wie in Gl. (2.1.3) gegeben. Mögliche, zu minimierende Zielfunktionen $\mathcal{Z}$ können beispielsweise die Ineffizienz und/oder Kosten von Bauteilen bezüglich mechanischen, thermischen, elektromagnetischen oder Kombination dieser Eigenschaften sein. Die vorliegende Arbeit befasst sich hierbei ausschließlich mit der mechanischen Strukturoptimierung, d.h. die Optimierung von Strukturen unter Randwertproblemen gemäß der Festigkeitslehre. Ein Großteil der Strukturoptimierungsmodelle befasst sich mit der Optimierung von Strukturgeometrien. Des Weiteren können auch lokale Materialeigenschaften, wie Materialauswahl oder Ausprägung der Mikrostruktur, Teil der Optimierung sein. Auf entsprechende Optimierungen lokaler Materialeigenschaften wird in Abschnitt 6 eingegangen. Der Fokus sei zunächst jedoch nur auf die Optimierung der Strukturgeometrie gelegt. Hierbei stellt eine geeignete Geometrie-parametrisierung der Struktur die Designvariable(n) der Optimierung dar.

Prinzipiell lassen sich die Ansätze zur Optimierung der Strukturgeometrie in drei Klassifizierungen unterteilen (Siehe Abb. 2.1.1) [Harzheim (2008)]:

- Größenoptimierung
- Formoptimierung
- Topologieoptimierung

Bei der *Größenoptimierung* sind die Designvariablen ausgewählte geometriespezifische Parameter, beispielsweise die Dicke der Balken in einer Tragwerkskonstruktion mit vordefinierter Form, wobei die Winkel der Balken und Anzahl sowie Positionierung der Knotenpunkte vorgegeben sind und nicht optimiert werden. Bei der *Formoptimierung* wird die Parametrisierung der Strukturoberfläche als Designvariable(n) deklariert. Die Topologie ist vorgegeben und bleibt

innerhalb der Formoptimierung erhalten: Die Geometrie der Struktur wird durch eine homöomorphe Transformation in eine optimiertes Design überführt ohne die *Topologiekategorie*, d.h. den Grad des Gebietszusammenhangs („Anzahl an Löchern“), zu verändern [Schumacher (2005)]. Die *Topologieoptimierung* ist die freieste Form der Struktur- bzw. Geometrieoptimierung, da keine Vorgaben bezüglich der Topologiekategorie getroffen werden und die Topologie(kategorie) sowie die Form der Struktur simultan optimiert werden. Dementsprechend findet die Topologieoptimierung vor allem in frühen Phasen der Produktentwicklung Anwendung. Die Form- und Größenoptimierung können als auf eine Topologieoptimierung folgendes „fine-tuning“ angesetzt werden oder falls spezielle Randbedingungen bezüglich Form und/oder Topologie der zu produzierenden Struktur eingehalten werden müssen.

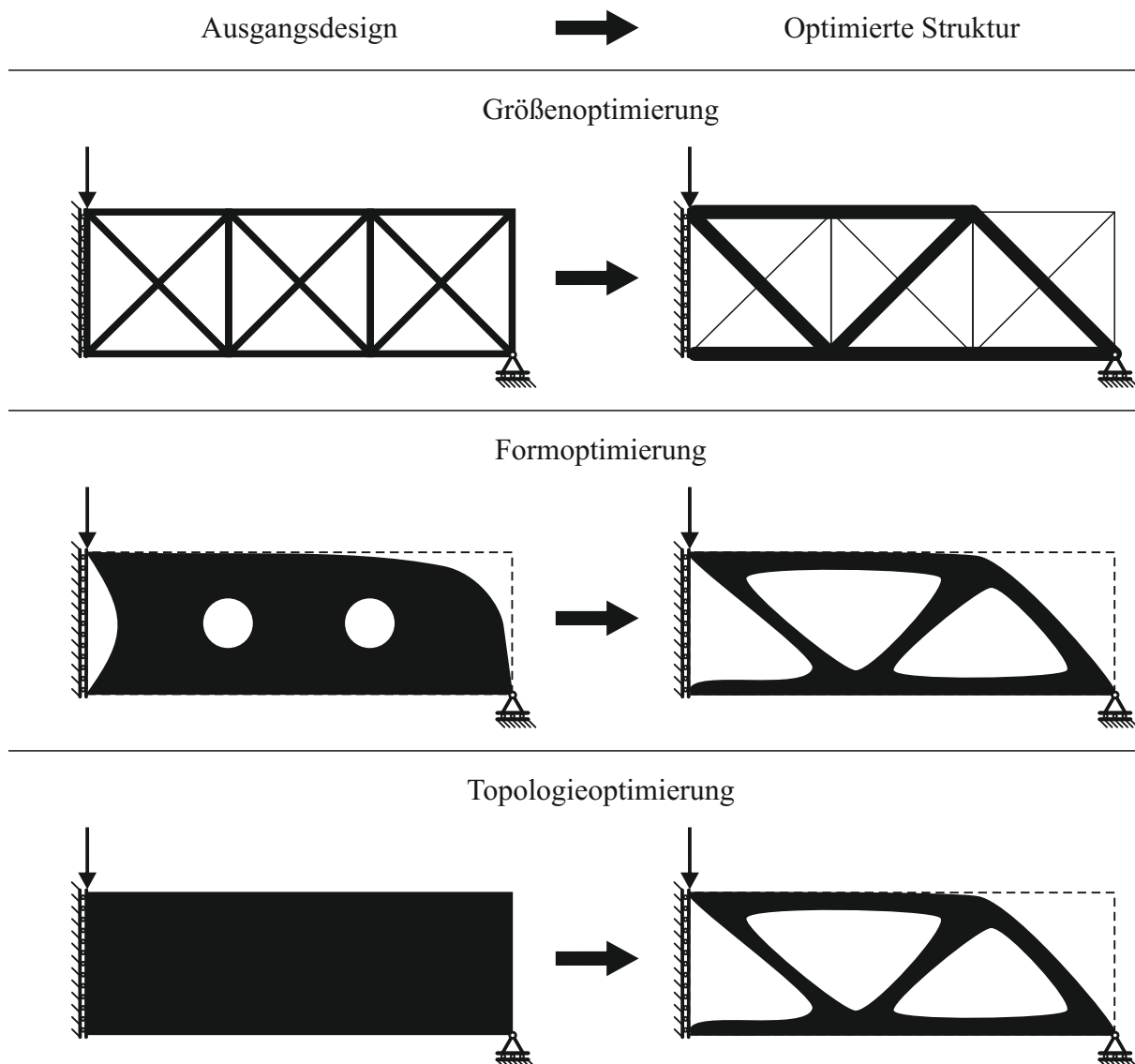


Abbildung 2.1.1.: Gegenüberstellung von Größen-, Form- und Topologieoptimierung anhand des *Messerschmitt-Bölkow-Blohm* (MBB) Balkenproblems.

Die Vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der Topologieoptimierung. Grundsätzliche basieren etablierte Ansätze für Topologieoptimierung auf folgender Idee (Siehe Abb. 2.1.2): Die Topologie und Form der Struktur $\Omega_S \in \Omega$, welche eine vorgegebene Zielfunktion

$\mathcal{Z}$ minimieren (oder maximieren) soll, wird innerhalb eines vorgegebenen Designraums Ω bestimmt, welcher die maximalen Strukturausmaße beschränkt und in bzw. an welchem das physikalische Randwertproblem definiert wird. Ein mechanisches Randwertproblem ist gegeben durch Volumenkräfte $\mathbf{b}$, Traktionskräfte $\mathbf{t}$ auf der Oberfläche $\partial\Omega$ und vordefinierte Verschiebungen $\mathbf{u}^*$. Innerhalb der Optimierung müssen die entsprechenden Randwertprobleme ausgewertet bzw. gelöst werden. Nur für relative einfache Randwertprobleme sind analytische Lösungen bekannt [Michell (1904); Prager (1974); Rozvany (1998)]. In der Regel erfolgt die Lösung des Optimierungsproblems numerisch mit Hilfe iterativer Verfahren, bestehend aus alternierender Auswertung des Randwertproblems und einem Optimierungsschritt, d.h. schrittweisen Veränderung der Designvariablen Richtung Optimum. Aufgrund der Komplexität realitätsnaher Probleme wird häufig die *Finite-Elemente-Methode* (FEM) zur Auswertung des mechanischen Randwertproblems angewandt.

Zur mathematischen Beschreibung der Struktur Ω_S kann die Oberfläche $\partial\Omega_S$ durch Designvariablen parametrisiert werden. Ansätze, welche auf der Parametrisierung der Oberfläche $\partial\Omega_S$ basieren, ermöglichen per se keine Änderung der Topologiekategorie und werden üblicherweise im Rahmen der Formoptimierung angewandt. Diese Methoden können entsprechend erweitert werden, um die Topologiekategorie während des Optimierungsprozesses verändern zu können. Diese Art von Ansätzen zur Topologieoptimierung werden in Abschnitt 2.5 diskutiert.

Für eine „reine“ Topologieoptimierung wird üblicherweise innerhalb des Designraumes für jeden (diskretisierten) Materialpunkt $\mathbf{x} \in \Omega$ eine *DichtevARIABLE* $\chi = \chi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega$ als Designvariable eingeführt, welche als Indikatorfunktion für die An- und Abwesenheit von Material im Materialpunkt dient. Üblicherweise definiert $\chi(\mathbf{x}) = 1 \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega_S$ die Anwesenheit eines vorgegebenes Materials, während $\chi(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_S$ die Abwesenheit jeglichen Materials definiert. Somit ergibt sich ein Zwei-Phasen-System aus einer Vollmaterialphase und einer „Leermaterial“-Phase (Abwesenheit von Material). Ansätze mit binärer DichtevARIABLE $\chi \in \{0, 1\}$ werden in Abschnitt 2.2 diskutiert. Aus numerischer Sicht ist jedoch die Anwendung einer kontinuierlichen DichtevARIABLE, welche Mischphasen $\chi \in]0, 1[$ zulässt, sinnvoller, um das Problem zu relaxieren (Siehe Abschnitt 2.4). Eine weitere Möglichkeit der Relaxation besteht in der zusätzlichen Optimierung der lokalen Mikrostruktur (Siehe Abschnitt 2.3). Aus fertigungstechnischer Sicht sind sowohl Mischphasen als auch Mikrostrukturen ungewollt, da diese i.d.R. nicht produzierbar sind. Daher werden sogenannte „Schwarz-Weiß“-Lösungen mit $\chi \in \{0, 1\}$ bevorzugt, welche eine klare Topologie eines (einphasigen) Materials abbilden. Für Strukturen bestehend aus mehreren Materialien oder weiteren Designvariablen für (lokale) Materialeigenschaften können entsprechend zusätzliche Designvariablen neben der DichtevARIABLE eingeführt werden.

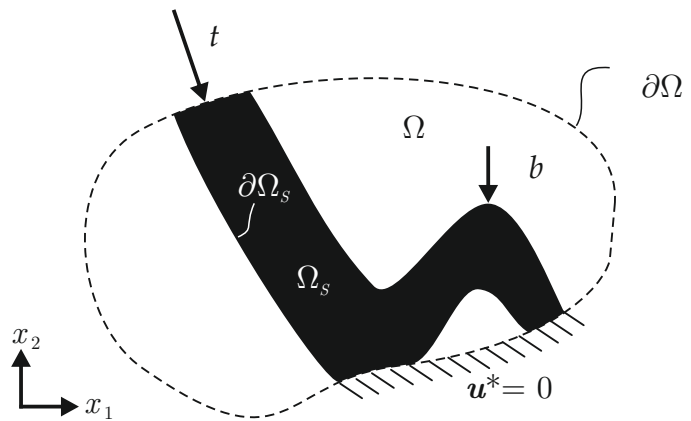


Abbildung 2.1.2.: Optimierungsproblem mit Randbedingungen $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ sowie $\mathbf{u}^*$, Designraum Ω und Struktur Ω_S .

Die simpelste und am meisten angewandte Zielfunktion in der Strukturoptimierung ist die Minimierung der gesamten elastischen Verzerrungsenergie in Ω bzw. Ω_S , welche häufig als

Strukturnachgiebigkeit (englisch *compliance*) bezeichnet wird. Die Minimierung der Strukturnachgiebigkeit ist gleichbedeutend mit der Maximierung der Struktursteifigkeit. Weitere Zielfunktionen sind eine möglichst homogene Spannungsverteilung, die Reduktion finanzieller Kosten oder eine Kombination aus diesen. Für die Nachgiebigkeitsminimierung sollte die triviale Lösung, welche durch einen vollständig mit Material gefüllten Designraum gegeben ist, vermieden werden. Hierzu wird üblicherweise das Strukturvolumen (oder die Strukturmasse) vorgegeben oder begrenzt (englisch *compliance minimization under volume constraint*).

Im folgenden werden eine Reihe etablierter Ansätze der Topologieoptimierung mechanischer Strukturen vorgestellt:

- Ansätze mit diskreter DichtevARIABLE in Abschnitt 2.2
- Ansätze basierend auf Mikrostrukturen und Homogenisierung in Abschnitt 2.3
- Ansätze mit kontinuierlicher DichtevARIABLE in Abschnitt 2.4
- Ansätze basierend auf Strukturgrenzflächen in Abschnitt 2.5

Neben diesen Ansätzen existieren noch weitere Ansätze, beispielsweise basierend auf gentechnischen Algorithmen [Rajan (1995)], welche nicht weiter im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden. Die genannten Ansätzen sind nicht unbedingt scharf abzugrenzen und die Übergänge sind teilweise fließend [Sigmund u. Maute (2013)]. Es ist beispielsweise möglich, ein Optimierungsverfahren durch moderate Modifikationen in ein anderes zu überführen, hybride Ansätze zu entwickeln oder zumindest Teile oder Ideen einer anderen Methode zu assimilieren. Hierfür sei auf die Literatur verwiesen, in welcher sich eine Vielzahl an Übersichts- und Vergleichsberichte (englisch *review*) über die verschiedenen Ansätze zu Topologieoptimierung finden lassen. Hier seien nur einige Übersichtsberichte exemplarisch aufgelistet:

- Eschenauer u. Olhoff (2001): Umfangreiche Sekundärliteratur bezüglich der Anfänge der Strukturoptimierung bis zum Jahre 2001. Zusätzlicher Fokus auf *Bubble-Method*, welches ein Topologieoptimierungsansatz basierend auf Formoptimierung ist
- Bendsøe u. Sigmund (2003): Weitreichende Ausführungen zu Ansätzen basierend auf Homogenisierung und Fokus auf Ansätze basierend auf kontinuierliche DichtevARIABLEN
- Rozvany (2009): Kritische Vergleich zwischen Ansätzen basierend auf diskreter und kontinuierlicher Dichte
- Sigmund u. Maute (2013): Übersicht und direkter Vergleich aller genannten Ansätze sowie Anmerkungen zu allgemeinen Anforderungen an Ansätzen zur Strukturoptimierung
- Deaton u. Grandhi (2014): Umfangreiche Sekundärliteratur bezüglich der Entwicklung von Topologieoptimierungsansätzen zwischen den Jahren 2000 und 2014 mit Bezug zu interdisziplinären Optimierungsproblemen (englisch *multiphysics*)

Numerische Komplikationen und deren Lösung werden in Abschnitt 2.6 diskutiert, welche grundsätzlich nicht an bestimmte Topologieoptimierungsansätze gebunden sind bzw. für mehrere Ansätze gleichermaßen umgesetzt werden können. Abschließend werden im Abschnitt 2.7 Beispiele für mögliche Erweiterungen bezüglich Materialeigenschaften und fertigungsbedingter Nebenbedingungen vorgestellt.

2.2. Diskrete Dichte

Bei Ansätzen mit diskreter Dichte (auch Integer-Dichte genannt) wird die Topologie durch einen binären Zustand beschrieben: In jedem Punkt des Designraumes ist entweder Material (vollständig) vorhanden oder abwesend. Durch die Anwendung binärer Designvariablen ist die Topologie der Struktur eindeutig als „Schwarz-Weiß“-Lösung. Ansätze basierend auf der Manipulation der Grenzflächen der Topologie führen ebenfalls zu einer binären Beschreibung der Topologie, jedoch werden im vorliegenden Abschnitt Ansätze basierend auf diskreten Dichtevariablen beschrieben. Dementsprechend wird als Designvariable die binäre DichtevARIABLE $\chi(\mathbf{x}) \in \{0, 1\} \forall \mathbf{x} \in \Omega$ angenommen. Ansätze zu Topologieoptimierung basierend auf Grenzflächen werden in Abschnitt 2.5 diskutiert.

Xie u. Steven (1993, 1997) stellten die simple und intuitive ESO-Methode (*evolutionary structural optimization*) zur Topologieoptimierung mechanisch belasteter Strukturen vor: Ausgehend von einer vollständig mit Material gefüllten überdimensionierten Struktur bzw. Designraumes Ω mit $\chi = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega$, werden sukzessiv ineffiziente Strukturteile entfernt. Dabei wird die Struktur durch finite Elemente diskretisiert und entsprechend iterativ ineffiziente Elemente entfernt. Für die Ineffizienz können verschiedene Kriterien angewandt werden, welche mit Hilfe der FE-Analyse bestimmt werden können. Ursprünglich wurden Vergleichsspannungen (zum Beispiel nach von Mises [Xie u. Steven (1993)]) angewandt, um eine Struktur mit möglichst homogener (Vergleichs-)Spannungsverteilung zu erhalten, oder Sensitivitätszahlen (die Änderung der elastischen Verzerrungsenergie [Chu u. a. (1996)]), um eine möglichst hohe Steifigkeit der Struktur zu erreichen. Allerdings zeigten Li u. a. (1999), dass beide Kriterien äquivalent sind. Eine stetige Differenzierbarkeit der Zielfunktion in Abhängigkeit der Designvariablen ist nicht nötig, stattdessen müssen die Werte der Ineffizienz-Kriterien sortiert werden und Gebiete der Struktur (d.h. eine gewisse Menge an Elementen) mit niedriger Priorität werden entfernt. Dadurch kann die Rechenzeit zunehmend verringert werden, da entfernte Elemente der diskretisierten Struktur bei der FE-Analyse ignoriert werden können und wodurch die Anzahl der Unbekannten für die FE-Analyse abnimmt. Die sukzessive Reduktion der Struktur sollte sehr kleinschrittig erfolgen, um eine stabile Konvergenz zu ermöglichen, wodurch die Gesamtanzahl an FE-Analysen für die Optimierung zunimmt. Hierbei sind die Evolutionsraten, d.h. wie viel Strukturvolumen pro Iteration entfernt werden darf, die maßgebende Größe. Dennoch ist nicht gewährleistet, dass die ESO-Methode in jedem Fall zu einer optimalen Lösung führt [Zhou u. Rozvany (2001)]. Im schlimmsten Fall kommt es zum Abreißen von Lagerbedingungen, was zu singulären Steifigkeitsmatrizen innerhalb der FE-Analyse und schließlich zum Versagen des Algorithmus führt. Entsprechende Beschränkung und Algorithmen müssen implementiert werden, um eine stabile Konvergenz zu ermöglichen [Bruns u. Tortorelli (2003); Huang u. Xie (2008, 2010b)].

Um das Abreißen von Lagerbedingungen zu verhindern und Anzahl an Iterationen für Probleme zu verringern, bei welchen das Volumen des Anfangsdesign bzw. Designraumes weitaus größer ist als das Zielvolumen der Struktur (z.B. Tragwerkskonstruktionen), führten Querin u. a. (2000a) die AESO-Methode (*additive evolutionary structural optimization*) ein. Der AESO-Algorithmus beginnt mit einer minimalistischen Struktur (z.B. gerade Balken zwischen Lastangriffspunkten und Lagerung) und fügt sukzessiv der Struktur Material an Rändern der Struktur mit hoher Priorität hinzu, wobei die gleichen Kriterien wie für die ESO-Methode für die Elemente am Strukturrand angewandt werden können. Querin u. a. (2000a) merkten an, dass die Ergebnisse mit Hilfe von AESO ohne Möglichkeit der Entfernung von Material i.d.R. zu unbrauchbaren Ergebnissen führen. Beispielsweise kann die Anfangsstruktur, welche durchaus

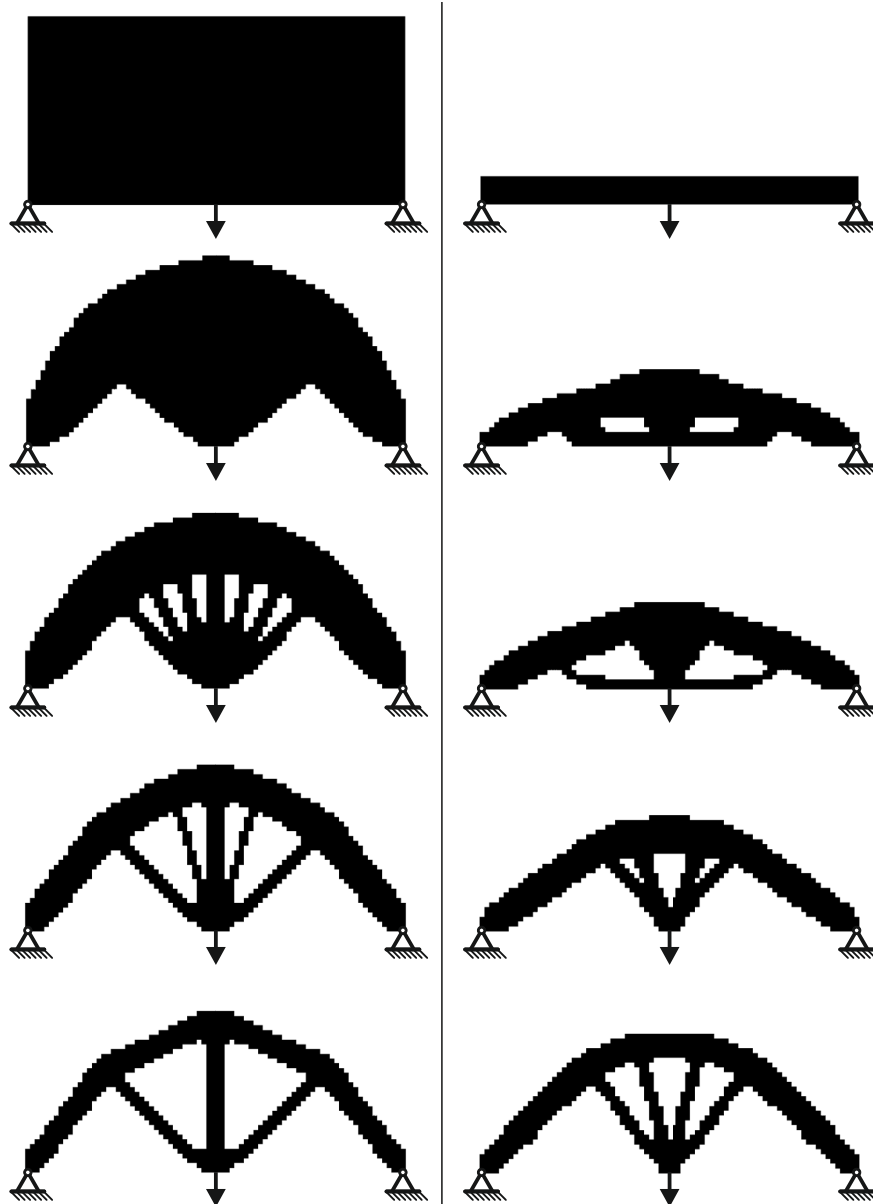


Abbildung 2.2.1.: Gegenüberstellung der Entwicklung der Topologie während der Optimierung mit ESO (links) und BESO (rechts).

nicht Teil einer optimalen Lösung sein kann, nicht aus der Struktur entfernt werden wodurch sich überdimensionierte Strukturen ergeben. Dementsprechend wurde die BESO-Methode (*bi-directional evolutionary structural optimization*) entwickelt [Querin u. a. (2000b)].

Die BESO-Methode kombiniert ESO und AESO: Diskretisierte Materialpunkte können simultan der Struktur hinzugefügt oder entfernt werden. Dadurch können Fehler und Singularitäten der ESO-Methode durch verfrühtes Entfernen von Material korrigiert und überdimensionierte Strukturen aufgrund der AESO-Methode reduziert werden. Insgesamt läuft BESO stabiler und es können höhere Evolutionsraten als bei ESO verwendet werden, wodurch weniger Iterationen nötig sind. Des Weiteren können beliebige Anfangsdesign gewählt werden, sodass – bestenfalls – das Anfangsdesign nahe der optimalen Struktur ist, um die Anzahl an Iterationen weiter zu reduzieren Huang u. Xie (2007). Neben des zu Grunde liegenden nicht-wohlgestellten mathematischen Problems (mehr hierzu in Abschnitt 2.6), können binäre

Designvariablen bzw. Integer-Designvariablen im Vergleich zu kontinuierlichen Designvariablen zu numerischen Komplikationen wie divergierenden oder oszillierenden Lösungen führen. Dementsprechend werden (heuristische) Modifikationen wie historische Mittlungen und Projektionsschemata eingeführt um eine stabile und schnelle Konvergenz zu gewährleisten [Huang u. Xie (2007); Zuo u. Xie (2015)].

Zusammenfassend ist die (B)ESO-Methode intuitiv und kann mit wenig Aufwand in kommerzielle FE-Systeme implementiert werden. Die Methoden liefern produzierbare „Schwarz-Weiß“-Lösungen mit eindeutigen Konturen der Topologie. Allerdings leiden Ansätze mit diskreten Dichten unter numerischen Komplikationen, welche i.d.R. durch heuristische Algorithmen behoben werden.

2.3. Optimierung der Mikrostruktur und Homogenisierung

Die Lösung der Nachgiebigkeitsminimierung im Rahmen der Topologieoptimierung ist eine immer feiner werdende Mikrostruktur [Kohn u. Strang (1986a); Eschenauer u. Olhoff (2001); Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Die Annahme von makroskopischen Strukturen, welche von einer homogenen Mikrostruktur ausgehen, führt damit zu einem mathematisch nicht-wohlgestellten Problem, da die optimale Lösung basierend auf Mikrostrukturen nicht abgebildet werden kann (Siehe Abschnitt 2.6 und 3.4). Dementsprechend entwickelten Bendsøe u. Kikuchi (1988) ein Multiskalenmodell für die Topologieoptimierung basierend auf *Homogenisierungsmethoden* [Kanouté u. a. (2009)]. Bei der Topologieoptimierung basierend auf Homogenisierung wird in jedem Materialpunkt der Makrostruktur (bzw. des Designraumes) eine sich periodisch wiederholende heterogene Mikrostruktur angenommen, dessen lokale Ausprägung Teil des Optimierungsproblems ist. Für das makroskopische Modell, d.h. das zu optimierende Randwertproblem, werden die effektiven Materialeigenschaften in jedem (diskretisierten) Materialpunkt in Abhängigkeit der Ausprägung der Mikrostruktur mit Hilfe von Homogenisierungsmethoden ermittelt. Dadurch wird das Optimierungsproblem, dessen Zielfunktion auf makroskopischer Ebene definiert wird, relaxiert und ist wohl-gestellt [Kohn u. Strang (1986b); Sigmund u. Petersson (1998); Eschenauer u. Olhoff (2001)].

Die heterogene Mikrostruktur wird über sogenannte Einheitszellen definiert. Diese beschreiben die Geometrie der Mikrostruktur innerhalb eines aus makroskopischer Sicht infinitesimalen (unendlich kleinen) Quadrates. Üblicherweise wird nur eine Einheitszelle für den ganzen Designraum definiert, welche aber über kontinuierliche Geometrieparameter parametrisiert wird, sodass sich lokal unterschiedliche Mikrostruktureausprägungen ergeben. Aufgrund der Annahme infinitesimal kleiner Einheitszellen, geht man von vernachlässigbar kleinen Unterschieden in der Geometrieausprägung zwischen benachbarten Einheitszellen aus, sodass periodische Randbedingungen angenommen werden können [Kanouté u. a. (2009)].

Die Geometrieparameter für die Einheitszellen eines jeden (diskretisierten) Materialpunktes sind die Designvariablen des Problems. Hierbei hat die lokale Orientierung der anisotropen Mikrostruktur einen starken Einfluss auf die makroskopischen Materialeigenschaften und wird daher ebenfalls als Designvariable eingeführt. Bendsøe u. Kikuchi (1988) und Suzuki u. Kikuchi (1991) führten zunächst quadratische Einheitszellen bestehend aus einem isotropen und homogenen Material mit einem quadratischen bzw. rechteckigen Loch ein. Die Breite $b \in [0, 1]$ und ggf. die Höhe $h \in [0, 1]$ des Loches sowie Orientierungswinkel φ der Einheitszelle werden als Designvariable für jeden (diskretisierten) Materialpunkt definiert. Da für diese Art von

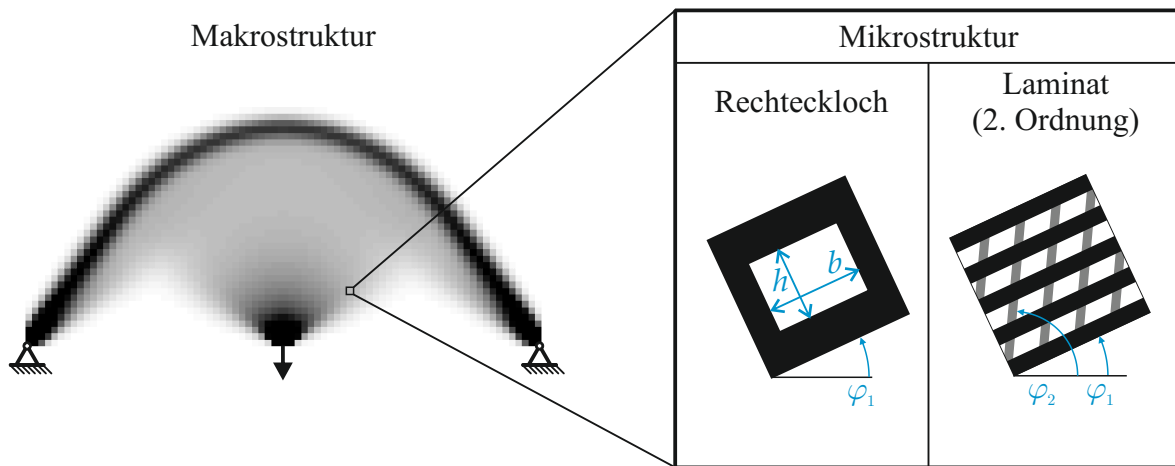


Abbildung 2.3.1.: Illustration des Mehrskalenansatzes für die Topologieoptimierung basierend auf Homogenisierung mit zwei Ansätzen für die Geometrie der Einheitszelle zur Modellierung der Mikrostruktur.

Einheitszelle keine analytische Lösung für die effektiven (d.h. makroskopischen) Materialeigenschaften in Abhängigkeit der Geometrieparameter existieren, wird die Homogenisierung in diesem Fall numerisch mit Hilfe der FEM durchgeführt. In der Regel werden hierfür nur eine endliche Anzahl von Probegeometrien mit variierenden Geometrieparametern mit Hilfe von FE-Analysen ausgewertet und geeignete Interpolationsschemata für die kontinuierlich variierenden Designvariablen entwickelt.

Allaire u. Kohn (1993) zeigten, dass quadratische bzw. rechteckförmige Löcher suboptimale Mikrostrukturen für die Nachgiebigkeitsminimierung darstellen und Lamine (auch Schichtverbunde genannt) einer optimalen Mikrostruktur entsprechen. Ein großer Vorteil von Laminaten ist zudem, dass für das mikrostrukturelle Optimierungsproblem eindeutige und analytisch bestimmbare Lösungen existieren [Bendsøe (1989); Eschenauer u. Olhoff (2001); Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Ein Laminat erster Ordnung ist definiert als alternierende planare (infinitesimal dünne) Schichten zweier Materialien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften (ggf. auch die Abwesenheit von Material) entlang einer definierten Richtung gegeben durch den Orientierungswinkel φ_1 . Lamine höherer Ordnung sind rekursiv definiert: In einem Laminat zweiter Ordnung ist eine der Laminatschichten selbst ein Laminat erster Ordnung (siehe Abb. 2.3.1). Durch die entsprechende rekursive Definition ergeben sich Lamine beliebig hoher Ordnung, welche quasi aus Laminaten in Laminaten bestehen. Als Designvariablen werden die Orientierung jeder Laminatordnung φ_i sowie die relativen Volumenanteile der jeweiligen Materialien pro Laminatordnung in jedem (diskretisierten) Materialpunkt definiert. Alternativ können sogenannte *Moment*-Parametern als Designvariablen definiert werden: Lamine beliebig hoher Ordnung können mit 5 Geometrieparametern bzw. Designvariablen für den zweidimensionalen Fall und 15 für den dreidimensionalen Fall definiert werden [Eschenauer u. Olhoff (2001); Bendsøe u. Sigmund (2003)].

Aus mathematischer Sicht ist die Topologieoptimierung basierend auf Homogenisierungsmethoden vorteilhaft aufgrund der Wohlgestelltheit und damit eindeutigen Lösung der Nachgiebigkeitsminimierung. Allerdings beschränkt sich dies auf Nachgiebigkeits- und Eigenfrequenzoptimierung während allgemeine Zielfunktionen nicht vollständig relaxiert werden und eine zusätzliche Regularisierung des Problems nötig ist [Allaire u. a. (2000)]. Der numerische Rechenauf-

wand bei den Homogenisierungsmethoden ist aufgrund der höheren Anzahl an Designvariablen pro (diskretisiertem) Materialpunkt höher als bei Optimierungsmodellen basierend auf Dichtevervariablen (Siehe Abschnitt 2.2 und 2.4), welche nur eine Designvariable pro (diskretisiertem) Materialpunkt benötigen. Die Strukturen, welche sich bei der Topologieoptimierung basierend auf Homogenisierung ergeben, sind grundsätzlich nicht produzierbar, da diese Bereiche mit sich über den Ort kontinuierlich verändernde Ausprägung der Mikrostruktur aufweisen. Prinzipiell werden in der Industrie Strukturen mit homogener Mikrostruktur und ohne Dichtegradienten, d.h. entweder Vollmaterial oder Abwesenheit von Material, bevorzugt. Die Mikrostrukturen bzw. Dichtegradienten lassen sich zwar über Bestrafungsterme unterdrücken, allerdings führt dies zu einem nicht-wohlgestelltem Optimierungsproblem [Allaire u. Kohn (1993)]. Aus dieser Überlegung haben sich Methoden basierend auf kontinuierlicher Dichteverteilung mit Bestrafung der Mischphase ergeben, welche die Mikrostruktur nicht explizit mit einbeziehen. Die Methoden basierend auf kontinuierlicher Dichteverteilung werden im folgenden Abschnitt 2.4 diskutiert.

Erwähnt sei noch ein anderer Bezug der Homogenisierung zur Topologieoptimierung: Die sogenannte *inverse Homogenisierung* [Sigmund (1994); Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Hier wird die heterogene Mikrostruktur innerhalb der Einheitszelle als eigenständiges Optimierungsproblem angesehen, d.h. das mechanische Randwertproblem ist definiert durch eine Einheitszelle unter homogener Dehnungs- bzw. Spannungsverteilung mit periodischen Randbedingungen. Dabei wird die Verteilung isotroper Materialien bzw. die Topologie der Mikrostruktur innerhalb der Einheitszelle optimiert. Dementsprechend kann die inverse Homogenisierung zur Optimierung von Metamaterialien angewandt werden, beispielsweise zwecks bestimmter thermomechanischer oder elektromechanischer Eigenschaften oder mechanischer Eigenschaften wie negative Querkontraktionsszahlen für auxetische Materialien.

2.4. Kontinuierliche Dichte

Topologieoptimierungsansätze basierend auf kontinuierlichen Dichtevervariablen haben sich aus den Homogenisierungsmethoden heraus entwickelt [Bendsøe (1989)]: Anstatt die Mikrostruktur explizit zu modellieren, werden einfache Ersatzmaterialgesetze bzw. Materialinterpolationen, welche eine homogenisierte Mikrostruktur abbilden sollen, eingeführt. Die Materialinterpolationen sind abhängig von nur einer einzelnen Dichtevervariable $\chi \in [0, 1]$ pro (diskretisiertem) Materialpunkt. Dadurch reduziert sich die Anzahl der zu bestimmenden Designvariablen im Vergleich zu den Homogenisierungsmethoden und der Rechenaufwand wird deutlich reduziert. Ähnlich wie bei den Ansätzen mit diskreter Dichte, indiziert $\chi = 1$ die Anwesenheit von (voll ausgebildetem) Material, während $\chi = 0$ die Abwesenheit von Material indiziert. Der Hauptunterschied zu diskreten Dichten ist, dass *Mischphasen* (englisch *intermediate densities*) $\chi \in]0, 1[$ zulässig sind. Dadurch können effiziente numerische Lösungsverfahren für die Minimierung basierend auf Gradienten angewandt werden. Ansätze mit kontinuierlicher Dichte sind häufig einfach zu implementieren und numerisch robust, wodurch sich diese Ansätze großer Beliebtheit erfreuen und zu vielen Forschungsprojekten führen. Das gängigste Optimierungsproblem ist Nachgiebigkeitsminimierung unter Vorgabe des Strukturvolumens, welches

geschrieben werden kann als [Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003)]

$$\min_{\chi} \left[\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \quad (2.4.1)$$

$$\text{u.d.B.:} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.4.2)$$

$$\int_{\Omega} \chi \, dV - \Omega_S = 0 \quad (2.4.3)$$

$$0 < \rho(\chi) \leq 1, \quad (2.4.4)$$

wobei Gl. (2.4.1) die Arbeit der externen Kräfte als Zielfunktion beschreibt. Gleichung (2.4.1) entspricht dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* (Siehe auch Gl. (3.2.9)), welches das mechanische Gleichgewicht als Randbedingung in das Optimierungsproblem einbindet. Hierfür wird für ein linear elastisches Material mit dem Materialtensor $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\chi(\mathbf{x})) = \rho(\chi(\mathbf{x})) \mathbb{E}_0$ angenommen, welcher durch den Steifigkeitstensor $\mathbb{E}_0$ des verwendeten Materials und der Interpolationsfunktion $\rho(\chi(\mathbf{x})) \in]0, 1] \, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ definiert ist. Dementsprechend wird die Nebenbedingung (2.4.4) eingeführt, sodass die Vollmaterialsteifigkeit $\mathbb{E}_0$ nicht überschritten wird. Zudem verhindert $0 < \rho_{\min} \leq \rho$ Singularitäten während der numerischen Lösung: Die Abwesenheit von Material wird durch Material geringfügiger Steifigkeit $\rho_{\min} \mathbb{E}_0$ simuliert. Prinzipiell können beliebige Interpolationstensoren $\mathbb{E}_{ijkl}(\chi) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ mit unterschiedlichen Funktionen in Abhängigkeit der DichtevARIABLE für jede Tensorkomponente angewandt werden. Die Form basierend auf einer skalaren Funktion $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \rho(\chi(\mathbf{x})) \mathbb{E}_0$ ist jedoch wesentlich einfacher in ein FEM-System zu implementieren und wird daher am häufigsten angewandt. Gleichung (2.4.3) beschränkt das Strukturvolumen auf ein vorgegebenes Ω_S , wobei häufig das Strukturvolumen als relative Größe $\varrho = \Omega_S/\Omega$ definiert wird. Häufig wird das Optimierungsproblem in seiner diskretisierten Form gemäß der FEM angegeben als [Sigmund (2001a); Bendsøe u. Sigmund (2003)]

$$\min_{\bar{\chi}_e} [\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}] \quad (2.4.5)$$

$$\text{u.d.B.:} \quad \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{f}} = 0 \quad (2.4.6)$$

$$\Omega_S - \sum_{e=1}^{N_e} \bar{\chi}_e \Omega_e = 0 \quad (2.4.7)$$

$$0 < \rho(\bar{\chi}) \leq 1, \quad (2.4.8)$$

wobei $\hat{\mathbf{f}}$ die Knotenkräfte und $\hat{\mathbf{u}}$ die Verschiebungen in den Knoten beschreiben. Die DichtevARIABLE χ wird häufig elementweise (gekennzeichnet als $\bar{\chi}$) für die Elemente $e \in \{1, \dots, N_e\}$ diskretisiert. Die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ ist gegeben durch die Assemblierung der interpolierten Elementsteifigkeitsmatrizen $\rho(\bar{\chi}_e) \mathbf{K}_0|_e$, wobei $\mathbf{K}_0|_e$ die Elementsteifigkeitsmatrix mit Vollmaterial $\mathbb{E}_0$ beschreibt.

Im allgemeinen werden Mischphasen $\chi \in]0, 1[$ nicht unterdrückt wodurch sich entsprechend keine diskreten „Schwarz-Weiß“-Lösungen $\chi \in \{0, 1\}$ ergeben. Beispielsweise führt $\rho(\chi) = \chi$ für $\Omega \in \mathbb{R}^2$ zur Dickenoptimierung einer Scheibe (englisch *variable thickness sheet problem*) [Rossow u. Taylor (1973); Sigmund u. Petersson (1998)]: Hierbei beschreibt die DichtevARIABLE χ die lokale (dimensionslose) Dicke der Scheibe, deren optimale Lösungen üblicherweise größtenteils aus Mischphasen $\chi \in]0, 1[$ bestehen (Siehe Abbildung 2.4.1). Für allgemeine dreidimensionale Probleme $\Omega \in \mathbb{R}^3$ sind Mischphasen aus fertigungstechnischer Sicht, ähnlich wie homogenisierte Mikrostrukturen, ungünstig bzw. ungewollt. Dies gilt ebenso für die

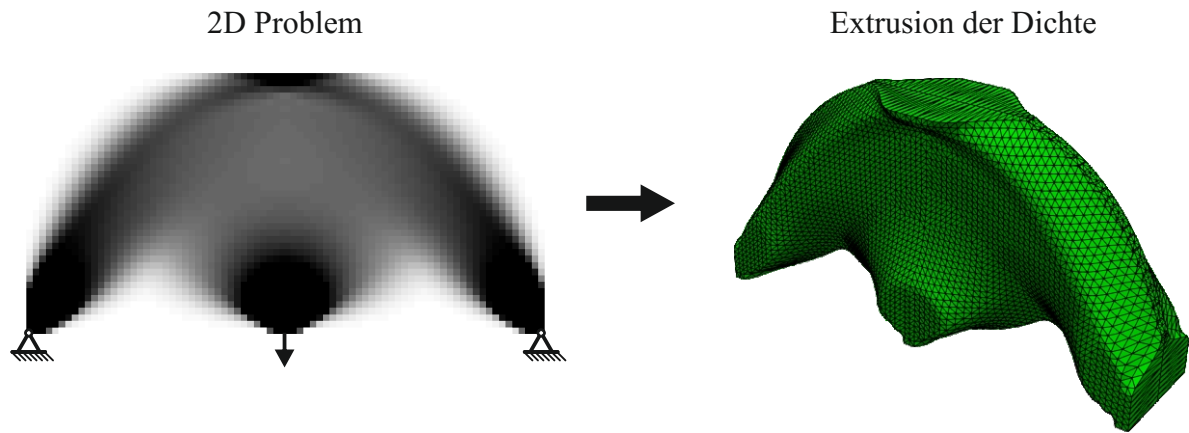


Abbildung 2.4.1.: Dickenoptimierung einer Scheibe (englisch *variable thickness sheet problem*) mittels zweidimensionaler Topologieoptimierung basierend auf kontinuierlicher Dichte ohne Bestrafung von Mischphasen.

Topologie von Scheiben mit vorgegebener Dicke (zum Beispiel Stanzerzeugnisse). Mischphasen können jedoch bestraft werden, um mit voranschreitendem Optimierungsverlauf (nahezu¹) diskrete Lösungen zu erhalten (Siehe Abb. 2.4.2). In sogenannten SIMP (*solid isotropic Material with penalization*) Ansätzen werden Mischphasen implizit durch eine nicht-lineare, monoton steigende Funktion $\rho(\chi)$ und die lineare Volumen-Nebenbedingung aus Gl. (2.4.3) bzw. (2.4.7) bestraft. Dadurch werden Mischphasen ineffizient, da ihre Steifigkeit pro eingesetztem Material im Verhältnis zu Vollmaterial geringer ausfällt: Eine Struktur aus Mischphasen würde bei gleicher Materialsteifigkeit mehr Volumen „kosten“ (d.h. verbrauchen) als eine Struktur aus Voll- und „Leer“-Material. Dementsprechend lassen sich der SIMP-Ansätze sowohl für die Steifigkeitsmaximierung unter Vorgabe des Strukturvolumens sowie der Strukturvolumenminimierung (Gewichtsminimierung) unter Vorgabe der Struktursteifigkeit anwenden. Während der Optimierung werden folglich die ineffizienten Mischphasen gemieden und entweder durch Vollmaterial $\chi = 1$ ersetzt oder gänzlich entfernt $\chi = 0$. Verschiedene Materialinterpolationen $\rho(\chi)$ sind möglich, welche Mischphasen mehr oder weniger effektiv bestrafen [Bendsøe u. Sigmund (1999); Hvejsel u. Lund (2011)]. Der mit Abstand am häufigsten verwendete Ansatz ist das Potenzgesetz (englisch *power law*) $\rho(\chi) = \chi^p$ mit $p > 1$. Ursprünglich wurde dieser Ansatz als heuristisch bzw. künstlicher Ansatz (*fictitious material model*) angesehen. Bendsøe u. Sigmund (1999) zeigten jedoch, dass das Potenzgesetz für

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu_0}, \frac{4}{1 + \nu_0} \right\} \quad \text{für 2D}$$

$$p \geq \max \left\{ \frac{15(1 - \nu_0)}{7 - 5\nu_0}, \frac{3(1 - \nu_0)}{2(1 - 2\nu_0)} \right\} \quad \text{für 3D}$$

die Hashin-Shtrikman-Bedingungen erfüllt und es folglich für jeden Wert $0 \leq \chi^p \leq 1$ Mikrostrukturen mit entsprechenden Steifigkeitseigenschaften geben muss, wobei ν_0 die Querkontraktionszahl (englisch *Poisson's ratio*) des Materials darstellt. Bendsøe u. Sigmund (1999) argumentierten jedoch, dass die physikalische Konsistenz von Mischphasen für Zwischenergebnisse vernachlässigbar ist, sofern die Optimierung diskrete Lösungen im konvergierten Zustand

¹Übergangszonen mit Mischphasen ergeben sich i.d.R. aufgrund Regularisierungstechniken, deren Notwendigkeit und Umsetzung näher in Abschnitt 2.6 erläutert werden.

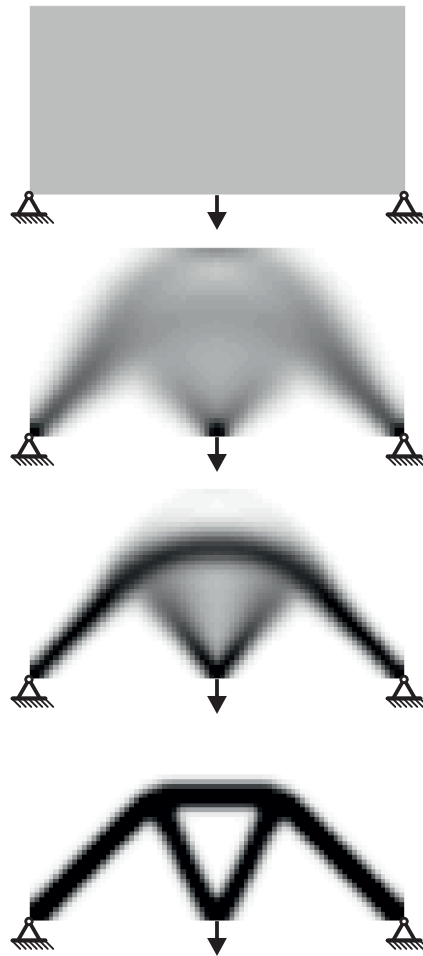


Abbildung 2.4.2.: Entwicklung der Topologie während der Optimierung basierend auf kontinuierlicher Dichte mit Bestrafung der Mischphasen.

liefern.

Um das Optimierungsproblem zu lösen, können mathematische Optimierungsalgorithmen für die Minimierung unter Nebenbedingungen nichtlinearer Probleme für die diskretisierte Formulierung in Gl. (2.4.5) bis (2.4.8) angewandt werden. Hierzu existieren eine Vielzahl an Methoden, jedoch ist zu beachten, dass das Topologieoptimierungsproblem eine große Anzahl an Designvariablen, d.h. Anzahl an Unbekannten innerhalb der Optimierung, besitzt: Pro finites Element (bzw. Diskretisierungspunkt) ergibt sich eine skalare Designvariable $\bar{\chi}$. Grundsätzlich haben sich Optimierungsalgorithmen basierend auf sequentieller Approximierung durchgesetzt [Duysinx (1997); Groenwold u. Etman (2008)]. Hierzu gehören das *sequential linear programming* (SLP) [Yang u. Chuang (1994)], das *sequential quadratic programming* (SQP) [Schittkowski (1986)] und die *method of moving asymptotes* (MMA) [Groenwold u. Etman (2008)].

Die genannten Optimierungsalgorithmen – und viele andere – sind gradientenbasiert, d.h. sie benötigen Informationen bezüglich der Änderung der Zielfunktion in Abhängigkeit der Designvariablen. Diese werden als *Sensitivitäten* bezeichnet, welche als die Ableitung der Zielfunktion (2.4.1) nach den (diskretisierten) Designvariablen definiert sind. Für das Minimierungsproblem gemäß Gl. (2.4.5) bis (2.4.4) ergibt sich für den Fall von designunabhängigen Kräften

$\hat{\mathbf{f}} \neq \hat{\mathbf{f}}(\chi)$ die Sensitivitäten

$$\mathcal{Z}_{\bar{\chi}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (2.4.9)$$

$$= \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\chi}}, \quad (2.4.10)$$

wobei die Ableitung der Verschiebungen nach der Designvariable über die Ableitung des mechanischen Gleichgewichts (2.4.6), welche als Nebenbedingung im Optimierungsproblem gegeben ist, bestimmt werden kann als

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\chi}} \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\chi}} = \mathbf{0} \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \bar{\chi}} = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.4.13)$$

Durch Einsetzen in Gl. (2.4.10) und unter Verwendung von $\mathbf{K}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{u}}$ ergeben sich die elementweise definierten Sensitivitäten zu

$$\mathcal{Z}_{\bar{\chi}} = -\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\chi}} \mathbf{K}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.4.14)$$

Alternativ können die Sensitivitäten hergeleitet werden, indem die Zielfunktion umgeschrieben wird, sodass

$$\mathcal{Z}_{\bar{\chi}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\chi}} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{f}}) \quad (2.4.15)$$

$$= \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{f}} \quad (2.4.16)$$

$$= -\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{f}} \quad (2.4.17)$$

$$= -\hat{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (2.4.18)$$

folgt. Die Herleitung der Sensitivitäten für das kontinuierliche Problem in Gl. (2.4.1) ist in Anhang A.1 dargelegt. Die gezeigte Nachgiebigkeitsminimierung ist selbst-adjungiert (englisch *self adjoint*), sodass keine (zusätzlichen) Gleichungssysteme zur Bestimmung von partiellen Ableitungen gelöst werden müssen. Für komplexere Probleme wird üblicherweise die adjungierte Methode (englisch *adjoint method*) angewandt [Cao u. a. (2003); Bendsøe u. Sigmund (2003)].

Weitere Lösungsansätze für die Topologieoptimierung mit kontinuierlichen DichtevARIABLEN basieren auf *partiellen Differentialgleichungen* (PDG(s)) (englisch *partial differential equation(s)*), welche mit Hilfe variationeller Prinzipien hergeleitet werden können. Hierbei wird das Optimierungsproblem analog zu einem klassischen mechanischen Problem bzw. Materialmodellierung angesehen. Üblicherweise ergibt sich eine Zeitableitung innerhalb der PDGs, sodass diese mit herkömmlichen numerischen Verfahren, z.B. explizites oder implizites Euler-Verfahren, gelöst werden können. Die Lösung der PDGs ergibt damit die zeitliche Evolution der

Struktur in Richtung Optimum. Die Zeit hat dabei keinen direkten Bezug zur physikalischen Zeit und wird daher oft nur mit den Iterationsschritten des Optimierungsalgorithmus assoziiert. Klarbring u. Torstenfelt (2010) setzten das Optimierungsproblem mit dynamischen Systemen gleich und konnten so Parallelen bzw. Verbindungen zu Modellen für biologisches Wachstum (z.B. Knochenwachstum und Remodellierung) [Waffenschmidt u. Menzel (2012); Klarbring u. Torstenfelt (2012a)] und thermodynamischen Prinzipien [Klarbring u. Torstenfelt (2012b)] aufzeigen. In Junker u. Hackl (2015a) und Junker u. Hackl (2016b) wurden Methoden aus der Materialmodellierung zur Beschreibung von mikrostrukturellen Evolutionsprozessen genutzt, um entsprechende PDGs für die Topologieoptimierung zu bestimmen. Hierbei wurde mit Hilfe des *Hamilton-Prinzips* für dissipative Systeme mit einem visko-plastischen Ansatz eine thermodynamische Topologieoptimierung (TTO) basierend auf Wachstumsprozessen entwickelt.

Aus dem Ansatz nach Junker u. Hackl (2016b) entwickelten sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit weitere Ansätze und Modellerweiterungen, welche im späteren Verlauf der Arbeit genauer diskutiert werden: In Jantos u. a. (2016) wurde eine (TTO) basierend auf Wachstum mit einem viskosen Ansatz für die Dissipation entwickelt, welcher die gezielte Kontrolle des Strukturvolumens ermöglichte und welcher in Jantos u. a. (2018) um die thermodynamische Optimierung (TDO) der lokalen Materialorientierung von anisotropen Materialien erweitert wurde. Die Funktionsweise eines TTO-Ansatzes ohne Wachstum wurde in Jantos u. a. (2019c) gezeigt und in Jantos u. a. (2019a) um eine numerisch effiziente Regularisierungstechnik erweitert, welche eine praktikable Kontrolle des Mindeststrukturabmaßes (kleinst möglicher Radius eines zusammenhängenden Struktursegmentes) und damit der Strukturkomplexität ermöglicht. In Gaganelis u. a. (2019) wurde ein TDO-Ansatz für mehrphasige Strukturen, bestehend aus einem zug- und einem druckaffinen Material, gezeigt. Eine Übersicht der Ansätze ist in Junker u. Jantos (2019) gegeben.

Die *Phasenfeldmethode* ist ein weiterer Ansatz für die Topologieoptimierung, welcher seine Ursprünge in der Materialmodellierung hat und auf der Lösung von PDGs basiert. Ursprünglich wurde die Phasenfeldmethode für Systeme bestehend aus mehreren Phasen entwickelt, deren physikalische Umwandlungsprozesse basierend auf chemischen Potentialen beschrieben werden [Cahn u. Hilliard (1958)]. Bourdin u. Chambolle (2003) und Wang u. Zhou (2004) setzten erstmals eine Phasenfeldmethode für die Topologieoptimierung ein, welche auf der Van der Waals-Cahn-Hilliard-Theorie basiert und die Topologie innerhalb des Designraumes mittels einer Vollmaterialphase und einer Phase, welche die Abwesenheit von Material definiert, beschreibt. Mischphasen werden explizit mit einem sogenannten *double-well potential* energetisch bestraft, wobei eine diffuse Übergangszone (bestehend aus Mischphasen) mit definierter Breite eingeführt wird. Ein entsprechendes Minimierungsproblem kann beschrieben werden als

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \min_{\chi} \left[\underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\chi) : \chi \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\chi) \, dV}_{\text{Zielfunktion}} + \epsilon \beta \int_{\Omega} \Phi(\nabla \chi) \, dV + \frac{p}{\epsilon} \int_{\Omega} w(\chi) \, dV \right]. \quad (2.4.19)$$

Die konvexe Funktion $\Phi(\nabla \chi)$ dient der Regularisierung des Problems mittels Gradientenbestrafung (Siehe Abschnitt 2.6). Die Breite der diffusen Übergangszone wird über den Parameter β bzw. $\epsilon \beta$ definiert. Im Gegensatz zu SIMP, enthält die Zielfunktion (erster Term in Gl. (2.4.19)) keine Bestrafung von Mischphasen, stattdessen werden Mischphasen explizit über das *double-well potential* gegeben durch die Funktion $w(\chi)$ bestraft. Die Funktion $w(\chi)$ besitzt im Idealfall exakt zwei Minima an den Intervallgrenzen $\chi = \{0, 1\}$, sodass Mischphasen energetisch ungünstig sind und entsprechend bestraft werden. Damit wird gleichzeitig die Intervallbegren-

zung $\chi \in [0, 1]$ automatisch eingehalten, sodass keine zusätzlichen Kuhn-Tucker-Parameter eingeführt werden müssen. Ein typisches Beispiel ist $w(\chi) = \chi^2(1 - \chi)^2$. Des Weiteren kann durch Anwendung einer generalisierten Form der Cahn-Hilliard Gleichung der Massenerhalt per se erfüllt werden, d.h. der Volumenanteil der Phasen bleibt konstant, sodass das Zielvolumen der Struktur durch die Anfangsbedingung ohne zusätzliche Einführung von Lagrange-Multiplikatoren umgesetzt werden kann [Wallin u. a. (2012); Dedè u. a. (2012)]. Häufig wird durch die schrittweise Annäherung an $\epsilon \rightarrow 0$ (englisch *continuation*) eine „Schwarz-Weiß“-Lösungen erreicht, da die Breite der erzwungenen Übergangszone gegen null geht (zweiter Term in Gl. (2.4.19)) und gleichzeitig die Bestrafung der Mischphasen zunimmt (dritter Term in Gl. (2.4.19)). Aufgrund der verhältnismäßig vielen dimensionslosen Parametern innerhalb der Phasenfeldmethode, welche keine physikalische bzw. intuitive Interpretation haben, sind i.d.R. für das jeweilige Randwertproblem Parameterstudien nötig, um plausible und produzierbare Ergebnisse zu erhalten. Des Weiteren hat das Doppel-Wellen-Potential zwecks Phasenseparation (Unterdrückung von Mischphasen) keinen physikalischen Bezug zur optimalen Mikrostruktur.

2.5. Ansätze basierend auf Grenzflächen

Ansätze zur Topologieoptimierung, bei welchen die Grenzflächen (Oberfläche der Struktur) als Designvariable betrachtet wird, basieren ursprünglich auf Formoptimierungsansätzen, wobei die Topologiekategorie durch systematische Einbringung von Löchern in die Struktur verändert werden kann. Systematisch meint hierbei, dass die Topologiekategorie dahingehend geändert wird, sodass die Zielfunktion minimiert bzw. maximiert wird. In der Regel wird nur die Formänderung der Strukturgrenzfläche als Designvariable definiert, welche durch die Oberflächennormale $s(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_S$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ auf $\partial\Omega_S$ beschrieben wird. Durch die Beschreibung der Topologie durch Strukturgrenzflächen ergeben sich „Schwarz-Weiß“-Lösungen mit klaren Konturen ohne „graue“ Übergangszonen. Dadurch ist die Geometrie der Struktur klar definiert, wodurch Randbedingungen an den Rändern der Struktur exakt beschrieben werden können, beispielsweise bei Kontaktproblemen. Die für Optimierungsalgorithmen benötigte Variation der Zielfunktion nach der Formänderung der Struktur $s = s(\mathbf{x})$ kann mit Hilfe von Formsensitivitäten (englisch *shape derivative*) beschrieben werden, welche ein Maß für die Entwicklung der Oberflächennormale s liefern, um die Zielfunktion $\mathcal{Z}$ extremal werden lassen [Eschenauer u. a. (1994); Allaire u. a. (2004)]:

$$\delta \mathcal{Z} = \delta \left(\int_{\Omega_S} z \, dV \right) = \int_{\Omega_S} \nabla \cdot (z \, \delta \mathbf{s}) \, dV = \int_{\partial\Omega_S} z \, \underbrace{\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{s}}_{\delta s} \, dA \quad (2.5.1)$$

wobei $\Omega_S \in \Omega$ das Strukturvolumen bzw. $\partial\Omega_S$ den Rand der Struktur beschreiben. Die eigentlichen Designvariablen der Optimierung sind abhängig von der Art der Parametrisierung der Strukturoberfläche, welche die Oberflächennormale $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$ definieren.

Einer der ersten Ansätze zur Topologieoptimierung basierend auf Formoptimierung ist die sogenannte *Bubble-Method* nach Eschenauer u. a. (1994), welche in Abb. 2.5.1 illustriert ist: Zunächst wird die Formoptimierung einer simplen Topologie (zum Beispiel einfach zusammenhängendes Gebiet) durchgeführt. Dabei kann die Form der Struktur mit Hilfe von Flächenparametrisierungen wie *Bezier-Flächen* oder *Non-uniform rational Basis-Splines* (NURBS) beschrieben werden, welche von modernen CAD-Systemen unterstützt werden, sodass aus der Formoptimierung direkt Strukturmodelle für den weiteren Produktionsprozess generiert wer-

den können [Seo u. a. (2010); Piegel u. Tiller (2012)]. Anschließend wird ein infinitesimales (unendlich kleines) Loch in die Struktur eingeführt, wobei die optimale Position mit Hilfe von *topologischen Ableitungen* (engl. *topological derivative* [Novotny u. Sokołowski (2012)]) ermittelt wird. Die sequentielle Formoptimierung und Einbringung von infinitesimalen Löchern wird so lange wiederholt bis die gewünschte Topologiekategorie erreicht ist.

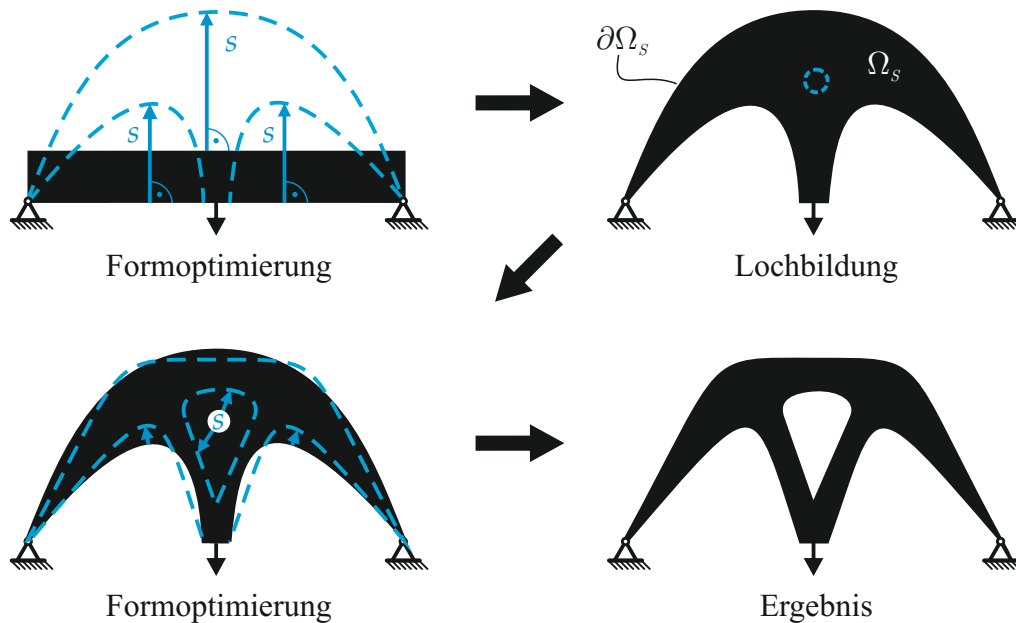


Abbildung 2.5.1.: Topologieoptimierung basierend auf sequentieller Formoptimierung und Erhöhung der Topologiekategorie durch Einbringung von infinitesimalen (unendlich kleinen) Löchern in die Struktur.

Eine weiterer Ansatz zur Topologieoptimierung basierend auf Strukturgrenzflächen ist die sogenannte *Level-Set-Methode* (LSM). Ursprünglich wurde die LSM zur Modellierung von Oberflächenbewegungen physikalischer Prozesse entwickelt [Osher u. Sethian (1988)] und erstmals für Topologieoptimierung von Sethian u. Wiegmann (2000) basierend auf evolutionären Bedingungen (vergleichbar mit ESO) und in einer nun üblicheren Form von Allaire u. a. (2002) basierend auf Formsensitivitäten angewandt. Bei der LSM wird die Strukturgrenzfläche nicht explizit (Lagrange'sche Betrachtungsweise) über – teils komplexe – Parametrisierungen wie bei der Bubble-Method oder klassischen Formoptimierungen definiert, sondern implizit (Eulersche Betrachtungsweise) über die Iso-Fläche einer skalaren Level-Set-Funktion $\phi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega$ im Designraum Ω beschrieben [Osher u. Sethian (1988); Osher u. Fedkiw (2006)]. Üblicherweise gilt die Konvention

- $\phi > 0$: Teil der Struktur bzw. Vollmaterial
- $\phi = 0$: Strukturoberfläche
- $\phi < 0$: Außerhalb der Struktur bzw. Abwesenheit von Material .

Die Level-Set-Funktion ist für den zwei-dimensionalen Fall $\Omega \in \mathbb{R}^2$ in Abb. 2.5.2 illustriert. Durch die implizite Beschreibung über die Level-Set-Funktion können komplexe Form- und Topologieänderungen durch „Verschmelzen“ von Löchern relativ simpel beschrieben werden, während bei einer expliziten Betrachtung hierfür wesentlich komplexe Parametrisierungen und

ggf. Neu-Parametrisierung der Oberfläche während der Optimierung nötig sind [Wang u. a. (2004)]. Für die Umsetzung bezüglich Parametrisierung bzw. Diskretisierung der Level-Set-

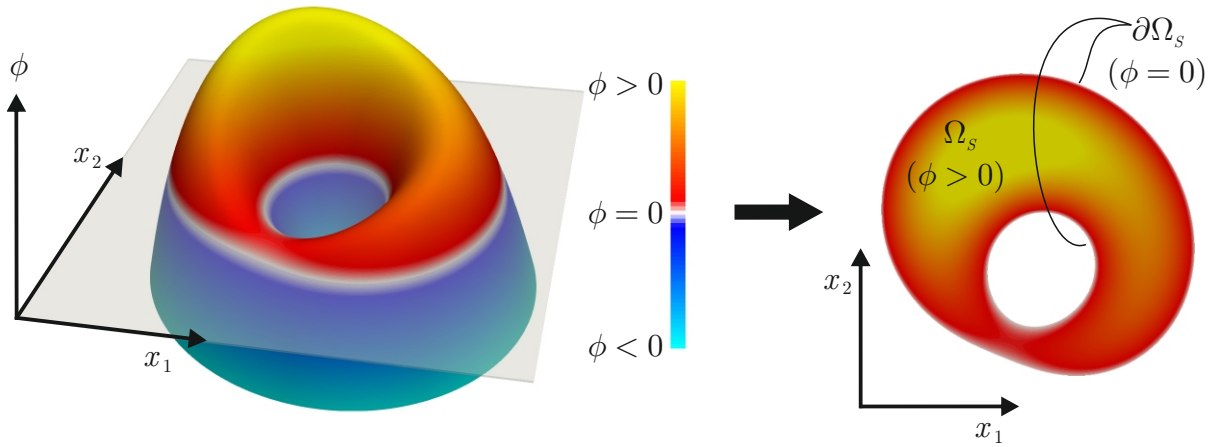


Abbildung 2.5.2.: Darstellung der Level-Set-Funktion ϕ zur Beschreibung der Struktur Ω_S .

Funktion, Umsetzung der mechanischen Analyse und Lösung des Optimierungsproblems existieren eine Reihe unterschiedlichster Ansätze [Osher u. Fedkiw (2006); Sigmund u. Maute (2013); van Dijk u. a. (2013)]. Die Optimierung erfolgt innerhalb der LSM üblicherweise über die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\dot{\phi} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (2.5.2)$$

In der Regel sind nur die Strukturgrenzfläche für $\phi = 0$ relevant, sodass sich die Hamilton-Jacobi Gleichung mit

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{s}} \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \quad (2.5.3)$$

in diesem Fall vereinfacht werden kann zu

$$\dot{\phi} - \dot{\mathbf{s}} \|\nabla \phi\| = 0. \quad (2.5.4)$$

Hierbei beschreibt die Zeitableitung $\dot{\phi}$ bzw. $\dot{\mathbf{s}}$ keine physikalische Zeit sondern die Schritte eines iterativen Optimierungsprozesses. Je nach Zielfunktion z lässt sich eine Beziehung für die Normalengeschwindigkeit $\dot{\mathbf{s}}$ mit Hilfe von Formsensitivitäten gemäß Gl. (2.5.1) bestimmen [Wang u. a. (2003); Allaire u. a. (2004); van Dijk u. a. (2013)].

Die Level-Set-Funktion ϕ wird i.d.R. über die *signed distance function* d definiert, wobei $d(\mathbf{x}, \partial\Omega_S)$ der (kürzeste) Abstand zwischen einem beliebigen Punkt $\mathbf{x}$ und der Strukturgrenzfläche $\partial\Omega_S$ ist:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d(\mathbf{x}, \partial\Omega_S) & \forall \mathbf{x} \in \Omega_S \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_S \\ -d(\mathbf{x}, \partial\Omega_S) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_S. \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Damit ergibt sich die Vereinfachung $\|\nabla \phi\| = 1$. Während der Optimierungsschritte verliert die Level-Set-Funktion die Eigenschaften nach Gl. (2.5.5) und muss ggf. neu definiert werden (englisch *reinitialization*), um die Glattheit der Level-Set-Funktion bzw. $\|\nabla \phi\| = 1$ zu ge-

währleisten, welche entscheidend für die Evolutionsgeschwindigkeit von $\partial\Omega_S$ und damit dem Konvergenzverhalten des Algorithmus ist.

Gleichung (2.5.4) wird mit Hilfe von numerischen Verfahren gelöst, wobei die Parametrisierung bzw. Diskretisierung der Level-Set-Funktion unabhängig von dem numerischen Verfahren zur Lösung des mechanischen Problems zur Bestimmung der Zielfunktion und der Sensitivitäten gewählt werden kann. Übliche Ansätze zur Lösung der die Hamilton-Jacobi Gleichung (2.5.4) basieren auf der Finite-Differenzen-Methode [Osher u. Fedkiw (2006); Sethian u. Wiegmann (2000); Allaire u. a. (2002); Wang u. a. (2003); Allaire u. a. (2004); Wang u. a. (2004); Amstutz u. Andrä (2006)]. Die Lösung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wird in Yamada u. a. (2010) gezeigt. Andere Ansätze basieren auf netzfreien Methoden mit radial symmetrisch abklingenden Gewichtungsfunktionen [Wang u. Wang (2006); Luo u. a. (2007)]. Eine stabile numerische Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung (2.5.4) ist nicht trivial und spezielle numerische Verfahren müssen je nach Parametrisierung angewandt werden, beispielsweise *upwind* Finite-Differenzen-Methode [Sethian u. Wiegmann (2000); Allaire u. a. (2002, 2004); Wang u. a. (2004)]. Alternativ finden mathematische Optimierungsalgorithmen (hauptsächlich MMA) vermehrt Anwendung. Hierbei werden die Parameter der Parametrisierung der Level-Set-Funktion als Designvariablen in verallgemeinerte Algorithmen zur Minimierung unter Nebenbedingungen implementiert [Luo u. a. (2007); Pingen u. a. (2010); Otomori u. a. (2011)].

Da nur die Änderung der Oberflächennormalen für die Optimierung relevant sind, wird die Level-Set-Funktion i.d.R. nur im Umfeld der Oberflächen parametrisiert bzw. diskretisiert (so genanntes *narrow-band scheme*), um den Rechenaufwand zu reduzieren [Sethian u. Wiegmann (2000); Allaire u. a. (2002); Wang u. a. (2003, 2004); Wang u. Wang (2006)]. Dadurch können Löcher, welche im Anfangsdesign vorgegeben werden, „verschmelzen“, sodass sich die Topologiekategorie automatisch reduziert. Um eine Erhöhung der der Topologiekategorie während des Optimierungsprozesses zu ermöglichen, muss allerdings das Geschwindigkeitsfeld mit einer geeigneten Parametrisierung auf den gesamten Designraum erweitert werden [Luo u. a. (2007)]. Alternativ können Löcher sequentiell basierend auf topologischen Ableitungen – wie bei der Bubble-Methode – eingeführt werden [Allaire u. a. (2005); Amstutz u. Andrä (2006)]. Des Weiteren kann die Hamilton-Jacobi Gleichung um Reaktionsterme erweitert werden, um Anpassungen der Topologiekategorie zu ermöglichen [Yamada u. a. (2010)].

Die Strukturanalyse (und damit die Sensitivitätsanalyse) vor jedem Optimierungsschritt erfolgt üblicherweise mit Hilfe der etablierten Finite-Elemente-Methode. Entsprechend muss die Geometrie, welche innerhalb der Optimierung durch die Konturfläche der Level-Set-Funktion beschrieben wird, auf ein Finite-Elemente-Netz abgebildet werden (englisch *geometry mapping*). Hierfür wurden verschiedene Ansätze entwickelt. Die Geometrie der Struktur Ω_S kann nach jedem Optimierungsschritt durch geeignete Algorithmen automatisch erneut vernetzt werden. Dadurch wird die Strukturanalyse mit der höchstmöglichen numerischen Präzision durchgeführt und es werden keine unnötigen Bereiche einbezogen, d.h. Bereiche ohne Material. Nachteilig ist jedoch der erhöhte Rechenaufwand durch die wiederholte Vernetzung sowie die Möglichkeit von Singularitäten und Oszillationen während des Optimierungsprozesses [van Dijk u. a. (2013)]. Alternativ kann ein festes Finite-Elemente-Netz genutzt werden, welches den gesamten Designraum Ω umfasst und innerhalb dessen die Strukturgrenzen exakt über diskontinuierliche Ansatzfunktionen mit Hilfe der *eXtended finite element method* (X-FEM) abgebildet werden können [Van Mieghem u. Duysinx (2007)]. Dabei kann es allerdings zu größeren Diskretisierungsfehlern bei Elementen mit geringem Materialphasenvolumenanteil kommen. Zudem ist die Implementierung verhältnismäßig komplex. Am häufigsten wird eine Projektion der Strukturgeometrie auf ein kontinuierliches Dichtefeld, welches durch ein festes Finite-

Elemente-Netz diskretisiert wird, das den gesamten Designraum Ω umfasst (englisch *ersatz material approach*). Das Dichtefeld ist vergleichbar mit der kontinuierlichen DichtevARIABLE in SIMP-Ansätzen. Die Ermittlung des Dichtefeldes erfolgt über die Auswertung von Volumenanteilen [Allaire u. a. (2004)] bzw. über Projektionen mittels exakten [Van Dijk u. a. (2012)] oder geglätteten Heaviside-Funktionen [Allaire u. a. (2002); Wang u. a. (2003); Yamada u. a. (2010)]. Die Implementierung ist vergleichsweise simpel und die Umsetzung ist numerisch effizient, da simple Vernetzungen genutzt werden können. Allerdings sind feine Diskretisierungen nötig, da große Gebiete mit Mischphasen zu Konvergenzproblemen führen können. Anzumerken ist, dass die Strukturanalyse (und damit die Sensitivitätsanalyse) dann nicht mehr mit einer klaren „Schwarz-Weiß“-Lösung arbeitet und dadurch sich der Hauptvorteil der Level-Set-Methode (d.h. Lösungen mit scharfen Konturen) gegenüber Ansätzen mit kontinuierlicher Dichte relativiert [Sigmund u. Maute (2013)].

Die LSM ein relativ junges Feld innerhalb der Topologieoptimierung und durch die verschiedensten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren ergeben sich weitreichende Forschungsmöglichkeiten. Bisher gibt es noch ungelöste Konvergenzprobleme aufgrund ineffizienter Regularisierung bzw. Kontrolle der Glattheit der Level-Set-Funktion wodurch i.d.R. wesentlich mehr Iterationen als bei Topologieoptimierungsansätzen basierend auf DichtevARIABLEN benötigt werden.

2.6. Checkerboarding, Regularisierung und Filtertechniken

Bei Einbeziehung (und Optimierung) der lokalen Mikrostruktur (siehe Homogenisierungsmethoden in Abschnitt 2.3) wird das Optimierungsproblem relaxiert und ist mathematisch wohlgestellt [Kohn u. Strang (1986b); Sigmund u. Petersson (1998); Eschenauer u. Olhoff (2001)]. Aus produktionstechnischer Sicht sind die aus den Homogenisierungsmethoden resultierenden Mikrostruktur für die meisten Anwendungsfälle ungeeignet. Daher wird häufig die Topologieoptimierung von „Schwarz-Weiß“-Strukturen mit homogener Mikrostruktur bevorzugt. Diese sind jedoch mathematisch nicht-wohl gestellt (Siehe Abschnitt 3.4), egal ob die Topologie mittels diskreter Dichte (Abschnitt 2.2), kontinuierlicher Dichte mit Bestrafung der Mischphasen (Abschnitt 2.4) oder durch die Phasengrenze (Abschnitt 2.5) beschrieben wird. Ein mathematisch nicht-wohlgestelltes Minimierungsproblem besitzt keine eindeutige Lösung und führt bei der numerischen Auswertung zu Instabilitäten wie Konvergenzproblemen und Abhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung. Dieses Thema wird in Abschnitt 3.4 etwas ausführlicher und allgemeiner diskutiert. Im vorliegenden Abschnitt werden nur die Symptome sowie etablierte Lösungsmethoden bezüglich der numerischen Instabilitäten dargelegt.

In der Topologieoptimierung kommt es bei nicht-wohlgestellten Modellen zu Lokalisierungseffekten [Sigmund u. Petersson (1998); Eschenauer u. Olhoff (2001); Bendsøe u. Sigmund (2003); Borrvall (2001)]: Die optimale Lösung ist eine infinitesimale (unendlich kleine), anisotrope und heterogene Mikrostruktur, welche innerhalb der Optimierung eines isotropen Materials mit homogener Mikrostruktur nicht abgebildet werden kann. Ein bekanntes numerisches Resultat in diesem Zusammenhang ist das sogenannte *Checkerboarding* (Entstehung von Schachbrettmustern): Die periodische Wiederholung von abwechselnd Vollmaterial und der Abwesenheit von Material auf der durch die Diskretisierung gegebenen kleinstmöglichen Auflösung (siehe Abb. 2.6.1 und 2.6.2). Des Weiteren wird die Steifigkeit von minimalistischen Balken, welche gegeben sind durch die diagonale Verbindung einzelner mit Vollmaterial gefüllter Elemente, bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen in der FEM numerisch überschätzt [Diaz u.

Sigmund (1995)]. Dadurch entstehen vornehmlich minimalistische Balken mit Vorzugsorientierung entlang der Elementdiagonalen. Folglich sind die numerischen Lösungen abhängig von der Diskretisierung, d.h. der Feinheit und Topologie des Netzes, und es existiert keine eindeutige Lösung des diskretisierten Problems.

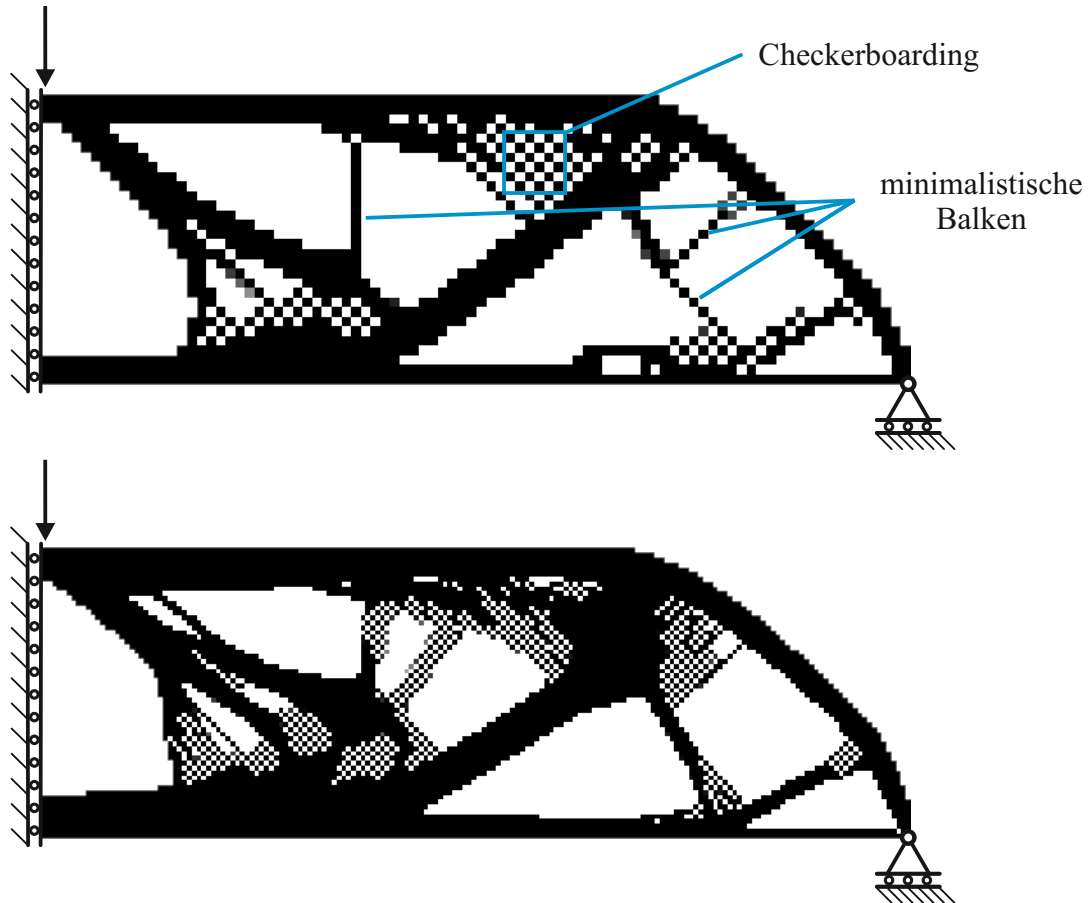


Abbildung 2.6.1.: Netzabhängigkeit und numerische Instabilitäten bei Topologieoptimierung ohne Einbeziehung der Mikrostruktur und ohne Regularisierung. Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich nur in der Auflösung der Diskretisierung mit 90×30 und 180×60 Elementen.

Dementsprechend müssen Regularisierungstechniken für die Topologieoptimierung angewandt werden, falls „Schwarz-Weiß“-Strukturen angestrebt werden, um das Optimierungsproblem zu relaxieren und numerische Instabilitäten zu eliminieren. Viele Regularisierungstechniken können zudem auch genutzt werden, um die Strukturkomplexität zu steuern, d.h. die Topologiekategorie und/oder die charakteristische Länge, welche das Mindeststrukturabmaß (kleinstes zusammenhängendes Volumen eines Struktursegmentes) beschreibt [Cardoso u. Fonseca (2003)]. Die Kontrolle über die Strukturkomplexität ist vor allem aus fertigungstechnischer Sicht von Interesse, um beispielsweise fertigungsbedingte Mindestabmaße in die Optimierung einfließen lassen zu können.

Verschiedenste Regularisierungstechniken wurden entwickelt, welche sich in ihrer praktischen Anwendbarkeit, Implementierungsaufwand sowie Berechnungsaufwand unterscheiden. Dabei sind verschiedene Regularisierungstechniken nicht zwingend an bestimmte Topologieoptimierungsmethoden gebunden. Die gängigsten Regularisierungstechniken lassen sich wie folgt unterteilen [Bendsøe u. Sigmund (2003); Borrvall (2001)]:

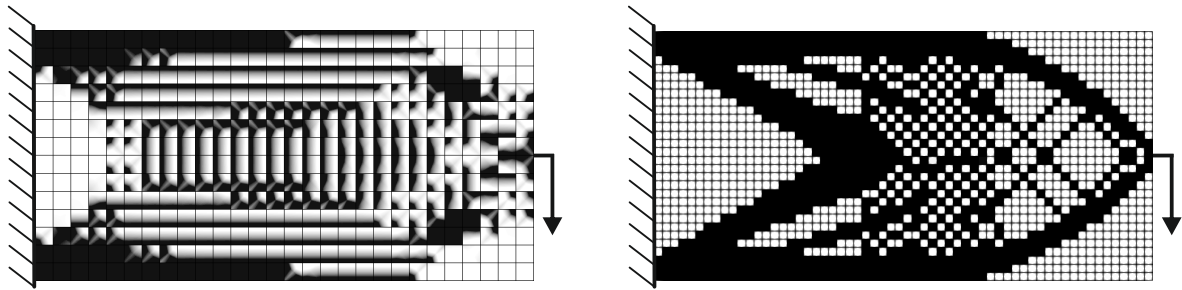


Abbildung 2.6.2.: Checkerboarding bei unterschiedlicher Art der Diskretisierung der DichtevARIABLE: In der linken Abbildung ist die DichtevARIABLE innerhalb der finiten Elemente in den Integrationspunkten definiert. In der rechten Abbildung ist die DichtevARIABLE elementweise definiert.

- ▶ Basierend auf dem räumlichen Gradienten der DichtevARIABLE: Die räumliche Oszillation des Designs wird reduziert bzw. ist nicht zulässig.
 - ▷ *Gradientenbestrafung*:
Hohe Gradienten werden innerhalb der Zielfunktion (energetisch bestraft). Geringer Rechenaufwand, jedoch ist Einstellung des Mindeststrukturabmaß nicht trivial.
→ Anwendungsbeispiele: Standardverfahren in der Phasenfeldmethode [Wang u. Zhou (2004)] und Methoden basierend auf Materialmodellierung [Junker u. Hackl (2015a, 2016b); Jantos u. a. (2019a)]; Level-Set [Yamada u. a. (2010)]
 - ▷ *lokale Gradientenbeschränkung*:
Maximaler Betrag des Gradienten wird über Nebenbedingung beschränkt. Gute Kontrolle über das Mindeststrukturabmaß, jedoch unpraktikabel hoher Rechenaufwand durch die große Anzahl an zusätzlichen Nebenbedingungen.
→ Anwendungsbeispiele: SIMP mit SLP [Petersson u. Sigmund (1998)]
 - ▷ *Perimeterkontrolle* (globale Gradientenbeschränkung):
Geringer Rechenaufwand, jedoch ist Einstellung des Mindeststrukturabmaß a priori nicht möglich und benötigt üblicherweise problemabhängige Parameterstudien.
→ Anwendungsbeispiele: Optimierung der Leitfähigkeit von Verbundmaterialien [Ambrosio u. Buttazzo (1993)]; kontinuierliche Dichte mit expliziter Mischphasenbestrafung [Haber u. a. (1996); Fernandes u. a. (1999)]; diskrete Dichte (BESO) [Yang u. a. (2002)]; Level-Set [Allaire u. a. (2004)]
- ▶ Basierend auf Faltungsoperatoren (englisch *convolution operator*) bzw. Integralansätzen: Die DichtevARIABLE und/oder Sensitivitäten werden innerhalb vordefinierter Bereiche gemittelt bzw. homogenisiert
 - ▷ *Sensitivitätsfilter*:
Mathematisch nicht konsistent, da die Sensitivitäten des nicht-wohlgestellten Problems filtern und nicht als Teil des Optimierungsproblems definiert werden. Jedoch sehr einfache Implementierung, relativ geringer Rechenaufwand und gute Kontrolle des Mindeststrukturabmaßes.
→ Anwendungsbeispiele: SIMP [Sigmund (1997a, 2001a)]; Level-Set [Amstutz u. Andrá (2006)]; diskrete Dichte (BESO) [Huang u. Xie (2007)]
 - ▷ *Dichtefilter*:
Mathematisch konsistent, da die DichtevARIABLE durch eine physikalische DichtevARIABLE, auf welche der Faltungsoperator angewandt wird, ersetzt wird. Aus der

daraus resultierenden Kettenregel ergeben sich gefilterte Sensitivitäten. Vergleichbar mit dem Sensitivitätsfilter jedoch erhöhter Rechenaufwand aufgrund der Filterung der DichtevARIABLE und der Sensitivitäten sowie breitere Übergangszonen mit Mischphasen.

→ Anwendungsbeispiele: SIMP [Bruns u. Tortorelli (2001); Bourdin (2001); Andreassen u. a. (2011); Lazarov u. Sigmund (2011)]; Level-Set [Luo u. a. (2008); Van Dijk u. a. (2012)]

► Heuristische Filter basierend *Morphologie* und *Projektionen*:

Techniken aus Bildverarbeitung. Praktikable Kontrolle über die Strukturkomplexität. Beispielsweise können durch Nachahmung von Fertigungsprozessen spezielle Fertigungsrandbedingungen eingebunden werden. Aufgrund der Heuristik kann es jedoch zu Konvergenzproblemen kommen.

→ Anwendungsbeispiele: SIMP mit Vorgabe von Mindeststrukturabmaß und Mindestlochgröße [Sigmund (2007)]; SIMP mit Projektionsmethoden für die DichtevARIABLE [Guest u. a. (2004)]; Basierend auf Bildverarbeitungsmethoden mit SIMP [Wang u. Wang (2005a)] und Level-Set [Luo u. a. (2008)]

Die Techniken basierend auf der Gradientenbestrafung und Gradientenbeschränkung sowie die mathematisch konsistente Integralansätze (Dichtefilter) werden auch für andere mechanischen Probleme angewandt und werden in allgemeinerer Form in Abschnitt 3.5 genauer diskutiert.

2.7. Erweiterungen und Anwendungen

In den letzten Jahren wurden weitreichende Erweiterungen der Topologieoptimierungsansätze entwickelt, welche beispielsweise zusätzliche Designvariablen oder spezielle Nebenbedingungen und Zielfunktionen einführen, sowie Anwendung für nicht-lineare mechanische und gekoppelte Probleme (englisch *multiphysics*) oder Kombinationen aus den genannten Möglichkeiten.

Eine beliebte Erweiterung ist die Betrachtung von Mehrlastfällen [Diaz u. Bendsoe (1992); Xie u. Steven (1993); Bendsoe u. Sigmund (2003)]: Die Strukturoptimierung wird für mehrere, nicht gleichzeitig eintretende Randwertprobleme bei gleichem Designraum optimiert. Dementsprechend ist das Ergebnis ein Kompromiss, sodass die Struktur für alle separaten Lastfälle gleichermaßen optimiert ist. Die dabei resultierenden Topologien können sich erheblich von der Optimierung mit kombinierten Randwertproblemen unterscheiden. Ein typisches Problem für Mehrlastfälle ist in Abb. 2.7.1 gegeben. Bei der Topologieoptimierung von Mehrlastfällen wird für jeden Lastfall eine getrennte mechanische Analyse (i.d.R. mittels FEM) für das aktuelle Design durchgeführt und die jeweils daraus resultierenden Sensitivitäten werden gemittelt. Der Optimierung erfolgt mit den gemittelten Sensitivitäten, sodass der Optimierungsschritt nur einmalig für alle Lastfälle gemeinsam ausgeführt wird. Die Beträge der Lasten innerhalb der einzelnen Lastfälle gehen hierbei als Gewichtung in die Mittlung der Sensitivitäten ein.

An dieser Stelle wird noch einmal genauer auf die Optimierung der lokalen Materialorientierung (Faserorientierung) für anisotrope Materialien (Faserorientierung) eingegangen, zu denen die in Abschnitt 7 gezeigten Methoden gehören. Aus den Homogenisierungsmethoden (Siehe Abschnitt 2.3) geht hervor, dass anisotrope Mikrostrukturen für die Strukturoptimierung optimal sind. Für „scher-schwache“ Materialien, d.h. Materialien, deren Schubmodul im Vergleich zum Elastizitätsmodul gering ist, stimmt die optimale Ausrichtung der Mikrostruktur mit den Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtungen überein, sodass für Einzellast-

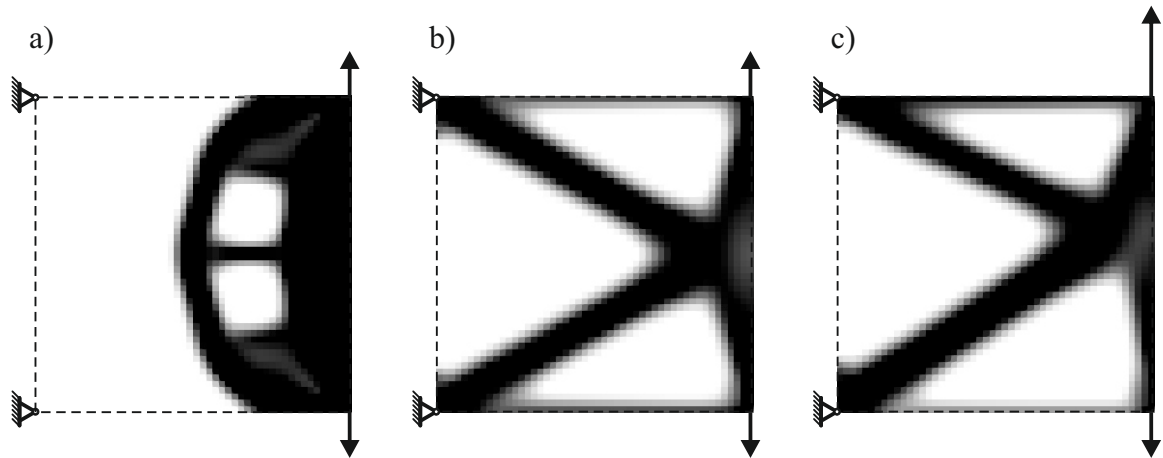


Abbildung 2.7.1.: Topologieoptimierung bei Mehrlastfällen:

- a) Beide Kräfte wirken simultan (Einzellastfall) und bilden ein Gleichgewicht, sodass keine Verbindung zum Lager auf der linken Seite nötig ist. Jedoch ist die Struktur nicht in der Lage, beide Lasten separat zu tragen.
- b) Die beiden Kräfte sind als getrennte Lastfälle definiert (Mehrlastfall), sodass die Optimierung auch sinnvolle Ergebnisse für den Fall liefert, dass nur eine der beiden Kräfte wirkt.
- c) Mehrlastfall mit unterschiedlicher Gewichtung der Lastfälle durch unterschiedliche Beträge der Kräfte.

fälle orthotrope Mikrostrukturen optimal sind [Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003); Gea u. Luo (2004)]. Aus fertigungstechnischer Sicht sind die optimalen Mikrostrukturen ungeeignet, sodass makroskopische Ansätze bevorzugt werden in denen die lokale Orientierung vorgegebener anisotroper Materialien als (zusätzliche) Designvariable optimiert wird. Für simple Modelle ohne Restriktionen bezüglich der Materialorientierung, und scher-schwache Materialien kann die optimale Materialorientierung mit der Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtung gleichgesetzt werden, sodass die (zusätzlichen) Designvariablen für die Materialorientierung direkt aus dem Spannungs- bzw. Dehnungszustand gewonnen werden können [Bendsøe u. Sigmund (2003); Gea u. Luo (2004); Zhou u. Li (2006)]. Sofern Restriktionen bezüglich der Materialorientierung (beispielsweise bezüglich der Faserkrümmung) modelliert werden sollen, ist die Formulierung mittels Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtungen nicht mehr zweckmäßig [Nomura u. a. (2015); Jantos u. a. (2018)].

Falls nur eine bestimmte (diskrete) Menge an Materialorientierungen zulässig sein sollen, kann die *discrete material optimization* (DMO) angewandt werden. Die DMO basiert auf der Topologieoptimierung mit mehreren Materialien bzw. Materialphasen: Jede unterschiedliche Materialphase ist das selbe anisotrope Material, nur um einen vorgegebenen Winkel rotiert [Stegmann u. Lund (2005); Hvejsel u. Lund (2011); Blasques u. Stolpe (2012); Niu u. a. (2010)]. Die Implementierung und numerische Handhabung ist vergleichsweise simpel, da die gängigsten Topologieoptimierungsansätze sich auf beliebig viele Materialphasen erweitern lassen [Bendsøe u. Sigmund (1999); Wang u. Wang (2004); Huang u. Xie (2009); Zuo u. Saitou (2017)]. Jedoch steigt mit jeder zusätzlichen Materialphase der Rechenaufwand, sodass speziell im dreidimensionalen Fall die Menge an zulässigen diskreten Materialorientierungen beschränkt ist.

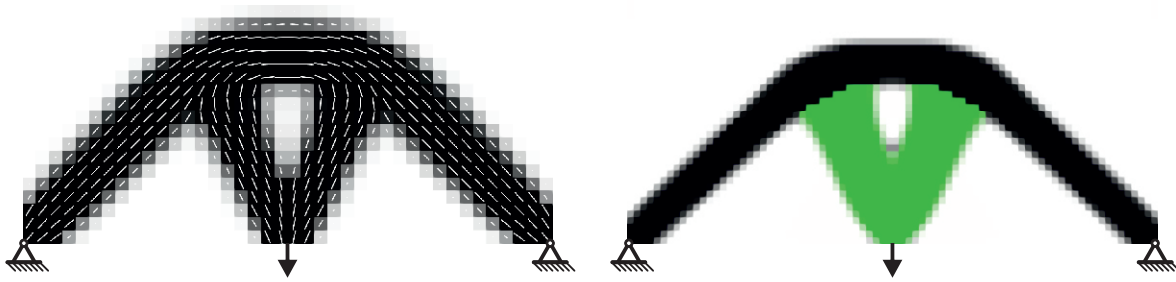


Abbildung 2.7.2.: Links: Optimierung der Topologie und Materialorientierung bzw. Faserausrichtung eines anisotropen Materials mit kontinuierlicher Orientierung (CFAO). Rechts: Topologieoptimierung mit zwei unterschiedlichen Phasen in grün und schwarz. Die Phasen können beispielsweise unterschiedliche isotrope Materialien sein oder das selbe anisotrope Material mit unterschiedlicher, vorgegebener Orientierung (DMO).

Im Gegensatz zu DMO werden innerhalb der *continuous fiber angle optimization* (CFAO) kontinuierliche Rotationsparameter als (zusätzliche) Designvariablen in das Optimierungsproblem eingeführt, welche die kontinuierliche Rotation des vorgegebenen anisotropen Materials beschreiben. Für den Zweidimensionalen Fall ist nur eine kontinuierliche Designvariable nötig – üblicherweise ein Winkel –, um die Materialorientierung zu definieren [Setoodeh u. a. (2006); Ranaivomiarana u. a. (2017); Brampton u. a. (2015)]. Im dreidimensionalen Fall können drei (zum Beispiel Euler-Winkel), vier (Quaternion, Rodrigues-Parameter) oder bis zu sechs unabhängige Designvariablen definiert werden [Stuelpnagel (1964)]. Dementsprechend ist das dreidimensionale Problem weitaus komplexer als der zweidimensionale Fall, sodass viele Arbeiten sich auf den zweidimensionalen Fall oder zweidimensionale Strukturen wie Platten und Scheiben beschränken. Die CFAO ist gegenüber der Annahme, die optimale Materialorientierung stimme mit den Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungsrichtung überein, vorzuziehen, falls Restriktionen bzw. Filtermethoden für die Materialorientierung angewandt werden. Jedoch sind die in Abschnitt 2.6 diskutierten Filter- und Regularisierungstechniken nicht ohne weiteres auf gängige Parametrisierungen der Materialorientierung (wie beispielsweise Winkel) aufgrund ihrer Periodizität und Ambivalenz bzw. nicht vorhandenen Bijektivität (d.h. verschiedene Werte können zum gleichen Ergebnis führen, sodass eine Umkehrung nicht eindeutig ist) anwendbar und spezielle Methoden und Parametrisierungen müssen entwickelt werden, um beispielsweise die Faserkrümmung mit Hilfe von Filtertechniken kontrollieren zu können [Nomura u. a. (2015); Jantos u. a. (2019b)].

Eine große Anzahl an weiteren Erweiterungen für Strukturoptimierungsprobleme lassen sich in der Literatur finden. Einige Beispiele werden im Folgenden aufgelistet:

► Zusätzliche Designvariablen

▷ Mehrphasensysteme:

- BESO [Huang u. Xie (2009)]
- SIMP [Bendsøe u. Sigmund (1999); Gao u. Zhang (2011); Zuo u. Saitou (2017)]
- Phasenfeldmethode [Zhou u. Wang (2007)]
- Level-Set [Wang u. Wang (2004)]

▷ Materialorientierung: (diskrete (DMO) und kontinuierliche (CFAO) Rotationen)

- DMO: [Stegmann u. Lund (2005); Hvejsel u. Lund (2011); Blasques u. Stolpe (2012); Niu u. a. (2010)]
- CFAO in 2D: [Setoodeh u. a. (2006); Ranaivomiarana u. a. (2017); Brampton u. a. (2015)]
- CFAO in 3D mit kontinuierlicher Dichte: [Nomura u. a. (2015); Jantos u. a. (2018, 2019b)]

► Zusätzliche Nebenbedingungen und Zielfunktionen

▷ Dynamische Probleme und Eigenfrequenzoptimierung:

- (B)ESO [Xie u. Steven (1996); Rong u. a. (2000); Huang u. Xie (2010a)]
- SIMP [Tcherniak (2002)]
- Level-Set [Shu u. a. (2011)]

▷ Spannungsrestriktion (Einhaltung einer Vergleichsspannung):

- (B)ESO [Liang u. a. (1999)]
- SIMP [Luo u. Kang (2012); Bruggi u. Duysinx (2012); Holmberg u. a. (2013); Collet u. a. (2017)]
- Phasenfeldmethode [Burger u. Stainko (2006)]

▷ Nachgiebigkeits-Mechanismen (Greifer):

- ESO [Ansola u. a. (2007)]
- Homogenisierung [Nishiwaki u. a. (1998)]
- SIMP [Sigmund (1997b); Luo u. a. (2005)]
- Level-Set [Luo u. a. (2007)]

► Optimierung unter Fertigungsbedingungen

▷ Gussteile:

- Allgemein [Harzheim u. Graf (2006)]
- Luftfahrt [Zhu u. a. (2016)]

▷ Additive Fertigung (3D-Druck):

- SIMP [Brckett u. a. (2011); Wu u. a. (2017); Garaigordobil u. a. (2018)]
- Level-Set [Liu u. To (2017)]
- Inverse Homogenisierung für die Optimierung von Metamaterialien [Schumacher u. a. (2015)]

- ▶ Gekoppelte Probleme (englisch *multiphysics*) bzw. nicht-lineare Materialeigenschaften
 - ▷ Thermomechanische Kopplung:
 - SIMP [Sigmund u. Torquato (1997); Sigmund (2001b); Li u. a. (2010)]
 - ▷ Piezo-elektrische Materialien:
 - SIMP [Kögl u. Silva (2005); Luo u. a. (2010)]
 - Level-Set [Luo u. a. (2009)]
 - ▷ Plastizität:
 - SIMP Wallin u. a. (2016); Zhang u. a. (2017)
 - ▷ Flussoptimierung von Fluiden:
 - Level-Set [Zhou u. Li (2008)]
 - SIMP [Dede (2009)]
- ▶ Geometrische Nichtlinearität
 - ▷ Finite Deformationen und Instabilität (Knicken und Beulen):
 - ESO [Manickarajah u. a. (1998)]
 - SIMP [Buhl u. a. (2000); Kemmler u. a. (2005)]
 - ▷ Kontaktprobleme:
 - SIMP [Strömberg u. Klarbring (2010)]
 - Level-Set [Myśliński (2008)]

3. Mathematische und physikalische Grundlagen

3.1. Grundlagen der Thermodynamik

3.1.1. Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik beschreibt den Energieerhalt innerhalb eines geschlossenen Systems: Die Rate der gesamten Energie des Systems, welche durch die kinetische Energie $\mathcal{K}$ und die innere Energie $\mathcal{U}$ gegeben ist, muss gleich der Leistung der mechanischen und thermischen Lasten $\dot{W}$ und $\dot{Q}$ sein. Der erste Hauptsatz lautet folglich [Clausius (1850); Gurtin u. a. (2010); Truesdell (2012)]

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{U}} = \dot{W} + \dot{Q}, \quad (3.1.1)$$

wobei die zeitliche Änderung der Arbeit als Leistung bezeichnet wird. Die kinetische Energie eines Körpers mit Dichte ρ und Volumen Ω ist gegeben durch

$$\mathcal{K} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\dot{\mathbf{u}}\|^2 dV \quad (3.1.2)$$

mit dem Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{u}}$. Die innere Energie ist gegeben als

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega} \Psi dV + \int_{\Omega} \rho \theta s dV, \quad (3.1.3)$$

welche sich zusammensetzt aus der (*freien*) *Helmholtz-Energie* Ψ und einem zusätzlichen thermischen Anteil mit der absoluten Temperatur θ und der spezifischen Entropie s . Die Arbeit der äußeren Kräfte ist gegeben als

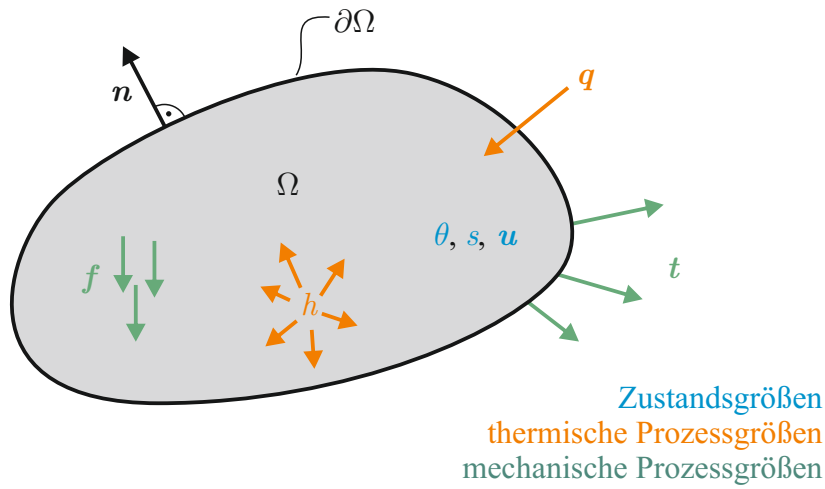
$$W = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dA \quad (3.1.4)$$

mit den Verschiebungen $\mathbf{u}$, den Volumenkräften $\mathbf{f}$, welche auf den Körper Ω wirken, und den Traktionskräften $\mathbf{t}$ welche am Rand des Körpers $\partial\Omega$ wirken. Die Leistung der äußeren Kräfte $\dot{W}$ ist gegeben als die zeitliche Ableitung der Arbeit W . Die Leistung der thermischen Lasten ist gegeben als

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} \rho h dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3.1.5)$$

wobei h Wärmequellen im Körper Ω bezeichnet und $\mathbf{q}$ den Wärmestrom über den Rand des Körpers $\partial\Omega$ mit dem Oberflächen-Normalenvektor $\mathbf{n}$.

Ausgehend von einer konstanten Dichte ρ können die Raten der Energien bestimmt werden

Abbildung 3.1.1.: Illustration eines Thermodynamischen Körpers Ω .

als

$$\dot{\mathcal{K}} = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad (3.1.6)$$

und

$$\dot{\mathcal{U}} = \int_{\Omega} \left[\dot{\Psi} + \rho (\dot{\theta} s + \theta \dot{s}) \right] dV . \quad (3.1.7)$$

Die Leistung der äußeren Kräfte $\dot{W}$ kann mit Hilfe der Cauchy-Hypothese $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, wobei $\boldsymbol{\sigma}$ den symmetrischen zweistufigen linearen Spannungstensor beschreibt, gemäß dem Gauß'schen Integralsatz umgeformt werden zu

$$\dot{W} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_{\partial\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (3.1.8)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dV \quad (3.1.9)$$

$$= \int_{\Omega} \left[\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] dV , \quad (3.1.10)$$

wobei hier die Kräfte $\mathbf{f}$ und $\mathbf{t}$ als zeitlich konstant angenommen werden. Hierbei bezeichnet ∇ den Nabla-Operator und entsprechend $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ die Divergenz des Spannungstensors. Der symmetrische Tensor der Rate der Dehnungen ist gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla) . \quad (3.1.11)$$

Mit Hilfe der Impulsbilanz

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.1.12)$$

kann der Ausdruck weiter vereinfacht werden zu

$$\dot{W} = \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \right] dV. \quad (3.1.13)$$

Unter Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes lässt sich der Wärmestrom schreiben als

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} \left[\rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} \right] dV. \quad (3.1.14)$$

Sämtliche Größen können somit auf das Volumenintegral über Ω bezogen werden. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik kann damit in seiner lokalen Form (auf Materialpunkzebene) geschrieben werden als

$$\dot{\Psi} + \rho (\dot{\theta} s + \theta \dot{s}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.1.15)$$

3.1.2. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Während der erste Hauptsatz der Thermodynamik die Energieerhaltung beschreibt, beschreibt der zweite Hauptsatz die Richtung irreversibler Prozesse. Hierbei spielt die Entropie S bzw. spezifische Entropie s eine zentrale Rolle, für welche sich in der Literatur verschiedene Interpretationen finden lassen [Gurtin u. a. (2010); Demtröder (2017); Altenbach (2018)]. Die Entropie wird häufig über den Zusammenhang zwischen zufälligen mikroskopischen und beobachtbaren makroskopischen Konfigurationen definiert: Die Entropie ist umso höher, je mehr mikroskopische Konfigurationen existieren, welche einen betrachteten makroskopischen Zustand beschreiben. Die Entropie kann innerhalb eines geschlossenen Systems nicht abnehmen ($\dot{S} \geq 0$) und erreicht im Gleichgewichtszustand ihr Maximum. Folglich nimmt ein (geschlossenes) System mit der Zeit einen Zustand mit hoher Wahrscheinlichkeit ein. Üblicherweise gelten „geordnete“ Zustände (beispielsweise heterogene Phasenverteilungen oder Kristallstrukturen) als unwahrscheinlich, sodass die Entropie häufig auch als „Maß für die Unordnung“ bezeichnet wird. Die Entropie und Temperatur stehen dabei immer im Zusammenhang, sodass beispielsweise „geordnete“ Zustände bei niedrigen Temperaturen stabil sein können (beispielsweise Kristallstrukturen in gefrorenen Wasser oder spinodale Entmischungen). Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ist gegeben durch

$$\dot{S} \geq \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \rho h dV - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.1.16)$$

mit der absoluten Temperatur $\theta > 0$. Mit der Definition für die spezifische Entropie

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \quad (3.1.17)$$

und dem Gauß'schen Integralsatz ergibt sich aus Gl. (3.1.16) die lokale Form des zweiten Hauptsatzes zu

$$\theta \rho \dot{s} \geq \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} \quad (3.1.18)$$

3.1.3. Interne Variablen

Gewisse physikalische Prozesse entziehen sich der direkten Beobachtung oder ihre direkte Beschreibung wäre zu komplex für Ingenieur Anwendungen wie beispielsweise mikrostrukturelle Prozesse zu denen plastische Deformationen und Mikrorisse bzw. Schädigung gehören. Um möglichst simple Materialmodelle entwickeln zu können, werden sogenannte interne Variablen $\mathbf{v}$ eingeführt, welche physikalisch abstrakte Größen beschreiben, um ein effektives Material ohne direkte Beschreibung der unterliegenden komplexen (mikrostrukturellen) Prozesse abbilden zu können [Horstemeyer u. Bammann (2010); Maugin (2015); Junker (2016)].

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik gemäß Gl. (3.1.15) folgt

$$\rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} = \dot{\Psi} + \rho(\dot{\theta}s + \theta\dot{s}) - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.1.19)$$

was in den zweiten Hauptsatz gemäß Gl. (3.1.18) eingesetzt die *Clausius-Duhem-Ungleichung*

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} - \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} - \rho \dot{\theta} s \geq 0 \quad (3.1.20)$$

ergibt [Truesdell (1952)]. Ein thermodynamisch konsistentes physikalisches Modell muss Gl. (3.1.20) erfüllen, da es ansonsten dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen würde.

Es sei ein physikalisches (bzw. mechanisches) Modell basierend auf internen Variablen mit $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \mathbf{v})$ gegeben. Für die Rate der Helmholtz-Energie gilt dann

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.1.21)$$

Eingesetzt in die Clausius-Duhem-Ungleichung (3.1.20) ergibt sich

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\rho s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \geq 0. \quad (3.1.22)$$

Da der Wärmefluss $\mathbf{q}$ per Definition entgegen dem Temperaturgradienten $\nabla \theta$ positiv definiert ist gilt $-\nabla \theta \cdot \mathbf{q} \geq 0$.

Das Entropieprinzip nach Coleman u. Noll (1963) sagt aus, dass durch die Vorgabe eines beliebigen Randwertproblems die Raten der Prozessgrößen $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\dot{\theta}$ unabhängig von einander von außen beliebig gesteuert werden können. Entsprechend muss Gl. (3.1.22) für alle beliebigen Werte von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\dot{\theta}$ erfüllt sein. Dies ist nur erfüllt, wenn die Faktoren vor $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\dot{\theta}$ sich unabhängig voneinander identisch zu null ergeben. Aus Gl. (3.1.22) ergeben sich dementsprechend folgende Beziehungen für die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und die spezifischen Entropie s sowie eine Beziehung zwischen der Rate der internen Variablen und der Helmholtz-Energie

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.1.23)$$

$$s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (3.1.24)$$

$$0 \leq -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.1.25)$$

Üblicherweise wird die thermodynamische Triebkraft

$$\boldsymbol{\tau} := -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.1.26)$$

eingeführt [Onsager (1931a,b)], sodass aus Gl. (3.1.25)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{v}} \geq 0 \quad (3.1.27)$$

folgt. Gemäß Gl. (3.1.27) dürfen für ein thermodynamisch konsistentes Modell die Vorzeichen der thermodynamischen Triebkräfte und der Rate der internen Variablen nicht unterschiedlich sein: Die Evolutionsrichtung der internen Variablen folgt den thermodynamischen Triebkräften. Somit können gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik irreversible (mikrostrukturelle) Prozesse mit Hilfe von internen Variablen beschrieben werden. Die Rate der internen Variablen beschreiben die Evolution der effektiven Einflüsse der Mikrostruktur innerhalb der Prozesszeit und sind entsprechend von Interesse um entsprechende Einflüsse vorhersagen zu können. Das *Hamilton-Prinzip*, welches im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, liefert mathematische geschlossene Gleichungssysteme, welche Differentialgleichungen beinhalten, um die zeitliche Entwicklung der internen Variablen bestimmen zu können.

3.2. Hamilton-Prinzip

Mit Hilfe des *Hamilton-Prinzips* können verschiedene Materialmodelle basierend auf mikrostrukturellen Prozessen repräsentiert durch interne Variablen entwickelt werden [Bedford (1985); Junker (2016)]. Das Prinzip nach Hamilton (1834, 1835) geht dabei von dem Prinzip der kleinsten Wirkung (englisch *principle of least action*) aus. Hierfür wird angenommen, dass für ein isothermes mechanisches Problem das Energie-Funktional¹

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{K} - \mathcal{G} + \mathcal{W}) \, dt \quad (3.2.1)$$

extremal wird. Das Funktional ist gegeben als Integral der der kinetische Energie $\mathcal{K}$, der Gibbs-Energie $\mathcal{G}$ und der Arbeit der nicht konservativen Kräfte $\mathcal{W}$ (nicht zu verwechseln mit W aus Gl. (3.1.4)) über die gesamte Prozesszeit $t \in [t_0, t_1]$. Als zu bestimmende Systemvariablen werden im Rahmen dieser Arbeit das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und sämtliche interne Variablen $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \, \forall \, \mathbf{x} \in \Omega$ angenommen. Um die Systemvariablen zu bestimmen, welche das Funktional extremal werden lassen, wird die Stationaritätsbedingung

$$\delta \mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathcal{K} - \delta \mathcal{G} + \delta \mathcal{W}) \, dt = 0 \quad \forall \, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} \quad (3.2.2)$$

ausgewertet. Das Präfix δ stellt die Gâteaux-Ableitung [Zorn (1945); Gelfand u. a. (2000)] nach den entsprechenden Systemvariablen dar. Für (quasi-)stationäre mechanische Prozesse kann die kinetische Energie $\mathcal{K}$ vernachlässigt werden und Gl. (3.2.2) vereinfacht sich zu

$$\delta \mathcal{G} - \delta \mathcal{W} = 0 \quad \forall \, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} \quad (3.2.3)$$

¹Für detaillierte Grundlagen bezüglich Variationsrechnung wird auf die Literatur Gelfand u. a. (2000); Dacorogna (2007); Elsgolc (2012) verwiesen.

Die Gibbs-Energie $\mathcal{G}$ für einen elastischen Körper Ω ist definiert als [Gurtin (1973)]

$$\mathcal{G} = \mathcal{U} - W = \int_{\Omega} \Psi \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA \quad (3.2.4)$$

mit dem mechanischen Anteil der inneren Energie $\mathcal{U}$ aus Gl. (3.1.3) und der Arbeit der äußeren Kräfte W aus Gl. (3.1.4). Die Arbeit der nicht-konservativen Kräfte $\mathcal{W}$ in Gl. (3.2.3) werden definiert als [Junker (2016)]

$$\mathcal{W} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^* \cdot \delta \mathbf{v} \, dV. \quad (3.2.5)$$

Diese Definition steht in Analogie zur klassischen Definition einer Arbeit: Die Kraft integriert entlang des Weges, auf dem sie wirkt. Die interne Variable repräsentiert in diesem Fall den Weg. Die Kraft der nicht-konservativen Kräfte $\boldsymbol{\tau}^*$ wird über die *Dissipationsfunktion* $\Phi \geq 0$ definiert als

$$\boldsymbol{\tau}^* = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}}. \quad (3.2.6)$$

Die Dissipationsfunktion Φ ist ein Maß dafür, wie viel Energie während der Evolution der Mikrostruktur, repräsentiert durch $\dot{\mathbf{v}}$, dissipiert wird [Onsager (1931a,b)]. Das Hamilton-Prinzip lässt sich somit in der Form

$$\delta \mathcal{H} = \delta \mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \cdot \delta \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} \quad (3.2.7)$$

angeben. Ausgewertet für die zu bestimmenden Systemvariablen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ergibt sich

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} + \delta_{\mathbf{v}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{G} + \delta_{\mathbf{v}} \mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \cdot \delta \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} \quad (3.2.8)$$

wobei $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \mathbf{v}$ unabhängig von einander sind, sodass sich Gl. (3.2.8) in Kombination mit Gl. (3.2.4) aufschreiben lässt als

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.2.9)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \cdot \delta \mathbf{v} \, dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}. \quad (3.2.10)$$

Gleichung 3.2.9 repräsentiert das bekannte *Prinzip der virtuellen Arbeit* bzw. die Impulsbilanz in der schwachen Form und damit das mechanische Gleichgewicht [Gurtin u. a. (2010)], wobei die internen Variablen $\mathbf{v}$ in die Helmholtz-Energie Ψ eingehen. Gemäß Gl. (3.1.23) kann die Ableitung der Helmholtz-Energie nach den Dehnungen durch die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ ersetzt werden. Für beliebige Variationen $\delta \mathbf{v}$ kann Gl. (3.2.10) der lokalen Form geschrieben werden als

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^*. \quad (3.2.11)$$

Gleichung (3.2.11) kann als Kräftegleichgewicht zwischen den thermodynamischen Triebkräften $\boldsymbol{\tau}$ und den nicht-konservativen Kräften bezogen auf die Evolution der Mikrostruktur $\boldsymbol{\tau}^*$ interpretiert werden. Das Prinzip nach Coleman (1964) gegeben in Gl. (3.1.27) wird hierbei erfüllt, sodass entsprechende Modelle im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermody-

namik stehen: Aus Gl. (3.2.11) folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{v}} \geq 0 \quad \forall \Phi \in \Phi_{\text{zul}}, \quad (3.2.12)$$

wobei Φ_{zul} den Funktionsraum der zulässigen Dissipationsfunktionen darstellt. Des Weiteren kann Gl. (3.2.11) in das *Prinzip des Minimums des Dissipationspotentials* überführt werden [Hackl u. Fischer (2008); Junker u. a. (2014)].

Für die Definition eines konkreten Materialmodells müssen nun die Helmholtz-Energie $\Psi = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und die Dissipationsfunktion $\Phi = \Phi(\dot{\mathbf{v}})$ gegeben sein. Die Helmholtz-Energie beschreibt dabei die innere Energie im Materialpunkt abhängig von dem Deformationszustand gegeben durch die Verschiebungen $\mathbf{u}$ und der Ausprägung der Mikrostruktur, repräsentiert durch $\mathbf{v}$. Die Dissipationsfunktion bestimmt maßgeblich die Form der Differentialgleichung, welche sich aus der Stationaritätsbedingung ergibt und die Evolution der internen Variablen und damit die Entwicklung der Mikrostruktur beschreibt. Übliche Ansätze für die Dissipationsfunktion basieren auf viskosem, plastischem oder visko-plastischem Verhalten mit der Eigenschaft (Siehe Abschnitt 3.7.3).

3.3. Extremal unter Nebenbedingungen

Im Zuge einer Materialmodellierung kann die Einarbeitung von Nebenbedingungen notwendig sein, wie zum Beispiel die Einhaltung von Definitionsbereichen der internen Variablen oder physikalische Effekte wie die Massenerhaltung. Speziell in der Optimierung müssen häufig Nebenbedingungen eingehalten werden, um die technische Realisierbarkeit einer Lösung zu garantieren, beispielsweise Definitions- bzw. Wertebereiche von Ein- und Ausgangsgrößen in der Prozessführung [Sethi u. Thompson (2000)] und Fertigungseinschränkungen sowie Festigkeitsanforderungen in der Strukturoptimierung [Cardoso u. Fonseca (2003); Sigmund (2007); Holmberg u. a. (2013)]. Grundsätzlich wird hierbei zwischen *Gleichheitsbedingung* und *Ungleichheitsbedingung* unterschieden [Christensen u. Klarbring (2008); Rao (2009); Zhu u. Martínez (2012)]. Beide können auf Materialpunktebene $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ oder in Integralform über Teilmengen $\Omega_k \in \Omega$ definiert werden.

Die Ungleichheitsbedingungen $i \in N_i$ und Gleichheitsbedingungen $j \in N_j$, welche in jedem Materialpunkt unabhängig voneinander erfüllt sein sollen, seien in der Form

$$m_i^* = m_i^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.3.1)$$

$$l_j^* = l_j^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.3.2)$$

gegeben. Beispiele für Nebenbedingungen auf Materialpunktebene sind Schranken für die internen Variablen, Einhaltung der lokalen Massenerhaltung bei Mehrphasen-Systemen oder maximal zulässige Spannungen im Bereich der Strukturoptimierung. Nebenbedingungen bezogen auf die jeweiligen Teilmengen $\Omega_p \in \Omega$ mit $p \in N_p$ bzw. $\Omega_q \in \Omega$ mit $q \in N_q$ seien in der Form

$$m_p = m_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_p} f_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, dV \leq 0 \quad (3.3.3)$$

$$l_q = l_q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_q} f_q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, dV = 0 \quad (3.3.4)$$

gegeben. Beispiele sind die Beschränkung des Gesamtvolumens oder Masse einer Phase im gesamten System Ω oder Teilbereiche davon sowie die Beschränkung der Gesamtkosten mit geeigneten Finanzmodellen. Falls eine Nebenbedingung für jede beliebig kleine (infinitesimale) Teilmenge Ω_k identisch definiert ist und außerdem gilt, dass die Vereinigung aller Teilmengen $\bigcup_{k \in N_k} \Omega_k = \Omega$ ist, ist dies gleichbedeutend mit einer Nebenbedingung auf Materialpunktebene.

Um die Nebenbedingungen in die Stationaritätsbedingung eines Variationsprinzips einzubinden, wird das zu Grunde liegende Funktional additiv um ein zusätzliches Funktional $\mathcal{C}$ erweitert, welches sämtliche Nebenbedingungen einschließt [Bedford (1985); Gelfand u. a. (2000); Christensen u. Klarbring (2008)]. Beispielsweise ergibt sich damit für das Hamilton-Prinzip in Gl. (3.2.8) die Form

$$\delta \mathcal{H} = \delta \mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \cdot \delta \mathbf{v} \right) dV + \delta \mathcal{C} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} . \quad (3.3.5)$$

Für jede Ungleichheitsbedingung werden die *Kuhn-Tucker-Parameter* $\mu_p \geq 0$ und $\mu_i^* = \mu_i^*(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ eingeführt. Für Gleichheitsbedingungen werden die *Lagrange-Multiplikatoren* λ_q und $\lambda_j^* = \lambda_j^*(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ eingeführt. Das Funktional $\mathcal{C}$ ist dann gegeben als²

$$\mathcal{C} = \sum_i^{N_i} \left(\int_{\Omega} \mu_i^* m_i^* dV \right) + \sum_j^{N_j} \left(\int_{\Omega} \lambda_j^* l_j^* dV \right) + \sum_p^{N_p} (\mu_p m_p) + \sum_q^{N_q} (\lambda_q l_q) . \quad (3.3.6)$$

Sämtliche Lagrange-Multiplikatoren und Kuhn-Tucker-Parameter sind zusätzliche Unbekannte innerhalb der Stationaritätsanalyse. Entsprechend muss die Stationaritätsbedingung zusätzlich in Abhängigkeit eines jeden dieser Parameter ausgewertet werden, wodurch sich entsprechend viele zusätzliche Gleichungen ergeben wie Nebenbedingungen. Bei Gleichheitsbedingungen stimmen die durch die Stationaritätsbedingung gegebenen zusätzlichen Gleichungen identisch mit der entsprechenden Gleichheitsbedingungen überein. Für Ungleichheitsbedingungen ergeben sich die (Karush-)Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\mu_i^* \geq 0 , \quad m_i^* \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i^* m_i^* = 0 \quad (3.3.7)$$

$$\mu_p \geq 0 , \quad m_p \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_p m_p = 0 . \quad (3.3.8)$$

Die Differentialgleichungen, welche sich aus der Stationaritätsbedingung in Abhängigkeit der zu bestimmenden Systemvariablen ergeben, den Gleichungen aufgrund der Gleichheitsbedingungen sowie aufgrund der (Karush-)Kuhn-Tucker-Bedingungen, bilden zusammen ein geschlossenes Gleichungssystem mit den zu bestimmenden Systemvariablen, Lagrange-Multiplikatoren und Kuhn-Tucker-Parametern als Unbekannte. Ob und wie solch ein Gleichungssystem analytisch, semi-analytisch oder numerisch gelöst werden kann, hängt vom konkreten Funktional und den Nebenbedingungen ab. Es existieren generalisierte numerische Lösungsverfahren für nicht-lineare Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen, wie MMA und SQP, welche in Kapitel 2 erwähnt wurden.

Im Besonderen wird hier nochmal auf eine Vereinfachung für den Sonderfall einer beidseitigen konstanten Intervallbegrenzung für eine (skalarwertige) interne Variable v eingegangen.

²Die Nebenbedingungen auf Materialpunktebene wird über den gesamten Körper Ω integriert um eine konsistente Formulierung des Funktionals zu gewährleisten. Bei der später gezeigten Herleitung der Evolutionsgleichung wird diese in der lokalen Form angegeben, sodass das Volumenintegral für die entsprechenden Nebenbedingungen verschwindet und diese auf Materialpunktebene definiert sind.

Diese ist gegeben durch

$$v = v(\mathbf{x}) \in [v_{\min}, v_{\max}] \Leftrightarrow v_{\min} - v \leq 0 \wedge v - v_{\max} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.3.9)$$

Somit ergibt sich das Funktional $\mathcal{C}$ und seine Variation nach der internen Variable $\delta_v \mathcal{C}$ zu

$$\mathcal{C} = \int_{\Omega} \mu_1 (v_{\min} - v) \, dV + \int_{\Omega} \mu_2 (v - v_{\max}) \, dV \quad (3.3.10)$$

$$\delta_v \mathcal{C} = \int_{\Omega} (\mu_2 - \mu_1) \delta v \, dV. \quad (3.3.11)$$

Da beide Nebenbedingungen nie gleichzeitig aktiv sein können

$$\left. \begin{array}{ll} \dot{v} < 0 \wedge v = v_{\min} & \Rightarrow \mu_1 > 0 \wedge \mu_2 = 0 \\ \dot{v} > 0 \wedge v = v_{\max} & \Rightarrow \mu_1 = 0 \wedge \mu_2 > 0 \\ \text{sonst} & \Rightarrow \mu_1 = 0 \wedge \mu_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_1 \mu_2 = 0, \quad (3.3.12)$$

kann ersatzweise der Kuhn-Tucker-Parameter

$$\gamma = \begin{cases} -\gamma^* := -\mu_1 & \text{falls } \dot{v} < 0 \wedge v = v_{\min} \\ \gamma^* := \mu_2 & \text{falls } \dot{v} > 0 \wedge v = v_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

mit $\gamma^* > 0$ definiert werden. Das Funktional für die Nebenbedingungen kann damit vereinfacht werden zu

$$\mathcal{C} = \int_{\Omega} \gamma v \, dV \quad (3.3.14)$$

$$\delta_v \mathcal{C} = \int_{\Omega} \gamma \delta v \, dV. \quad (3.3.15)$$

Der Kuhn-Tucker-Parameter γ^* ersetzt damit die ursprünglichen Parameter μ_1 und μ_2 .

3.4. Wohlgestelltheit

Gemäß den *Hadamard-Bedingungen* ist ein Extremwertproblem mathematisch wohl-gestellt falls folgende Punkte erfüllt sind [Hadamard (2014); Ball (1976, 1980); Bažant u. Lin (1988); Hansen (1994); Carstensen u. a. (2002)]:

1. Es existiert mindestens eine Lösung
2. Die Lösung ist eindeutig (Existenz ein globalen Minimums bzw. Maximums)
3. Die Lösung ist stabil: Die Lösung ändert sich kontinuierlich mit den Eingangsdaten (Anfangs- und Randbedingungen sowie numerische Parameter), d.h. kleine Änderungen in den Eingangsdaten verursachen kleine Änderungen in der Lösung (keine chaotische Beziehung)

Mathematisch wohl-gestellte Probleme sind in ihrer numerisch Lösung üblicherweise unproblematisch [Hansen (1994)]. Das Hamilton-Prinzip führt zu einem mathematisch nicht wohl-

gestelltem Problem, falls die Helmholtz-Energie oder eine der Nebenbedingungen nicht-konvex sind [Ball (1976, 1980); Chen (1991); Carstensen u. a. (2002); Bartel (2009)]: Dies führt zum Verlust der Elliptizität der Differentialgleichungen (Verletzung der *Legendre-Hadamard*-Bedingungen), sodass die Lösungen beliebig stark oszillieren. Aus physikalischer Sicht können jedoch nicht-konvexe Helmholtz-Energien sinnvoll sein oder sind unumgänglich [Ball (1976); Kohn u. Strang (1986a); Hansen (1994); Bartel (2009)]. Häufig ergeben sich nicht-konvexe Helmholtz-Energien bei makroskopischen Modellen, bei denen die zugrunde liegenden mikroskopischen Effekte nicht explizit betrachtet werden. Dies führt dazu, dass beliebig feine (heterogene) Mikrostrukturen die Stationaritätsbedingung erfüllen [Ball (1976, 1980); Prager u. Rozvany (1977); Kohn u. Strang (1986a,b); Sigmund u. Petersson (1998); De Borst u. a. (1993); Peerlings u. a. (2001); Borrvall (2001); Zhou u. a. (2001); Eschenauer u. Olhoff (2001); Carstensen u. a. (2002)]. Dementsprechend sind Methoden basierend auf Homogenisierungsmethoden und der Einbeziehung der zu Grunde liegenden optimalen Mikrostruktur wohl-gestellt (Siehe Abschnitt 2.3).

Üblicherweise werden numerische Lösungsverfahren angewandt. Aufgrund der finiten räumlichen Diskretisierung kann die beliebig feine mikroskopische Lösung nicht innerhalb des numerischen Modells erfasst werden, wodurch Punkt 1 und Punkt 2 der Hadamard-Bedingungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer (makroskopischen) Lösung nicht erfüllt sind. Es kommt zu Lokalisierungseffekten, welche i.d.R. stark abhängig von der Diskretisierung und numerischen Lösungsverfahren sind, wodurch es zusätzlich zur Verletzung von Punkt 3 kommen kann. Das Auftreten von Lokalisierungseffekten ist ein bekanntes Problem in der Topologieoptimierung in Zusammenhang mit Verfahren, die (makroskopisch) diskrete Materialverteilungen („Schwarz-Weiß“-Lösung) fordern, wie zum Beispiel in BESO- und SIMP-Ansätzen (Siehe Abschnitt 2.2 und 2.4): Aufgrund der diskreten Werte für die lokale Dichte (welche die interne Variable des Problems darstellt) bzw. aufgrund der nicht-linearen Interpolationsfunktion, welche genutzt wird, um graue Dichten zu bestrafen, ergibt sich die Minimierung eines nicht-konvexen Funktionals und ein mathematisch nicht-wohlgestelltes Problem. Die daraus folgenden Lokalisierungseffekte führen zu inakzeptablen numerischen Instabilitäten, wie Netzabhängigkeit, minimalistische Strukturen sowie Checkerboarding [Sigmund u. Petersson (1998); Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Insbesondere ist das Checkerboarding inakzeptabel, da dieses zu nicht realisierbaren bzw. produzierbaren Strukturen führt. Entsprechend müssen Vorkehrungen getroffen werden, um die genannten Lokalisierungseffekte zu unterbinden.

Neben den Lokalisierungseffekten ist ein weiteres Problem im Zusammenhang mit der Topologieoptimierung der mangelnde allgemeine Beweis für eine eindeutigen Lösung. Es existieren Beispiele für Randwertprobleme mit mehreren gleichwertige Lösungen, wie beispielsweise das Zugproblem in Abb. 3.4.1 [Michell (1904); Kohn u. Strang (1986a,b); Sigmund u. Petersson (1998); Rozvany (2001); Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Folglich ist im Allgemeinen die Topologieoptimierung a priori kein wohlgestelltes Problem, da nicht nachgewiesen werden kann, dass für jedes Randwertproblem eine eindeutige Lösung existiert (Verletzung der Hadamard-Bedingungen gemäß Punkt 2).

Aus technischer Sicht ist die Existenz mehrerer globaler Extrema für die Struktur- bzw. Topologieoptimierung weniger problematisch, solange eine sinnvolle (d.h. produzierbare) Lösung gefunden werden kann, die quantitativ möglichst nahe an einem globalem Extremum liegt. Um dies zu gewährleisten müssen in jedem Fall die Lokalisierungseffekte durch geeignete Regularisierungstechniken unterbunden werden. Die gängigsten Regularisierungstechniken werden im folgenden Abschnitt erläutert.

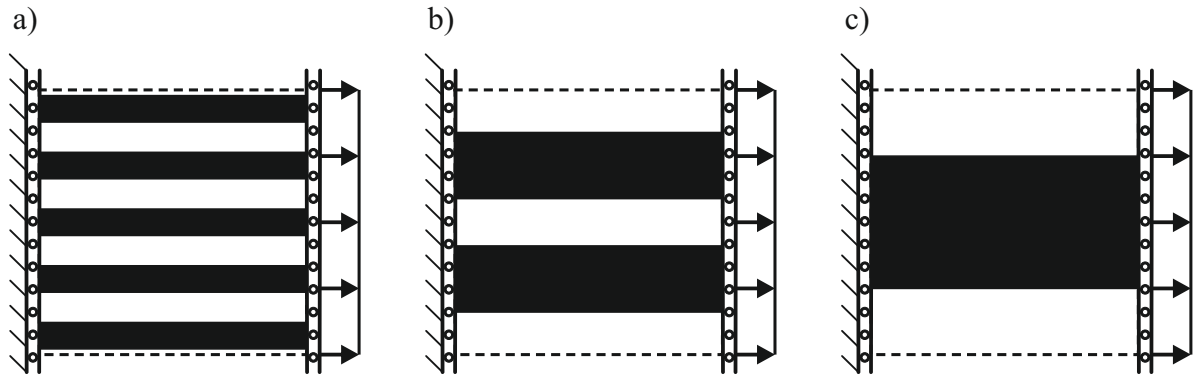


Abbildung 3.4.1.: Optimierung einer zweidimensionalen Struktur unter uniaxialem Zug und maximalem Strukturvolumen gleich dem halben Designraumvolumen. Alle Lösungen sind identisch „optimal“. Folglich gibt es keine eindeutige Lösung des Problems. Lösung c) wäre eine eindeutige Lösung, falls nur einfach-zusammenhängende Gebiete zulässig wären. Dies würde dann allerdings einer Formoptimierung und keiner Topologieoptimierung mehr entsprechen, da die Topologiekategorie vorgegeben wäre.

3.5. Regularisierungstechniken

Um die Lokalisierungseffekte zu eliminieren und netzunabhängige Ergebnisse zu erhalten sind entsprechende Relaxations- bzw. Regularisierungstechniken nötig: Die Menge an zulässigen Lösungen wird durch die Verhinderung der lokalen Oszillation der internen Variablen, in denen die Helmholtz-Energie nicht-konvex ist, beschränkt. Durch eine entsprechende Regularisierung kann folgendes gewährleistet werden [Ball (1976, 1980); Kohn u. Strang (1986a,b); Borrvall (2001); Carstensen u. a. (2002)]:

- ▶ Relaxierung durch (Quasi-)Konvexifizierung führt zur Elliptizität der Differentialgleichungen, wodurch die Existenz (mindestens) einer Lösung gewährleistet ist
- ▶ Die möglichen Lösungen werden auf eine kompakte Menge reduziert und das zu untersuchende Funktional wird Lipschitz stetig, sodass gradientenbasierte Algorithmen für Extremwertprobleme zu einer Lösung konvergieren können
- ▶ Lokalisierungseffekte und Netzunabhängigkeit werden unterbunden und im besten Fall kann das Ausmaß (charakteristische Länge) von Mikrostrukturen gezielt kontrolliert werden.

Die zwei gängigsten Ansätze zur Relaxierung von Lokalisierungseffekten sind *Integralmethoden* und *Gradientenmethoden*. Bei den Integralmethoden (auch nicht-lokale Methoden genannt) [Bažant u. Lin (1988); Bourdin (2001); Bruns u. Tortorelli (2003); Wang u. Wang (2005b)] wird im kontinuumsmechanischen Problem in jedem Materialpunkt die internen Variablen über benachbarte Materialpunkte innerhalb eines definierten Bereichs Ω_r mit einer Abstandsgewichtung gemittelt. Hierfür wird der *Faltungoperator* (englisch *convolution operator*) [Bourdin (2001)]

$$[w * v_i] = [w * v_i](\mathbf{x}) = \int_{\Omega_r} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r) v_i(\mathbf{x}_r) dV \quad \forall \mathbf{x}_r \in \Omega_r, \quad (3.5.1)$$

für die zu regularisierende interne Variable v_i mit einer beliebig wählbaren räumliche Gewichtungsfunktion $w = w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r)$ eingeführt. Die Größe $[w * v_i]$ wird i.d.R. dann als physikalische Variable bezeichnet und ersetzt die eigentliche interne Variable v_i im Materialmodell. Dadurch verliert die interne Variable v_i ihre physikalische Bedeutung und verbleibt als mathematisches Konstrukt im Modell. Heterogene Lokalisierungseffekte in v_i , deren Ausmaße kleiner als Ω_r , werden dementsprechend homogenisiert, sodass das Volumen (oder Flächeninhalt) eines zusammenhängenden Gebietes mit homogenem v_i immer mindestens so groß wie Ω_r ist. Dabei kann die Ausprägung von Ω_r unabhängig von der Diskretisierung gewählt werden, wodurch sich netzunabhängige Ergebnisse ergeben, sofern das Gebiet Ω_r größer als die Netzweite ist. Üblicherweise wird die Form $w = w(r, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|)$ angewandt, sodass der Faltungsoperator eine abstandsgewichtete räumliche Mittlung innerhalb einer Kugel Ω_r mit Radius r im dreidimensionalen Fall (bzw. innerhalb eines Kreises Ω_r mit Radius r im zweidimensionalen Fall) um den jeweiligen materiellen Punkt $\mathbf{x}$ beschreibt. Häufig wird eine lineare Abstandsgewichtung in der Form

$$w = \begin{cases} 1 - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|}{r} & \text{falls } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\| \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.5.2)$$

oder einen Exponentialansatz basierend auf der Gaußschen-Normalverteilung

$$w = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|^2}{\sigma^2 r^2}\right) \quad (3.5.3)$$

angewandt, wobei der Faktor σ je nach Anwendungsfall und räumliche Dimension des Problems unterschiedlich gewählt wird [Bažant u. Lin (1988); Bruns u. Tortorelli (2003); Wang u. Wang (2005b)]. Über die Ausprägung von Ω_r bzw. über den Wert von r können beispielsweise die minimale Rissbreite in Schädigungsmodellen oder das Mindeststrukturabmaß in der Strukturoptimierung kontrolliert werden. Zwei der bekanntesten Filtertechniken, welche im Rahmen der Topologieoptimierung eingeführt wurden (siehe Abschnitt 2.6) entsprechen den Integralmethoden oder basieren auf diesen: Der Sensitivitätsfilter nach Sigmund (1997b) basiert zwar auf einem Faltungsoperator, ist aber aus kontinuumsmechanischer Sicht nicht konsistent: Der Faltungsoperator wird zur Modifikation der Sensitivitäten des nicht-wohlgestellten Modells genutzt und ist kein Teil des eigentlichen Minimierungsproblem. Der von Bourdin (2001) eingeführte Dichtefilter entspricht im klassischen Sinne der Integralmethode in Gl. (3.5.1) und wird als Teil des Materialmodells definiert. Für ein konsistentes Modell muss die Kettenregel bei der Bestimmung der Sensitivitäten angewandt werden, wodurch auch für die Sensitivitäten ein Faltungsoperator angewandt werden muss, was in einem erhöhten Rechenaufwand im Vergleich zum Sensitivitätsfilter resultiert. Die Umsetzung von Randbedingungen bezüglich der internen Variablen im Zusammenhang mit den Integralmethoden ist nicht trivial, sodass in den meisten Fällen eine korrekte Einbindung der Randbedingungen vernachlässigt wird [De Borst u. a. (1993); Sigmund (2007)].

Eine weitere Gruppe von Regularisierungstechniken basiert auf der Beschränkung oder Bestrafung des Gradienten der internen Variable, wodurch die räumliche Oszillationen in der internen Variable und damit die Lokalisierungseffekte unterbunden werden [De Borst u. a. (1993); Dimitrijevic u. Hackl (2008); Ambrosio u. Buttazzo (1993); Petersson u. Sigmund (1998)]. Diese Gradientenmethoden sind mit den Integralmethoden mathematisch verwandt [Peerlings u. a. (2001)] und lassen sich für bestimmte Gewichtungsfunktionen w ineinander überführen [Lazarov u. Sigmund (2011)]. Entsprechend erfüllen die Gradientenmethoden die gleichen Bedin-

gungen für die Wohlgestelltheit des Problems und besitzen vergleichbare Eigenschaften bezüglich der numerischen Ergebnisse [Sigmund u. Petersson (1998); Sigmund (2007)]. Allerdings ist die mathematische Formulierung und besonders die numerische Umsetzung unterschiedlich.

Der Gradient der internen Variable kann über lokale oder globale Nebenbedingungen beschränkt werden. Bei der globalen Gradientenbeschränkung wird der sogenannte *Perimeter* einer internen Variablen v_i üblicherweise durch die Nebenbedingung

$$\int_{\Omega} \|\nabla v_i\| \, dV - \beta_P \leq 0 \quad (3.5.4)$$

auf den vorgegebenen Wert β_P beschränkt [Ambrosio u. Buttazzo (1993); Haber u. a. (1996)]. Der Perimeter beschreibt die maximal zulässige Gesamtozillationen der internen Variable v_i im des Körper Ω . Dies entspricht in Mehrphasensystem der Gesamtoberfläche der Phasengrenzen wie zum Beispiel der Gesamtrissoberfläche in Schädigungsmodellen und der Gesamtstrukturoberfläche in der Topologieoptimierung. Gleichung (3.5.4) kann mit den in Abschnitt 3.3 gezeigten Verfahren mit der Einführung eines diskreten Kuhn-Tucker-Parameter gemäß Gl. (3.3.3) für jede zu regularisierende interne Variable v_i in das gegebene Problem implementiert werden. Dadurch, dass nur eine zusätzliche Nebenbedingung pro zu regularisierende interne Variable hinzugefügt wird, ist der zusätzliche Rechenaufwand unkritisch und kann i.d.R. mit Hilfe von generalisierten Optimierungsalgorithmen unter Nebenbedingungen ohne größeren Aufwand umgesetzt werden. Problematisch ist jedoch, dass die Vorgabe des Wertes des Perimeters β_P nicht intuitiv ist, sodass i.d.R. Werte für β_P durch randwertproblemabhängige Parameterstudien bestimmt werden müssen.

Bei der lokalen Beschränkung des Gradienten, üblicherweise in der Form

$$\|\nabla v_i\| - \beta_c \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.5.5)$$

gegeben, steht die Schranke β_c im direkten Zusammenhang mit der charakteristischen Länge des Problems, d.h. der lokalen Rissbreite oder dem Mindeststrukturabmaß [Niordson (1983); Petersson u. Sigmund (1998)]. Im Gegensatz zur globalen Gradientenbeschränkung führt die Implementierung der lokalen Gradientenbeschränkung gemäß Gl. (3.5.5) zu Kuhn-Tucker-Parametern auf Materialpunktebene. Entsprechend ergibt sich für die numerische Lösung des Minimierungsproblem eine zusätzliche Nebenbedingungen pro diskretisiertem Materialpunkt inklusive Kuhn-Tucker-Parameter als unbekannte Variable. Bei den entsprechend feinen Diskretisierungen, welche bei praktischen Anwendungen Verwendung finden, führt dies zu einer enormen Erhöhung des Rechenaufwandes, sodass lokale Gradientenbeschränkungen für praktische Anwendungen als zu ineffizient angesehen werden.

Anstatt den Gradienten direkt durch eine Nebenbedingung zu beschränken, kann eine (energetische) Bestrafung eingeführt werden. Hierfür wird üblicherweise das zu regularisierende Funktional um das Funktional

$$\mathcal{R} := \int_{\Omega} f_R(\nabla v_i) \, dV \quad (3.5.6)$$

erweitert [De Borst u. Mühlhaus (1992); Dimitrijevic u. Hackl (2008)]. Der gängigste (und simpelste) Ansatz für die Gradientenfunktion f_R ist

$$f_R(\nabla v_i) = \frac{1}{2} \beta \|\nabla v_i\|^2, \quad (3.5.7)$$

wobei β ein (numerischer) Steuerparameter ist. Das Hamilton-Prinzip in Gl. (3.3.5) ergibt sich damit zu

$$\delta\mathcal{H} = \delta\mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\mathbf{v}}} \cdot \delta\mathbf{v} \right) dV + \delta\mathcal{C} + \delta\mathcal{R} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}. \quad (3.5.8)$$

Dementsprechend führen hohe Werte für den Gradienten und damit räumliche Oszillationen in der internen Variablen v_i zu einer Erhöhung der Energie im System. Folglich werden Oszillationen der internen Variable im Rahmen der Energie-Minimierung reduziert. Im Gegensatz zur Gradientenbeschränkung werden keine zusätzlichen Nebenbedingungen in das Problem eingeführt. Allerdings muss der Regularisierungsparameter β sinnvoll gewählt werden. Ähnlich wie für die globale Gradientenbeschränkung kann dies durch problemabhängige Parameterstudien erfolgen. In Jantos u. a. (2019a) wurde jedoch eine Definition für β entwickelt, welche es ermöglicht, die charakteristische Länge des Problems (Mindeststrukturabmaß) ähnlich wie bei der lokaler Gradientenbestrafung oder bei den Integralmethoden einzustellen. Der Regularisierungsparameter β wird hierbei explizit berechnet und es ergeben sich keine zusätzlichen Gleichungssysteme oder unbekannte Systemvariablen. Auf das Verfahren nach Jantos u. a. (2019a) wird im Rahmen dieser Arbeit später noch im Detail eingegangen.

Generell sind alle in diesem Abschnitt gezeigten Regularisierungstechniken für die Topologieoptimierung mit Hilfe eines SIMP-Ansatzes geeignet. Am beliebtesten sind mit Abstand die Integralmethoden bzw. Filtermethoden, die auf diesen basieren, da diese einfach zu implementieren sind und sich die Parameter intuitiv einstellen lassen. Besonders die Möglichkeit, das Mindeststrukturabmaß direkt steuern zu können, ist ein großer Vorteil für industrielle Anwendung. Nachteil der Integralmethoden sind die genannten mathematischen bzw. physikalischen Inkonsistenzen: Die korrekte Einbindung von Randbedingungen wird i.d.R. vernachlässigt und die internen Variablen verlieren ihre physikalische Bedeutung. Gradientenmethoden sind demgegenüber mathematisch konsistent. Allerdings ist die globale Gradientenbeschränkung schwierig zu steuern und die lokale Gradientenbeschränkung führt zu einer enormen Erhöhung des Rechenaufwandes. Für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte thermodynamische Topologieoptimierung (TTO) basierend auf dem Hamilton-Prinzip mittels SIMP-Ansatz wird eine Regularisierung basierend auf der Gradientenbestrafung angewandt.

3.6. Thermodynamische Optimierung (TDO)

Einige der gängigsten Ansätze in der Strukturoptimierung ist die Nachgiebigkeitsminimierung bzw. Steifigkeitsmaximierung. Hierbei bezieht sich die *Strukturnachgiebigkeit* auf die elastische Verzerrungsenergie. Eine thermodynamische Optimierung (TDO) für die Nachgiebigkeitsminimierung mit einem linear-elastischen Material kann mit Hilfe des Hamilton-Prinzips durch die freie Helmholtz-Energie

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : [\mathbb{E}(\mathbf{v})]^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.6.1)$$

modelliert werden. Hierbei beschreibt $\mathbb{E}(\mathbf{v})$ den Steifigkeitstensor des Materials, welcher abhängig von den internen Variablen $\mathbf{v}$ ist, welche im Rahmen der Optimierung als Designvariable bezeichnet werden. Die Formulierung der Helmholtz-Energie in Abhängigkeit der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und der Materialnachgiebigkeit $[\mathbb{E}(\mathbf{v})]^{-1}$ führt zu der geforderten Nachgiebigkeitsminimierung. Der Grund hierfür ist, dass die Optimierung spannungsgesteuert ist, d.h. die Spannungen

σ bzw. Kräfte sind maßgeblich und hängen nicht von den Designvariablen v ab. Würde die Helmholtz-Energie in Abhängigkeit der Dehnungen ϵ und Materialsteifigkeit $\mathbb{E}$ definiert werden, müsste für die später benötigte Variation der Helmholtz-Energie die Ableitung der Dehnungen nach der Designvariable v aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit bestimmt werden³. Folglich wird für die Optimierung das Prinzip der virtuellen Arbeit mit der Helmholtz-Energie in den Spannungen definiert. Die Ansätze basierend auf Dehnungen und Spannungen führen zum gleichen Ergebnis für die Sensitivitäten bzw. Triebkräfte, welches in Anhang A.1 dargestellt wird.

Um das vollständige Modell für eine TDO gemäß dem Hamilton-Prinzip in Gl. (3.7.8) zu erhalten, müssen ein konkretes Materialverhalten in Form eines Ansatzes für die (freie) Helmholtz-Energie $\Psi(\sigma, \epsilon)$ in Abhängigkeit der Spannungen σ und der Designvariablen v und die Dissipationsfunktion $\Phi(\dot{v})$ definiert werden. Zusätzlich können Nebenbedingungen in $\mathcal{C}$, eine Regularisierungen in $\mathcal{R}$ und/oder zusätzliche additiv verknüpfte (energetische) Bestrafungsfunktionale dem Modell hinzugefügt werden. Die Auswertung der Stationaritätsbedingungen des Hamilton-Prinzips bezüglich der Designvariablen liefern Differentialgleichungen, deren numerische Lösung als Optimierungsalgorithmus dienen. Die Anwendung der TDO für eine thermodynamische Topologieoptimierung (TTO) wird im nun folgenden Abschnitt diskutiert.

3.7. Thermodynamische Topologieoptimierung (TTO)

3.7.1. Materialgesetz

Im folgenden wird eine thermodynamische Topologieoptimierung (TTO) basierend auf der TDO mit Hilfe eines Ansatzes mit kontinuierlicher Dichte vorgestellt. Folglich stellt

$$v := \chi = \chi(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (3.7.1)$$

die einzige interne Variable bzw. Designvariable des Problems dar. In Abschnitt 6 und den darauf folgenden Abschnitten werden Optimierungsansätze mit weiteren Designvariablen diskutiert. Die Nachgiebigkeitsminimierung mit weiteren Materialparametern als Designvariablen wird in Kapitel 6 erläutert. Für die Topologieoptimierung in Form einer Nachgiebigkeitsminimierung unter Strukturvolumenbeschränkung wird der SIMP-Ansatz gemäß Abschnitt 2.4 angewandt: Es wird eine kontinuierliche, monoton steigende Interpolationsfunktion $\rho(\chi) \in]0, 1]$ eingeführt, mit Hilfe derer die Materialsteifigkeit definiert wird als

$$\mathbb{E}(v) := \mathbb{E}(\chi) = \rho(\chi) \mathbb{E}_0. \quad (3.7.2)$$

Die Funktion $\rho(\chi)$ dient als Indikatorfunktion für die Topologie innerhalb des Design-Raumes Ω , auf welchen die mechanischen Randbedingungen aufgebracht sind: Gebiete mit $\rho = 1$ implizieren „Voll-Material“ mit Steifigkeit $\mathbb{E}_0$, während Gebiete, in denen die Werte für ρ klein sind, kein Material oder Material mit Dichte kleiner als $\mathbb{E}_0$ implizieren. Für sogenannte „Schwarz-Weiß-Lösungen“, d.h. ohne Mischphasen mit $\rho(x) \rightarrow \{0, 1\} \quad \forall x \in \Omega$, ergibt sich somit eine klare Topologie und Form der Struktur, da jedem Ort in Ω entweder kein Material ($\rho \rightarrow 0$) oder Voll-Material ($\rho = 1$) zu gewiesen wird. Hierfür wird die Interpolationsfunktion $\rho(\chi)$

³Bei der Modellierung von Schädigung und Plastizität wird die Helmholtz-Energie üblicherweise in den Dehnungen und Materialsteifigkeit definiert. Da diese Modelle dehnungsgesteuert sind, ist die Dehnung bzw. die Verschiebungen die maßgeblichen Größen und hängen nicht von den internen Variablen v ab

so gewählt, dass χ nicht-linear und monoton-steigend in ρ ist, wodurch Mischphasen („graue“ Dichte $\rho(\chi) \in]0, 1[$) mechanisch ineffizient sind und damit bestraft werden (siehe Abschnitt 2.4). Zwar stellt ρ die lokale Steifigkeit der Struktur dar, jedoch wird üblicherweise die Designvariable χ als DichtevARIABLE bezeichnet und auch zur Darstellung der Topologie bevorzugt [Bendsøe u. Sigmund (2003)].

Für die Materialinterpolation $\rho(\chi)$ existieren verschiedenste Ansätze, jedoch werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur zwei Ansätze in Betracht gezogen: Eine quadratische Mischung der Nachgiebigkeiten nach Junker u. Hackl (2015a) und das Potenzgesetz (englisch *power law*) nach Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003). Das Potenzgesetz nach Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003)

$$\rho(\chi) = \chi^p \quad \forall \chi \in]0, 1] \quad (3.7.3)$$

mit $p > 1$ und wird aufgrund der Einfachheit und der Beziehung zur Hashin-Shtrikman-Bedingungen häufig angewandt, wie bereits in Abschnitt 2.4 diskutiert. Die quadratische Mischung der Nachgiebigkeiten nach Junker u. Hackl (2015a) ist definiert als⁴

$$[\mathbb{E}(\chi)]^{-1} = (1 - \chi)^2 \mathbb{E}_{\text{Leer}}^{-1} + [1 - (1 - \chi)^2] \mathbb{E}_0^{-1} \quad \forall \chi \in [0, 1], \quad (3.7.4)$$

wobei die Steifigkeit von „abwesendem Material“ gegeben ist durch $\mathbb{E}_{\text{Leer}} = \kappa \mathbb{E}_0$ mit dem kleinen positiven Parameter $0 < \kappa \ll 1$. Damit ergibt sich die Interpolationsfunktion

$$\rho(\chi) = \left[1 + \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 - \chi)^2 \right]^{-1}, \quad (3.7.5)$$

welche einen ähnlichen Verlauf wie das Potenzgesetz besitzt (Siehe Abb. 3.7.1). Im Gegensatz zum Potenzgesetz sind die Ableitung und damit die Triebkräfte für Vollmaterial identisch null

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = 0. \quad (3.7.6)$$

Dadurch wird eine weitere Steifigkeitszunahme für Vollmaterial $\chi = 1$ unterbunden, sodass die Intervallbegrenzung $\rho \leq 1$ automatisch eingehalten wird. Dadurch können bei der numerischen Lösung von Wachstumsansätzen die Kuhn-Tucker-Parameter für die Intervallbegrenzung der DichtevARIABLE χ vernachlässigt werden und es kann eine analytische Lösung für den Lagrange-Multiplikator gefunden werden (siehe Abschnitt 4.4.2).

Damit ergibt sich das Hamilton-Prinzip für die TTO gemäß Gl. (3.5.8) zu

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{G}(\mathbf{u}, \chi) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.7.7)$$

$$\delta_{\chi} \mathcal{H} = \delta_{\chi} \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \delta \chi \right) dV + \delta_{\chi} \mathcal{C} + \delta_{\chi} \mathcal{R} = 0 \quad \forall \delta \chi, \quad (3.7.8)$$

wobei Gl. (3.7.7) dem gängigen Prinzip der virtuellen Arbeit für ein linear-elastisches Material gemäß Gl. (2.4.2) entspricht. Die Gibbs-Energie $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$ als Zielfunktion der Optimierung in

⁴In Junker u. Hackl (2015b, 2016b); Jantos u. a. (2016, 2018) wurde $\mathbb{E}(\chi)^{-1}$ so definiert, dass $\chi = 0$ Voll-Material und $\chi = 1$ die Abwesenheit von Material indiziert. Für die vorliegenden Arbeit wurde diese Beziehung zwecks Einheitlichkeit umgekehrt.

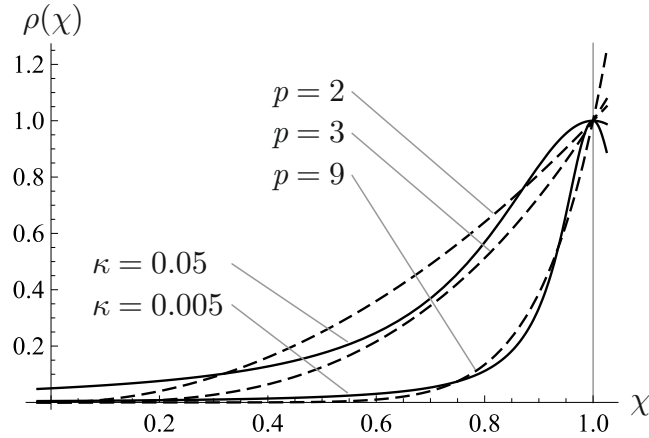


Abbildung 3.7.1.: Quadratische Mischung der Nachgiebigkeiten (3.7.5) und das Potenzgesetz (3.7.3) (strichlierte Linien) für verschiedene Parameter κ bzw. p .

Gl. (3.7.8) ist gegeben durch

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : [\mathbb{E}(\chi)]^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA, \quad (3.7.9)$$

wobei das Funktional für die Nebenbedingungen $\mathcal{C}$, die Dissipationsfunktion Φ sowie eine geeignete Regularisierung $\mathcal{R}$ definiert werden müssen, welche in den folgenden Abschnitten diskutiert werden.

3.7.2. Nebenbedingungen

Zwei grundsätzliche Nebenbedingungen müssen für die Topologieoptimierung eingehalten werden: Eine lokale Intervallbegrenzung für die Materialsteifigkeit, um eine nicht-produzierbar hohe und negative Steifigkeit zu unterbinden, und eine globale Beschränkung um die triviale Lösung eines vollständig mit Material gefüllten Designraumes zu verhindern. Aus Gl. (3.7.2) ergibt sich der Definitionsbereich bzw. die Intervallbegrenzung $\rho(\chi) \in [\kappa, 1]$, wobei κ ein kleiner, positiver numerischer Faktor ist, da $\rho = 0$ zu singulären Steifigkeitsmatrizen innerhalb der FE-Analyse führen würde. Im Rahmen dieser Arbeit werden im relevanten Definitionsbereich bijektive Interpolationsfunktionen mit $\rho(\chi = 1) = 1$ und $\rho(\chi = \chi_{\min}) = \kappa$ angewandt. Dementsprechend kann anstatt der Interpolationsfunktion die DichtevARIABLE $\chi \in [\chi_{\min}, 1]$ selbst beschränkt werden. Hierfür wird gemäß Gl. (3.3.13) der Kuhn-Tucker-Parameter

$$\gamma = \begin{cases} -\gamma^* & \text{falls } \dot{\chi} < 0 \wedge \chi = \chi_{\min} \\ \gamma^* & \text{falls } \dot{\chi} > 0 \wedge \chi = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7.10)$$

eingeführt.

Um die triviale Lösung eines vollständig gefüllten Designraumes zu verhindern, wird das Strukturvolumen beschränkt bzw. vorgegeben. Für die Volumenvorgabe wird das relative Ziel-

volumen $\varrho \in]0, 1[$ zusammen mit der Nebenbedingung

$$l(\chi) = \int_{\Omega} f(\chi) \, dV - \varrho \, \Omega = 0 \quad (3.7.11)$$

gemäß Gl. (3.3.4) eingeführt. Bei SIMP-Ansätzen wird üblicherweise ein Potenzgesetz für $\rho(\chi)$ mit $f(\chi) = \chi$ angewandt, um Mischphasen möglichst effektiv zu unterdrücken [Bendsøe u. Sigmund (1999); Hvejsel u. Lund (2011)]. In Jantos u. a. (2016, 2018) wird jedoch der Ansatz $f(\chi) = \rho(\chi)$ mit der Interpolationsfunktion $\rho(\chi)$ basierend auf der quadratischen Mischung der Nachgiebigkeiten gemäß Gl. (3.7.5) zur Modellierung von Wachstumsprozessen verwendet. Das Zielvolumen ϱ kann als konstant gegeben sein oder als Funktion in der Zeit definiert werden. Das Funktional für die Nebenbedingungen ergibt sich damit zu

$$\mathcal{C} = \int_{\Omega} \gamma \chi \, dV + \lambda l(\chi) = \int_{\Omega} \gamma \chi \, dV + \lambda \left(\int_{\Omega} f(\chi) \, dV - \varrho \, \Omega \right) \quad (3.7.12)$$

wobei der Lagrange-Multiplikator λ als zusätzliche Unbekannte neben dem kontinuierlichen Kuhn-Tucker-Parameter γ eingeführt wird.

3.7.3. Dissipationsfunktion

Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt werden üblicherweise plastische, visko-plastische oder viskose Ansätze für die Dissipationsfunktion Φ in der Form

$$\Phi = \begin{cases} \zeta |\dot{\chi}| & \text{plastisch} \\ \zeta |\dot{\chi}| + \frac{1}{2} \eta \dot{\chi}^2 & \text{visko-plastisch} \\ \frac{1}{2} \eta \dot{\chi}^2 & \text{viskos} \end{cases} \quad (3.7.13)$$

mit $\zeta > 0$ und $\eta > 0$ gewählt. Die Beziehung zwischen der Rate der internen Variable $\dot{\chi}$ und den thermodynamischen Triebkräften $\tau_{\chi} = -\partial\Psi/\partial\chi > 0$ sind in Abb. 3.7.2 illustriert. Mit dem

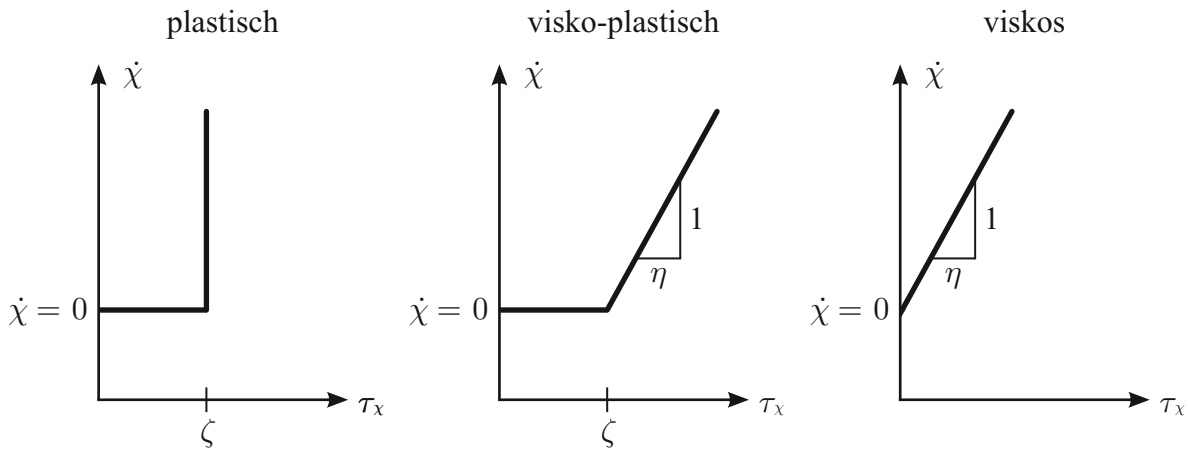


Abbildung 3.7.2.: Beziehung zwischen der Rate der internen Variable $\dot{\chi}$ und den thermodynamischen Triebkräften $\tau_{\chi} > 0$ für plastische, visko-plastische und viskose Ansätze.

ratenunabhängigen plastischen Ansatz wird eine Fließgrenze ζ eingeführt [Lorentz u. Benallal

(2005)]. Die Fließgrenze ζ stellt das Mindestmaß der thermodynamischen Triebkräfte $\tau_\chi > 0$ dar, die nötig sind um eine Evolution der internen Variablen einzuleiten

$$\dot{\chi} : \begin{cases} \dot{\chi} > 0 & \text{falls } \tau_\chi \geq \zeta \\ \dot{\chi} = 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.7.14)$$

Sind die Triebkräfte τ_χ größer als die Fließgrenze ζ , dann steigt der Wert der internen Variable sporadisch.

Bei ratenabhängigen, viskosen Ansätzen stellt die Viskosität die Evolutionsgeschwindigkeit der internen Variable ein [Klarbring u. Torstenfelt (2012b); Junker (2014a)]. Im hier gezeigten Fall ist die Rate der internen Variable proportional zu den Triebkräften: $\dot{\chi} \propto \tau_\chi$. Bei einem visko-plastischen Ansatz kommen beide Effekte zusammen: Für $\tau_\chi < \zeta$ kommt es zu keiner Evolution der internen Variable und für $\tau_\chi \geq \zeta$ ergibt sich $\dot{\chi} \propto \tau_\chi$.

In Junker u. Hackl (2015b, 2016b) wurde ein visko-plastischer Ansatz für eine Topologieoptimierung basierend auf Wachstum ohne direkte Kontrolle des Strukturvolumens angewandt. Durch die Kontrolle des Strukturvolumens mit Hilfe der Randbedingung in Gl. (3.7.11) und dem dazugehörigen Lagrange-Multiplikator λ , ist die Anwendung einer Fließgrenze nicht mehr zwingend nötig: Durch die Nebenbedingung nimmt die DichtevARIABLE in Gebieten mit hoher Priorität, d.h. hohen Triebkräften, nur so weit zu, wie Strukturvolumen vorhanden, d.h. zulässig, ist. In Gebieten mit geringer Priorität, d.h. niedrigen Triebkräften, nimmt die DichtevARIABLE nicht zu und kann sogar abnehmen, sodass das zurückgewonnene Strukturvolumen in Gebieten mit höherer Priorität genutzt werden kann. Mathematisch betrachtet übernimmt dabei der Lagrange-Multiplikator die Funktion einer Schranke, ab wann die DichtevARIABLE lokal ab- oder zunimmt. Dabei wird die Geschwindigkeit der Ab- bzw. Zunahme, d.h. die Rate der DichtevARIABLE, über einen viskosen Ansatz mit der Viskosität η gesteuert. Im Zusammenhang mit der Topologieoptimierung hat die Viskosität η weniger physikalische Bewandnis, sondern nimmt die Funktion einer numerischen Dämpfung an: Eine entsprechend gewählte Viskosität relaxiert das Problem in der Zeit, indem zeitlich sporadische Änderung der DichtevARIABLE und damit Oszillationen der Lösung zwischen diskreten Iterationsschritten bei der numerischen Lösung gedämpft werden (Siehe auch Abschnitt 4.1.5). Ein rein plastischer Ansatz für die Topologie-Optimierung beinhaltet keine Relaxation in der Zeit und zusätzliche Maßnahmen wie zum Beispiel kontrolliertes Wachstum oder die Vorgabe einer maximalen Strukturänderung pro Zeitschritt sollten eingeführt werden. Beispielsweise werden in in (B)ESO-Ansätzen, bei welchen die Anwendung von diskreten DichtevARIABLEN $\chi \in \{0, 1\}$ zu sporadischen Änderung der Dichte ähnlich zu einem rein-plastischen Ansatz führen, sogenannte Evolutionsraten eingeführt [Xie u. Steven (1993); Bruns u. Tortorelli (2003); Huang u. Xie (2007)]. Folglich wird im Rahmen dieser Arbeit eine rein viskose Dissipation

$$\Phi = \frac{1}{2} \eta \dot{\chi}^2 \quad (3.7.15)$$

mit $\eta > 0$ angewandt.

3.7.4. Regularisierung der DichtevARIABLE

Prinzipiell lassen sich alle in Abschnitt 3.5 gezeigten Regularisierungstechniken für die TTO basierend auf dem Hamilton-Prinzip anwenden. Diese Arbeit beschränkt sich jedoch auf eine

Gradientenbestrafung für die DichtevARIABLE χ (Tikhonov-Regularisierung) gemäß Gl. (3.5.7) mit

$$\mathcal{R} := \int_{\Omega} \frac{1}{2} \beta \|\nabla \chi\|^2 dV, \quad (3.7.16)$$

wobei $\beta > 0$ ein numerischer Steuerparameter ist. Prinzipiell sind auch andere Funktionen in Abhängigkeit des Gradienten der DichtevARIABLE χ möglich [Wang u. Zhou (2004)]. Allerdings wurden im Rahmen dieser Arbeit keine weiteren Ansätze untersucht, da der Ansatz in Gl. (3.7.16) zwar simpel ist, aber zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

Die Gradientenbestrafung ist mathematisch konsistent und ermöglicht den Einsatz von numerisch effizienten Methoden aufgrund der lokalen Definition des Gradienten gegenüber der nicht-lokalen Definition von Integralmethoden. Ein – aus Anwendungssicht – großer Vorteil der Integralmethoden gegenüber üblichen Ansätzen basierend auf Gradientenbestrafung ist die direkte Kontrolle des minimalen Strukturabmaßes der Topologie. Im späteren Verlauf der Arbeit wird der Ansatz basierend auf Gl. (3.7.16) nach Jantos u. a. (2019a) erläutert, mit dem sich das Mindeststrukturabmaß über den Parameter β a priori steuern lässt (Siehe Abschnitt 4.2.6 unter „Regularisierungsparameter für die Neighbored-Point-Method“ und 5.3.4).

3.7.5. Stationaritätsbedingungen

Mit Hilfe der Definitionen aller Funktionale aus Abschnitt 3.7.1 bis 3.7.4 kann nun die Stationaritätsbedingung für das Hamilton-Prinzip in Gl. (3.7.8) bestimmt werden. Die zu bestimmen Systemvariablen sind das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ und die DichtevARIABLE χ . Wie bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben, ergeben sich die Stationaritätsbedingungen aus der Variation nach den entsprechenden Systemvariablen, wobei diese getrennt voneinander ausgewertet werden können.

Zusätzliche Unbekannte des Problems sind der Lagrange-Multiplikator λ und der Kuhn-Tucker-Parameter γ . Streng genommen müsste auch die Variation in Abhängigkeit von λ und γ explizit untersucht werden, jedoch führt dies zu der bekannten Nebenbedingung für das Strukturvolumen in Gl. (3.7.11) sowie zu (Karush-)Kuhn-Tucker-Bedingungen für die Intervallbegrenzung gemäß Gl. (3.3.7). Die Parameter λ und γ werden jedoch je nach konkretem Ansatz für Gl. (3.7.11) (d.h. Wachstum oder konstantes Strukturvolumen) mit unterschiedlichen analytischen und numerischen Verfahren bestimmt, welche später in Abschnitt 4.4.2 und 4.4.3 erläutert werden. Dementsprechend wird im Folgenden nur die Variation in Abhängigkeit der Verschiebungen $\mathbf{u}$ und der DichtevARIABLE χ betrachtet.

Da die Funktionale $\mathcal{C}$ und $\mathcal{R}$ nicht von den Verschiebungen $\mathbf{u}$ abhängen, ergibt die Variation in Abhängigkeit von $\mathbf{u}$ das bekannte Prinzip der virtuellen Arbeit (mechanisches Gleichgewicht) gemäß Gl. (3.2.9), wobei hier die freie Helmholtz-Energie für ein linear elastisches Material gemäß Gl. (3.6.1) angewandt wurde. Mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes $\boldsymbol{\sigma} = \rho(\chi) \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$ ergibt sich die Stationaritätsbedingung

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{G} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \rho(\chi) \mathbb{E}_0 : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}. \quad (3.7.17)$$

In der Regel wird die *Finite-Elemente-Methode* (FEM) zur numerischen Bestimmung der Verschiebungen $\mathbf{u}$ basierend auf Gl. (3.7.17) genutzt. Weitere Details hierzu finden sich in Ab-

schnitt 4.1.

Für die Variation in Abhängigkeit von der DichtevARIABLE χ ergibt sich

$$\delta_\chi \mathcal{H} = \delta_\chi \mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\chi}} \delta \dot{\chi} \right) dV + \delta_\chi \mathcal{C} + \delta_\chi \mathcal{R} = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (3.7.18)$$

mit den Variationen der einzelnen Funktionale

$$\delta_\chi \mathcal{G} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \delta \chi dV = - \int_{\Omega} \tau_\chi \delta \chi dV \quad (3.7.19)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\chi}} \delta \dot{\chi} dV = \int_{\Omega} \eta \dot{\chi} \delta \chi dV \quad (3.7.20)$$

$$\delta_\chi \mathcal{C} = \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma \right) \delta \chi dV \quad (3.7.21)$$

$$\delta_\chi \mathcal{R} = \int_{\Omega} \beta \nabla \chi \cdot \nabla \delta \chi dV . \quad (3.7.22)$$

Die thermodynamischen Triebkräfte auf Materialpunktebene ergeben sich gemäß der Berechnungen in Anhang A.1 zu

$$\tau_\chi = - \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} = \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \Psi_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.7.23)$$

mit

$$\Psi_0 := \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (3.7.24)$$

Damit ergibt sich aus der Variation in Abhängigkeit der DichtevARIABLE die schwache Form

$$\int_{\Omega} \left(\left[-\tau_\chi + \eta \dot{\chi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma \right] \delta \chi + \beta \nabla \chi \cdot \nabla \delta \chi \right) dV = 0 \quad \forall \delta \chi . \quad (3.7.25)$$

Aufgrund der Variation des Gradienten der DichtevARIABLE $\nabla \delta \chi$ kann Gl. (3.7.25) nicht weiter vereinfacht werden. Die Lösung kann mit Hilfe eines Galerkin Ansatzes erfolgen, welcher später in Abschnitt 4.2.2 im Zusammenhang mit der FEM erklärt wird.

Alternativ kann aus Gl. (3.7.25) die starke Form bestimmt werden: Die partielle Integration von Gl. (3.7.22) ergibt

$$\delta_\chi \mathcal{R} = \int_{\partial \Omega} \beta \nabla \chi \cdot \mathbf{n} \delta \chi dA - \int_{\Omega} \beta \nabla^2 \chi \delta \chi dV , \quad (3.7.26)$$

wobei $\mathbf{n}$ den Normalenvektor auf dem Rand des Designraumes $\partial \Omega$ und $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ den Laplace-Operator darstellen. Das Volumen Ω eines beliebigen Körper und sein Rand $\partial \Omega$ sind unabhängig voneinander, sodass sich die entsprechenden Integrale über Ω und $\partial \Omega$ unabhängig voneinander zu null ergeben müssen. Folglich ergibt sich für die starke Form der Variation in

Abhängigkeit der DichtevARIABLE

$$\int_{\Omega} \left(-\tau_{\chi} + \eta \dot{\chi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma - \beta \nabla^2 \chi \right) \delta \chi \, dV = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (3.7.27)$$

$$\int_{\partial \Omega} \beta \nabla \chi \cdot \mathbf{n} \, \delta \chi \, dA = 0 \quad \forall \delta \chi. \quad (3.7.28)$$

Gleichung (3.7.27) muss nun für beliebige $\delta \chi$ erfüllt sein. Daher muss für beliebig kleine Teilintegrale $\Omega_e \in \Omega$ gelten

$$\int_{\Omega_e} \left(-\tau_{\chi} + \eta \dot{\chi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma - \beta \nabla^2 \chi \right) \delta \chi \, dV = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \subset \Omega, \quad \forall \delta \chi \quad (3.7.29)$$

wodurch sich die lokale Form auf Materialpunktebene zu

$$-\tau_{\chi} + \eta \dot{\chi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma - \beta \nabla^2 \chi = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.7.30)$$

ergibt, welche zur Evolutionsgleichung

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\eta} \left(\tau_{\chi} + \beta \nabla^2 \chi - \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} - \gamma \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.7.31)$$

umgestellt werden kann. Gleichung (3.7.28) führt für $\beta > 0$ in seiner lokalen Form zur Neumann-Randbedingung

$$\nabla \chi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega. \quad (3.7.32)$$

Die numerische Lösung der Stationaritätsbedingung gemäß Gl. (3.7.17) zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$ erfolgt i.d.R. mittels eines Galerkin Ansatzes und der Finite-Elemente-Methode (FEM), welche im folgenden Abschnitt näher erläutert wird. Zur Bestimmung der Evolutionsgleichung – und damit dem Optimierungsalgorithmus bzw. Update-Schema für die DichtevARIABLE – kann die partielle Differentialgleichung für Stationaritätsbedingung entweder in ihrer schwachen Form gemäß Gl. (3.7.25) oder in der starken Form gemäß Gl. (3.7.30) mit den Randbedingungen in Gl. (3.7.32) ausgewertet werden. Entsprechende numerische Lösungsverfahren werden im folgenden Kapitel nach einer kurzen Einführung in die FEM erläutert.

4. Numerische Lösungsverfahren

4.1. Finite-Elemente-Methode

4.1.1. Schwache Form der Impulsbilanz

Die *Finite-Elemente-Methode* (FEM) ist ein etabliertes numerisches Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen (PDG) [Zienkiewicz u. Taylor (2000); Huebner u. a. (2001); Bathé (2006)]¹. Zur Lösung einer PDG mit Hilfe der FEM wird diese zunächst in ihre schwache Form überführt. In der Kontinuumsmechanik ist die zentrale PDG die (lokale) Impulsbilanz, welche für den statischen Fall $\dot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ (siehe Gl. (3.1.12)) gegeben ist durch

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.1.1)$$

Zur Überführung in die schwache Form wird die Impulsbilanz mit der Testfunktion der gesuchten Variable (virtuelle Verschiebung) $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und über das betrachtete Kontinuum Ω integriert, sodass sich

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (4.1.2)$$

ergibt. Für kleine Deformationen lässt sich der symmetrische Dehnungstensor und dessen Variation über

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \quad (4.1.3)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \otimes \nabla) \quad (4.1.4)$$

definieren, sodass sich durch die partielle Integration mit

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.5)$$

für Gl. (4.1.2) die Beziehung

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \, dV + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (4.1.6)$$

ergibt. Mit dem Gauß'schen Integralsatz und der Cauchy-Hypothese $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$ ergibt sich

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\partial \Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \quad \forall \delta \mathbf{u} . \quad (4.1.7)$$

¹Die Implementierung der FEM (sowie des Optimierungsalgorithmus) erfolgte im Rahmen der vorliegenden Arbeit im Programm *FEAP 7.5* bzw. spätere Modelle in *FEAP 8.5* [Taylor (2017)].

Mit der Beziehung $\sigma = \partial\Psi/\partial\varepsilon$, welche aus dem Entropieprinzip nach Coleman u. Noll (1963) folgt (siehe Gl. (3.1.23)), ergibt sich Gl. (4.1.7) identisch zur Stationaritätsbedingung der Verschiebungen des Hamilton-Prinzips in Gl. (3.2.9) bzw. zum Prinzip der virtuellen Arbeit.

4.1.2. Diskretisierung

Für die numerische Lösung der schwachen Form einer PDG mittels der FEM wird das Kontinuum Ω in finite Volumina, die sogenannten finiten Elemente, unterteilt bzw. vernetzt. Die unbekannte bzw. gesuchte Feldvariable wird gemäß dem *Galerkin*-Ansatzes in den Knotenpunkten des Netzes diskretisiert. Die in den Knoten diskretisierten Werte der Variablen dienen als Stützpunkte für eine Interpolation, welche stückweise innerhalb der finiten Elemente über sogenannte *Ansatzfunktionen* S (auch *Formfunktion* genannt, engl. *shape functions*) definiert ist. Dabei können unterschiedliche Formen der Elemente und Ansatzfunktionen gewählt werden.

Zur Darstellung der numerischen Beziehungen und die darin gegebenen diskretisierten Größen werden im folgenden sämtliche Tensoren höherer Stufe in der *Voigt*-Notation [Voigt u. a. (1928)] mit σ , $\mathbb{E}$ und ε angegeben. Des weiteren wird folgende Nomenklatur verwendet:

- $\hat{\cdot} \Leftrightarrow$ In Knoten diskretisierte bzw. definierte Größe
- $\tilde{\cdot} \Leftrightarrow$ In Integrationspunkten diskretisierte bzw. definierte Größe
- $\bar{\cdot} \Leftrightarrow$ Elementweise diskretisierte bzw. definierte Größe

Zur numerischen Lösung des Prinzips der virtuellen Arbeit gemäß Gl. (4.1.7) bzw. Gl. (3.2.9) mit Hilfe der FEM wird gemäß dem Galerkin-Ansatz das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, welche die gesuchte Feldvariable darstellt, und die Variation des selbigen $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ mit Hilfe der Ansatzfunktionen $S(\mathbf{x})$ über die Verschiebungen in den Knoten $\hat{\mathbf{u}}$ bzw. $\delta\hat{\mathbf{u}}$ elementweise approximiert mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.1.8)$$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \delta\hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (4.1.9)$$

Eine mögliche Darstellung der die Ansatzfunktionen als Matrix $\mathbf{S}$ für ein finites Element mit N_k Knoten im zweidimensionalen Fall ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}(\mathbf{x})} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_1(\mathbf{x}) & 0 & S_2(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & S_{N_k}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & S_1(\mathbf{x}) & 0 & S_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & S_{N_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}(\mathbf{x})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_k} \\ \hat{v}_{N_k} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.1.10)$$

wobei $(\hat{u}_k \ \hat{v}_k)^T$ die diskretisierten Werte der Verschiebung im jeweiligen (ortsfesten) Knoten k des betrachteten finiten Elementes darstellen.

Die punktweise diskretisierten Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ ersetzen das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ als gesuchte unbekannte Größe des Problems bzw. das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ kann für jeden

beliebigen Ort $\mathbf{x}$ durch Interpolation mit Hilfe der Ansatzfunktionen $S(\mathbf{x})$ und den berechneten Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ bestimmt werden. Dabei sollten die interpolierten Verschiebungen in den Knoten exakt dem Knotenwert der Verschiebungen entsprechen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k) = \hat{\mathbf{u}}_k, \quad (4.1.11)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}_k$ die Koordinaten des Knotens k sind. Dies ist gegeben, falls die Ansatzfunktionen die Beziehung

$$S_i(\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k) = \delta_{ki} \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{e}_k \quad (4.1.13)$$

erfüllen, wobei δ_{ki} das Kronecker-Delta darstellt.

Zur Berechnung der Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und ihrer Variation $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ gemäß Gl. (4.1.3) und Gl. (4.1.4) in der Voigt-Notation wird die Operatormatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ elementweise definiert als

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.1.14)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \delta\hat{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (4.1.15)$$

welche sich aus den räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen S ergibt. Eine mögliche Darstellung der Operatormatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e$ für den zweidimensionalen Fall mit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_{22}(\mathbf{x}) \\ 2\varepsilon_{12}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} S_1(\mathbf{x}) & 0 & \frac{\partial}{\partial x} S_2(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x} S_{N_k}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} S_1(\mathbf{x}) & 0 & \frac{\partial}{\partial y} S_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \frac{\partial}{\partial y} S_{N_k}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial y} S_1(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial x} S_1(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial y} S_2(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial x} S_2(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} S_{N_k}(\mathbf{x}) & \frac{\partial}{\partial x} S_{N_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (4.1.16)$$

Für ein linear-elastisches Material mit $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ können die Approximationen gemäß Gl. (4.1.14) und Gl. (4.1.15) in das Prinzip der virtuellen Arbeit Gl. (4.1.7) bzw. Gl. (3.2.9) eingesetzt werden, sodass sich für jedes Teilvolumen bzw. finites Element mit $\mathbf{x} \in \Omega_e \subset \Omega$

$$\int_{\Omega_e} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbb{E} \cdot (\mathbf{B} \cdot \delta\hat{\mathbf{u}}) dV = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{S} \cdot \delta\hat{\mathbf{u}}) dA + \int_{\Omega_e} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{S} \cdot \delta\hat{\mathbf{u}}) dV \quad \forall \delta\hat{\mathbf{u}} \quad (4.1.17)$$

folgt. Da die Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ und $\delta\hat{\mathbf{u}}$ durch die Diskretisierung keine Funktion des Ortes sind (sondern nur die Operatormatrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{S}$), lässt sich Gl. (4.1.17) schreiben als

$$\left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbf{B} dV \right] \cdot \hat{\mathbf{u}} = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{t} dA + \int_{\Omega_e} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{f} dV \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e. \quad (4.1.18)$$

Die numerische Integration von Gl. (4.1.18) erfolgt üblicherweise mit Hilfe der *Gauß-Quadratur* (siehe Abschnitt 4.1.3). Hierbei werden die sogenannten *Elementsteifigkeitsmatrizen* eines jeden finiten Elementes e

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbf{B} dV \quad (4.1.19)$$

berechnet. Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\bar{\mathbf{K}}_e$ aller finiten Elemente, welche das Kontinuum Ω vernetzen, werden anschließend in die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.1.20)$$

mit den Knotenverschiebungen aller Elemente $\hat{\mathbf{u}}$ als Unbekannte zusammengefasst (*Assemblierung*), welches mit geeigneter numerischer Verfahren gelöst werden kann [Huebner u. a. (2001); Bathe (2006)].

4.1.3. Isoparametrische Elemente

Um die Implementierung der finiten Elemente zu generalisieren, werden für die Definition der Ansatzfunktionen S sowie für die numerische Integration sogenannte *isoparametrische* Elemente eingeführt, welche eine vorgegebene (i.d.R. simple) Geometrie aufweisen und in ihrem *natürlichen* Raum (gegeben durch die Koordinaten $\mathbf{r}$) definiert sind. Für die tatsächliche Vernetzung werden die Elemente in den physikalischen Raum (gegeben durch die Koordinaten $\mathbf{x}$) überführt, worin die Formen der Elemente bzw. die Knotenkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ individuell angepasst werden können, um die Geometrie des Kontinuums Ω genauer abzubilden.

Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit gezeigten Simulationen werden ausschließlich lineare Ansatzfunktionen S für isoparametrische Viereckelemente mit $N_k = 4$ Knoten im zweidimensionalen Fall ($d = 2$, siehe Abb. 4.1.1) und Hexaederelemente mit $N_k = 8$ Knoten im dreidimensionalen Fall ($d = 3$) verwendet, welche in ihren natürlichen Koordinaten $r_i \in [-1, 1]$ definiert sind. Für den zweidimensionalen Fall sind die Ansatzfunktionen des jeweiligen Knotens k gegeben durch

$$S_k(\mathbf{r}) \in \left\{ \frac{1}{4} (1 \pm r_1) (1 \pm r_2) \right\} \quad (4.1.21)$$

und für den dreidimensionalen Fall durch

$$S_k(\mathbf{r}) \in \left\{ \frac{1}{8} (1 \pm r_1) (1 \pm r_2) (1 \pm r_3) \right\}. \quad (4.1.22)$$

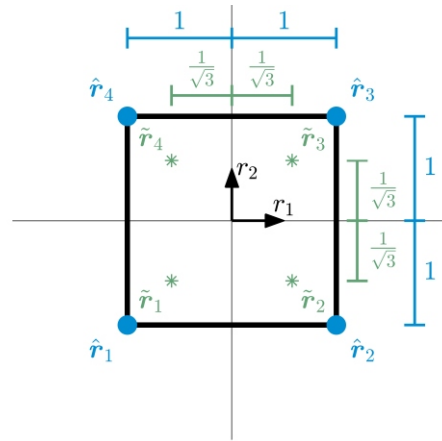


Abbildung 4.1.1.: Isoparametrisches Viereckelement mit $d = 2$ und $N_k = 4$.

Die Gauß-Quadratur zwecks numerischer Integration ist im natürlichen Raum gegeben durch

$$\sum_{i=1}^d \left(\int_{-1}^1 (\mathbf{B}(\mathbf{r}))^T \cdot \mathbb{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dr_i \right) = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{GP=1}^{N_{GP}} \tilde{w}_{GP} (\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}))^T \cdot \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}) \cdot \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}) \right), \quad (4.1.23)$$

wobei sämtliche Größen in den Integrationspunkten GP (auch *Gauß-Punkte* genannt) ausgewertet werden müssen, deren Koordinaten im natürlichen Raum durch $\tilde{\mathbf{r}}$ gegeben sind. Die

Integrationspunktkoordinaten $\tilde{\mathbf{r}}$ sowie die dazugehörigen Wichtungsfaktoren $\tilde{w}$ lassen sich für eine beliebige Anzahl an Integrationspunkten mit Hilfe von Legendre-Polynomen bestimmen. Damit die Integration numerisch exakt erfolgt und keine *Hourglassing*-Effekte auftreten [Sun (2006)], werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit $N_{GP} = 2$ Integrationspunkte pro Raumrichtung verwendet, d.h. für den zweidimensionalen Fall insgesamt vier und für den dreidimensionalen Fall insgesamt acht Integrationspunkte. Die Koordinaten der Integrationspunkte im natürlichen Raum sind im zweidimensionalen Fall

$$\tilde{\mathbf{r}} \in \left\{ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\} \quad (4.1.24)$$

und im dreidimensionalen Fall

$$\tilde{\mathbf{r}} \in \left\{ \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}. \quad (4.1.25)$$

Für die Wichtungsfaktoren $\tilde{w}$ für sämtliche Integrationspunkte gilt in allen hier betrachteten $\tilde{w} = 1$.

Das Integral in Gl. (4.1.23) sowie die darin enthaltene Operator-Matrix $\mathbf{B}$ sind im natürlichen Raum $r_i \in [-1, 1]$ gegeben. Um beliebig geformte² Vierecks- bzw. Hexaederelemente im physikalischen Raum $\mathbf{x}$ abbilden zu können, wird eine Koordinatentransformation angewandt. Hierfür wird die *Jacobi-Matrix* $\mathbf{J}$ sowie dessen Determinante $\det[\mathbf{J}]$ benötigt. Die Jacobi-Matrix kann bestimmt werden über

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.1.26)$$

wobei die physikalischen Koordinaten $\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}$ analog zu den Knotenvariablen (siehe Gl. (4.1.8)) interpoliert werden. Die räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen $\partial \mathbf{S}(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r}$ ergeben sich direkt aus der Definition der Ansatzfunktionen $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ in Gl. (4.1.21) bzw. Gl. (4.1.22) und die Knotenkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ sind durch die Diskretisierung bzw. Vernetzung vorgegeben. Die räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den physikalischen Koordinaten, welche zu Bestimmung der Operatormatrix $\mathbf{B}$ benötigt werden (siehe Gl. (4.1.16)), können über die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad (4.1.27)$$

bestimmt werden. Die numerische Integration zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen in Gl. (4.1.19) erfolgt durch

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbf{B} \, dV = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{GP=1}^{N_{GP}} \tilde{w}_{GP} \det[\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP})] (\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}))^T \cdot \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}) \cdot \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}_{GP}) \right). \quad (4.1.28)$$

²Die Topologie bezüglich der Knotennummerierung muss erhalten bleiben und das Gebiet Ω_e muss konvex sein.

4.1.4. Steifigkeitsmatrix für die Topologieoptimierung

Für die Volumenintegration zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrizen in Gl. (4.1.28) mit Hilfe der Gauß-Quadratur müssen die ortsabhängigen Größen in den Integrationspunkten ausgewertet werden. Für die Topologieoptimierung muss dementsprechend der Materialsteifigkeitstensor $\mathbb{E} = \rho(\chi) \mathbb{E}_0$ gemäß Gl. (3.7.2) und damit der Wert der Interpolationsfunktion $\rho(\chi)$ in den Integrationspunkten ausgewertet werden.

Falls die DichtevARIABLE in den Integrationspunkten diskretisiert wird, ergeben sich durch Auswerten der Interpolationsfunktion mit den diskretisierten DichtevARIABLEN direkt die Werte in den Integrationspunkten. Falls die DichtevARIABLE in den Knoten diskretisiert wird, können die Ansatzfunktionen der FEM analog zu Gl. (4.1.8) genutzt werden, um die approximierten Werte der DichtevARIABLE in den Integrationspunkten durch Interpolation zu erhalten. Falls die DichtevARIABLE elementweise diskretisiert wird, sodass $\bar{\chi}_e$ die Dichte des jeweiligen Elementes e definiert, kann die Elementsteifigkeitsmatrix geschrieben werden als

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \rho(\bar{\chi}_e) \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbb{E}_0 \cdot \mathbf{B} \, dV = \rho(\bar{\chi}_e) (\bar{\mathbf{K}}_0)_e. \quad (4.1.29)$$

Die elementweise Diskretisierung der DichtevARIABLE wird am häufigsten innerhalb der Topologieoptimierung verwendet, da kommerzielle FEM-Programme häufig die berechnete Elementsteifigkeitsmatrix $(\bar{\mathbf{K}}_0)_e$ bereitstellen und dementsprechend eine Implementierung in der Form von Gl. (4.1.29) i.d.R. mit weniger Aufwand verbunden ist.

4.1.5. Programmablauf

Prinzipiell könnte die DichtevARIABLE χ als zusätzliche KnotenvARIABLE innerhalb der FEM definiert werden oder über eine in den Knoten diskretisierte FeldvARIABLE gekoppelt werden, welche als zusätzliche unbekannte KnotenvARIABLE (bzw. Knotenfreiheitsgrad) definiert wird [Kotucha u. Hackl (2003); Junker u. Hackl (2015a)] (und analog in Schädigungsmodellen [De Borst u. a. (1993); Dimitrijevic u. Hackl (2008)]). Jedoch führen diese Ansätze zu einem erhöhten Rechenaufwand und werden im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ sowie eine optimierte Dichteverteilung χ entkoppelt voneinander und alternierend über mehrere Iterationsschritte i bestimmt: Zunächst wird das Prinzip der virtuellen Arbeit gemäß Gl. (3.7.17) mit Hilfe der FEM für ein gegebenes Design χ^i ausgewertet, womit die Verschiebungen $\mathbf{u}^i$ bestimmt werden. Die DichtevARIABLE χ^i wird innerhalb der FEM konstant gehalten, sodass das Verschiebungsfeld als einzige unbekannte Feld- bzw. KnotenvARIABLE angenommen wird und sich ein lineares Gleichungssystem für die FEM gemäß Gl. (4.1.20) ergibt.

Anschließend wird die Stationaritätsbedingung für die DichtevARIABLE gemäß Gl. (3.7.25) bzw. Gl. (3.7.31) zur Bestimmung eines optimierten Designs χ^{i+1} ausgewertet. Dabei bleiben innerhalb des Optimierungsschrittes das Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{u}}^i$ und damit die Dehnungen $\tilde{\epsilon}^i$ sowie die Spannungen $\tilde{\sigma}^i$, welche zur Berechnung der Triebkräfte τ_χ^i verwendet werden, unverändert. Das sich aus dem Optimierungsschritt ergebende neue Design χ^{i+1} wird wiederum mittels der FEM ausgewertet, um die Verschiebungen entsprechend dem neuen Design zu aktualisieren.

Dieser Vorgang wird so lange iteriert, bis die Lösung für die DichtevARIABLE als konvergiert

angesehen wird. Ein mögliches Konvergenzkriterium kann über die relative Änderung der Zielfunktion $\mathcal{Z}$ definiert werden mit

$$\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}} = \frac{|\mathcal{Z}^i - \mathcal{Z}^{i-1}|}{|\mathcal{Z}^i|} < \Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}}, \quad (4.1.30)$$

wobei für die hier untersuchte Nachgiebigkeitsminimierung

$$\mathcal{Z}^i = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^i, \chi^i) \, dV \quad (4.1.31)$$

gilt. Häufig wird auch die L_{∞} -Norm der Änderung der DichtevARIABLE als Konvergenzkriterium mit

$$\Delta \chi_{\text{max}} = \max [|\chi^{i+1} - \chi^i|] < \Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} \quad (4.1.32)$$

angenommen.

Um die in Abschnitt 2.7 diskutierten Problemstellungen bei Mehrlastfällen zu optimieren (Siehe Abb. 2.7.1), wird für jeden individuellen Lastfall l je eine FE-Lösung $\mathbf{u}_l^i$ mit dem aktuellen Design χ^i ermittelt, wodurch sich für jeden unterschiedlichen Lastfall jeweils unterschiedliche Triebkräfte $\tau_{\chi}(\mathbf{u}_l^i)$ ergeben. Für die Optimierung wird dann die Summe aller Triebkräfte $\tau_{\chi}^i = \sum_j \tau_{\chi}(\mathbf{u}_l^i)$ genutzt, sodass für den Optimierungsschritt die Anzahl an Lastfällen irrelevant ist: Aus Sicht der Programmierung erkennt der Optimierungsalgorithmus keinen Unterschied für einen oder mehreren Lastfällen, da immer eine skalare Triebkraft für jeden Diskretisierungspunkt an den Algorithmus übergeben wird. Die Gewichtung der jeweiligen Lastfälle erfolgt dabei über den Betrag der aufgebrachten Lasten. In Abb. 4.1.2 ist der grundsätzliche Ablauf der Optimierung schematisch dargestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden lokale Lösungsverfahren zur Ausführung des Optimierungsschrittes mit einer expliziten Zeitdiskretisierung

$$\chi^{i+1} = \chi^i + \begin{cases} \Delta t \dot{\chi}(\tau_{\chi}^i, \chi^i, \nabla \chi^i) & \text{für Gl. (3.7.25)} \\ \Delta t \dot{\chi}(\tau_{\chi}^i, \chi^i, \nabla^2 \chi^i) & \text{für Gl. (3.7.31)} \end{cases} \quad (4.1.33)$$

verwendet. Dadurch muss kein gekoppeltes Gleichungssystem über alle diskretisierten DichtevARIABLEN gelöst werden. Stattdessen wird für jeden diskretisierten Punkt getrennt die Evolutionsgleichung ausgewertet, wodurch der Rechenaufwand für einen Optimierungsschritt linear mit der Anzahl an Diskretisierungspunkten steigt. Die Lösung für die Verschiebungen mit Hilfe der FE-Analyse ist mit einem wesentlich höheren Rechenaufwand als die Optimierung verbunden und der Rechenaufwand steigt abhängig vom Lösungsalgorithmus i.d.R. kubisch mit der Anzahl an Knotenunbekannten [Jacob u. Ted (2007)].

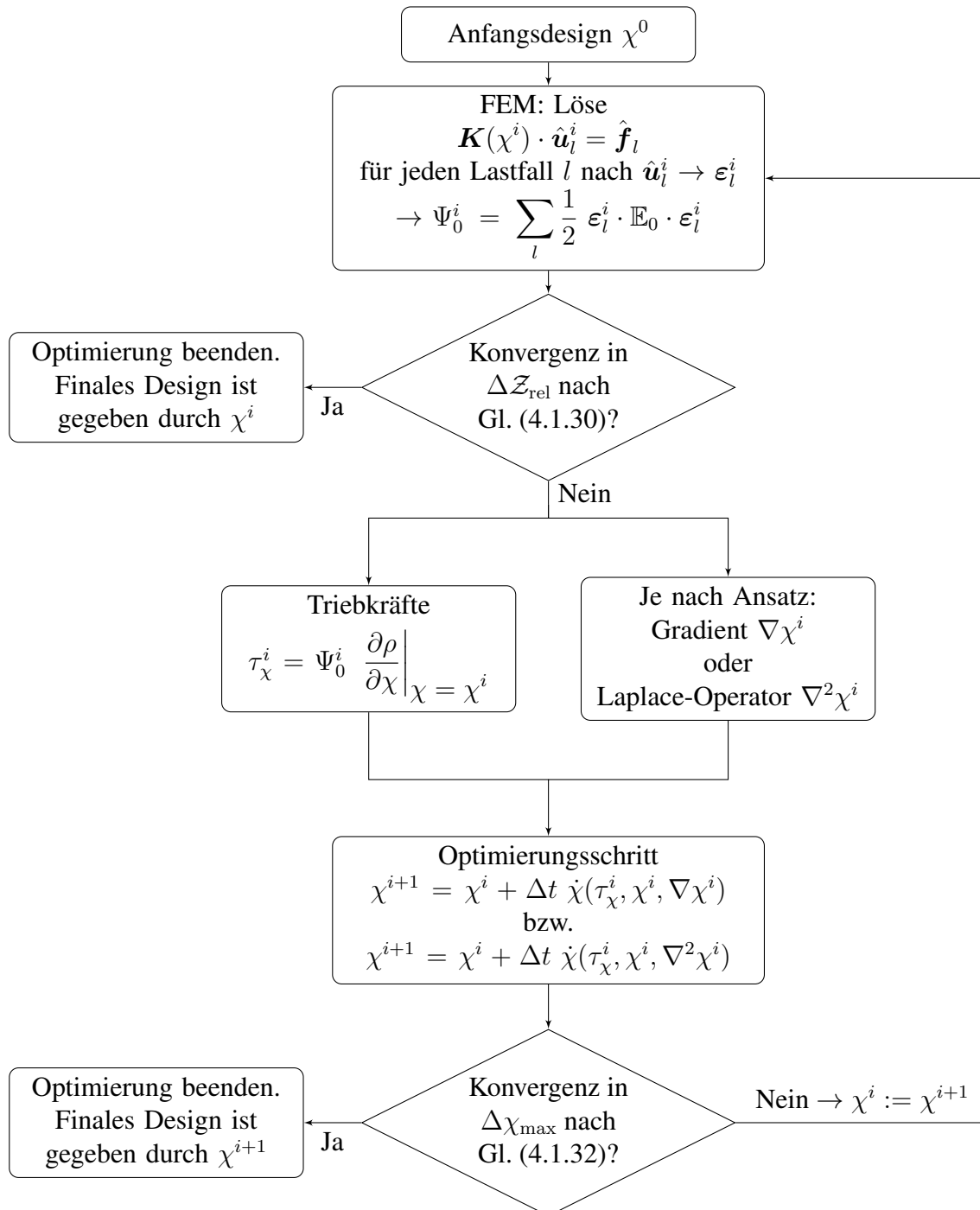


Abbildung 4.1.2.: Allgemeiner Programmablaufplan der Optimierung.

4.1.6. Konsistente Tangente

Bei Verwendung einer *konsistenten Tangente* kann unter der Annahme eines nicht-linearen mechanischen Problems die Änderung der Designvariable in die Berechnung des Verschiebungsfeldes innerhalb der FEM eingebunden werden, wodurch eine stabilere und schnellere Konvergenz erreicht werden kann [Junker u. Hackl (2016a); Junker u. Kochmann (2017); Jantos u. a. (2018)]. Innerhalb der FEM wird das nun als nicht-linear aufgefasste mechanische Problem mittels des Newton-Raphson-Verfahrens iterativ nach $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ gelöst durch

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \cdot (\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n) \quad (4.1.34)$$

mit dem Residuum

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{t} \, dA = 0. \quad (4.1.35)$$

Die konsistente Tangente ist gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} \cdot \mathbf{B} \, dV \quad (4.1.36)$$

mit der Ableitung

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \chi^{n+1}} \otimes \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} \quad (4.1.37)$$

und den Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^n) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \chi^{n+1}} (\chi^{n+1} - \chi^n) \quad (4.1.38)$$

wobei

$$\frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} (\chi^n + \Delta t \dot{\chi}(\chi^n, \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1})) = \Delta t \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} \dot{\chi}(\chi^n, \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}) \quad (4.1.39)$$

mit der Evolutionsgleichung $\dot{\chi}(\chi, \boldsymbol{\varepsilon})$ (siehe Gl. (4.2.17)) bestimmt wird.

In [Jantos u. a. (2016, 2018)] konnte aufgrund der speziellen Nebenbedingung für das Strukturwachstum sowie einer Interpolationsfunktion $\rho(\chi)$ eine analytische Lösung für den Lagrange-Multiplikator ermittelt werden, sodass die Ableitung des selbigen für die konsistente Tangente bestimmt werden kann. In diesem Fall ist $\rho(\chi)$ so definiert, dass sich eine „natürliche“ Intervallgrenze $\rho \in]0, 1]$ durch $\dot{\rho} > 0$ und $\tau_{\chi} \rightarrow 0$ für $\rho = 1$ ergibt, sodass der Kuhn-Tucker-Parameter γ für die Herleitung der konsistenten Tangente vernachlässigt werden kann.

Im allgemeinen wird der Lagrange-Multiplikator λ sowie der Kuhn-Tucker-Parameter γ numerisch ermittelt, sodass die Bestimmung der Ableitungen selbiger für die konsistente Tangente nicht mehr trivial ist. Da die Optimierung ohnehin kleinschrittig erfolgen muss, um Effekte durch lokale Minima zu reduzieren (siehe Abschnitt 4.3), übersteigt i.d.R. der Aufwand der

Bestimmung bzw. Berechnung der konsistenten Tangente ihren Nutzen, sodass die Annahme

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^n) \quad (4.1.40)$$

üblicherweise ausreichend ist, sodass die Beziehungen gemäß Abschnitt 4.1.4³ mit

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^{n+1}} = \rho(\chi^{n+1}) \mathbb{E}_0 \quad (4.1.41)$$

folgen.

4.2. Diskretisierung und Regularisierung der DichtevARIABLE

4.2.1. Bestimmung der diskretisierten Triebkräfte

Um die Stationaritätsbedingung (bzw. Evolutionsgleichung) für die DichtevARIABLE gemäß Gl. (3.7.25) bzw. Gl. (3.7.31) punktweise auswerten zu können, müssen die Triebkräfte τ_χ in den Diskretisierungspunkten der DichtevARIABLE bestimmt werden. Die Wahl der Diskretisierung der DichtevARIABLE ist prinzipiell beliebig, jedoch hat diese maßgeblichen Einfluss auf die numerische Berechnung des Gradienten der Dichte in Gl. (3.7.25) bzw. des Laplace-Operators in Gl. (3.7.31), und damit die Implementation und Steuerung der Regularisierung. Die Diskretisierung der DichtevARIABLE χ kann dementsprechend auch unabhängig von der FEM und damit unabhängig von der Diskretisierung der Verschiebungen $\mathbf{u}$ gewählt werden. Jedoch sollte beachtet werden, dass innerhalb der FEM die Triebkräfte in den Integrationspunkten eines Elementes Ω_e mit

$$\tilde{\tau}_\chi = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{\chi}} \mathbb{E}_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \cdot [\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}})]^T \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{\chi}} \mathbb{E}_0 \cdot \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega_e, \quad (4.2.1)$$

wobei der numerische Wert der Ableitung der Materialinterpolation im jeweiligen Integrationspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ gegeben ist durch

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{\chi}} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \right|_{\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}}, \quad (4.2.2)$$

mit dem geringsten numerischen Fehler berechnet werden [Barlow (1976)].

Bei einer elementweise diskretisierten DichtevARIABLE gegeben durch $\bar{\chi}$, lässt sich die elementweise diskretisierte Triebkraft über

$$\bar{\tau}_\chi = \left. \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \right|_{\chi = \bar{\chi}} \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (4.2.3)$$

bestimmen, wobei das Integral über das Elementvolumen Ω_e innerhalb der FEM standardmäßig mittels der Gauß-Quadratur erfolgen kann.

Falls die DichtevARIABLE in den Knoten diskretisiert ist, können die Dehnungen bzw. Spannungen und damit die Triebkräfte mit Hilfe der Operatormatrizen $\mathbf{B}$ innerhalb der FEM durch

³Hierbei gilt für die Iterationsschritte $n + 1 = i$.

Interpolation für jeden beliebigen Ort $\mathbf{x} \in \Omega$ approximiert werden können. Eine derartige Interpolation wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht verwendet, da die Dichte entweder in den Integrationspunkten oder elementweise diskretisiert wird.

In den folgenden Abschnitten wird die numerische Berechnung des Gradienten der DichtevARIABLE in der schwachen Form der Evolutionsgleichung (3.7.25) mit Hilfe eines *diskontinuierlicher Galerkin*-Ansatzes gezeigt. Des Weiteren wird ein Ansatz zur Berechnung des Laplace-Operators der starken Form der Evolutionsgleichung (3.7.31) für unstrukturierte Netze vorgestellt, welcher auf einer mehrdimensionalen Taylor-Reihenentwicklung zwischen benachbarten Datenpunkten basiert. Hierbei wird nur die Mindestanzahl an benachbarten Punkten zur Lösung der resultierenden Gleichungssysteme verwendet, sodass dieser Ansatz im Folgendem als *Neighbored-Point-Method (NPM)*⁴ (englisch für Benachbarte-Punkte-Methode) bezeichnet wird.

4.2.2. Diskontinuierlicher Galerkin-Ansatz

Ein *diskontinuierlicher Galerkin*-Ansatz wurde erstmalig in Junker u. Hackl (2016b) sowie in Jantos u. a. (2016) und Jantos u. a. (2018) zur numerischen Auswertung der Regularisierung einer TTO basierend auf dem Hamilton-Prinzip angewandt. Bei einem diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz werden Punkte innerhalb der finiten Elemente anstatt der Knoten des FE-Netzes als Stützpunkte für die Interpolation durch die Ansatzfunktionen verwendet. Dadurch kann ein gemittelttes Maß für den Gradienten einer Feldgröße vollständig innerhalb eines finiten Elementes ohne Kopplung zu benachbarten Elementen beschrieben werden, wodurch sich die diskretisierte PDG lokal, d.h. elementweise, auswerten lässt, ohne dass ein globales Gleichungssystem gelöst werden muss.

Zur Lösung der schwachen Form der Evolutionsgleichung gemäß Gl. (3.7.25) werden die DichtevARIABLEN gemäß dem diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz in den Integrationspunkten als Stützpunkte diskretisiert. Die Ansatzfunktionen für den diskontinuierlichen Galerkin Ansatz S^x für den zweidimensionalen Fall lauten

$$S_{GP}^x(\mathbf{r}) \in \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm r \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm s \right) \right\} \quad (4.2.4)$$

und für den dreidimensionalen Fall

$$S_{GP}^x(\mathbf{r}) \in \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm r \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm s \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm t \right) \right\}. \quad (4.2.5)$$

Die Interpolation für das Dichtefeld und dessen Gradienten ist gegeben durch

$$\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\chi} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.2.6)$$

$$\delta\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \delta\tilde{\chi} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.2.7)$$

$$\nabla\chi(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\chi} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\chi} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.2.8)$$

$$\nabla\delta\chi(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \delta\tilde{\chi} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{S}^x(\mathbf{x}) \cdot \delta\tilde{\chi} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad (4.2.9)$$

⁴Wird in der Literatur auch als *Neighbored-Element-Method (NEM)* bezeichnet.

wobei $\tilde{\chi} = \chi(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_k \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega_e$ den Vektor der Werte der DichtevARIABLE innerhalb aller Integrationspunkte k des jeweiligen Elementes definiert. Der Gradient des Dichtefeldes wird über den Gradienten der Ansatzfunktion im natürlichen Raum des isoparametrischen Elementes bestimmt und die Transformation in den physikalischen Raum erfolgt wie beim kontinuierlichen (klassischen) Galerkin-Ansatz über die inverse Jacobi-Matrix analog zur Bestimmung der Operator-Matrix $\mathbf{B}$ gemäß Abschnitt 4.1.3.

Für Gl. (3.7.25) ergibt sich damit

$$\int_{\Omega} \left[-\tau_{\chi} + \eta \mathbf{S}^{\chi} \cdot \dot{\tilde{\chi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} + \gamma + \beta (\nabla \mathbf{S}^{\chi} \cdot \tilde{\chi}) \cdot \nabla \mathbf{S}^{\chi} \right] \Big|_{\chi=\mathbf{S}^{\chi} \cdot \tilde{\chi}} \mathbf{S}^{\chi} \cdot \delta \tilde{\chi} \, dV = 0 \forall \delta \tilde{\chi}. \quad (4.2.10)$$

Für die numerische Integration werden die Ansatzfunktionen $\mathbf{S}^{\chi}$ in den Integrationspunkten $\tilde{\mathbf{x}}$ ausgewertet. Gemäß der Eigenschaft der Ansatzfunktionen analog zu Gl. (4.1.12) gilt

$$S_i^{\chi}(\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_k) = \delta_{ki} \quad (4.2.11)$$

$$\mathbf{S}^{\chi}(\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{e}_k. \quad (4.2.12)$$

Dementsprechend gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\chi}} = \frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\tilde{\chi}} \quad (4.2.13)$$

sowie für die Triebkräfte

$$\tau_{\chi} \Big|_{\chi=\mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\chi}} = \tau_{\chi} \Big|_{\chi=\tilde{\chi}} = \tilde{\tau}_{\chi}, \quad (4.2.14)$$

sodass diese nicht interpoliert werden müssen und gemäß Gl. (4.2.1) direkt berechnet werden können. Damit lässt sich Gl. (4.2.10) schreiben als

$$\left[\int_{\Omega} \eta (\mathbf{S}^{\chi} \cdot \dot{\tilde{\chi}}) \mathbf{S}^{\chi} - \left(\tilde{\tau}_{\chi} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\tilde{\chi}} - \gamma - \beta (\nabla \mathbf{S}^{\chi} \cdot \tilde{\chi}) \cdot \nabla \mathbf{S}^{\chi} \right) \mathbf{S}^{\chi} \, dV \right] \cdot \delta \tilde{\chi} = 0 \forall \delta \tilde{\chi}. \quad (4.2.15)$$

Für den ersten Term in Gl. (4.2.15) gilt gemäß Gl. (4.2.12) für einen gegebenen Integrationspunkt k (ohne Anwendung der Einstein'sche Summenkonvention)

$$(\mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \cdot \dot{\tilde{\chi}}) \mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}_k) = (\mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \otimes \mathbf{S}^{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}_k)) \cdot \dot{\tilde{\chi}} = (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \dot{\tilde{\chi}} = \dot{\tilde{\chi}}_k \mathbf{e}_k. \quad (4.2.16)$$

Folglich sind die Raten der in den Integrationspunkten diskretisierten DichtevARIABLEN $\dot{\tilde{\chi}}$ und damit die Evolutionsgleichungen voneinander entkoppelt, d.h. Gl. (4.2.15) lässt sich als Set aus skalaren (und damit lokalen) Gleichungen für jeden Integrationspunkt k eines finiten Elementes schreiben als

$$\dot{\tilde{\chi}}_k = \frac{1}{\eta} \left(\tilde{\tau}_{\chi} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\tilde{\chi}} - \beta \widetilde{\nabla \chi} - \tilde{\gamma} \right) \Big|_k. \quad (4.2.17)$$

Der Gradiententerm

$$\widetilde{\nabla \chi}|_k = \left(\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{S}^x \cdot \tilde{\chi}) \cdot \nabla \mathbf{S}^x \, dV \right) \Big|_k \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (4.2.18)$$

repräsentiert ein Maß für den Gradienten der DichtevARIABLE innerhalb eines finiten Elementes und wird elementweise ausgewertet. Bei Anwendung der expliziten Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (4.1.33) wird der Gradiententerm $\widetilde{\nabla \chi}$ mit den bekannten Werten der DichtevARIABLE aus dem vorherigen Iterationsschritt bestimmt, sodass die Evolutionsgleichungen lokal in jedem Integrationspunkt separat ausgewertet werden können. Damit ergibt sich für einen Optimierungsschritt

$$\tilde{\chi}^{i+1} = \tilde{\chi}^i + \frac{\Delta t}{\eta} \left(\tilde{\tau}_\chi^i - \lambda^i \frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi = \tilde{\chi}^i} - \beta \widetilde{\nabla \chi}^i - \tilde{\gamma}^i \right). \quad (4.2.19)$$

Durch die lokale Auswertung muss kein globales Gleichungssystem zur Bestimmung des Gradienten für die Regularisierung gelöst werden. Dadurch kann der Rechenaufwand im Vergleich zum kontinuierlichen Galerkin-Ansatz, bei welchem die Designvariable bzw. interne Variablen als zusätzliche Knotenunbekannte bzw. Knotenfreiheitsgrade innerhalb der FEM eingeführt wird, signifikant reduziert werden. Nachteilig ist jedoch, dass keine Informationen bezüglich des Gradienten der DichtevARIABLE über Elementgrenzen hinweg ausgewertet werden können. Dadurch verliert der Regularisierungsparameter seinen Bezug zu charakteristischen Länge des Problems und es ist im Rahmen der Topologieoptimierung nicht möglich das Mindeststrukturmaß zu kontrollieren.

Um diesen Malus auszugleichen, aber dennoch numerisch effizient zu bleiben, wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit (siehe Jantos u. a. (2019a)) ein numerisches Berechnungsverfahren für die Regularisierung entwickelt, welches auf der starken Form der Evolutionsgleichung gemäß Gl. (3.7.31) und der Auswertung des Laplace-Operators zwischen direkt benachbarten finiten Elementen basiert. Das Verfahren wird im folgenden Abschnitt 4.2.3 für strukturierte Netze und in Abschnitt 4.2.4 für unstrukturierte Netze diskutiert.

4.2.3. Finite-Differenzen-Methode

Zur Auswertung der starken Form der Evolutionsgleichung gemäß Gleichung Gl. (3.7.31) muss der Laplace-Operator $\nabla \cdot \nabla \chi = \nabla^2 \chi$, d.h. die Summe der ungemischten zweiten räumlichen Ableitung der DichtevARIABLE χ , (numerisch) im jeweiligen Diskretisierungspunkt c bestimmt werden⁵. Im eindimensionalen Fall mit Laufkoordinate ξ (siehe Abb. 4.2.1) kann je eine Tay-

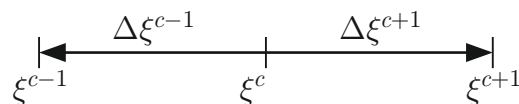


Abbildung 4.2.1.: Diskretisierung im eindimensionalen Fall mit Laufkoordinate ξ .

lorreihe zweiter Ordnung zum Punkt $c + 1$ und zum Punkt $c - 1$ mit jeweils dem Punkt c als

⁵Die Diskretisierung der DichtevARIABLE χ ist hierbei beliebig und kann unabhängig von der Diskretisierung innerhalb der FEM gewählt werden

Entwicklungspunkt geschrieben werden als

$$\chi^{c+1} \approx \chi^c + \left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|_c (\xi^{c+1} - \xi^c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right|_c (\xi^{c+1} - \xi^c)^2 \quad (4.2.20)$$

$$\chi^{c-1} \approx \chi^c + \left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|_c (\xi^{c-1} - \xi^c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right|_c (\xi^{c-1} - \xi^c)^2. \quad (4.2.21)$$

Hierbei sind $\chi^c = \chi(\xi = \xi^c)$, $\chi^{c-1} = \chi(\xi = \xi^{c-1})$ und $\chi^{c+1} = \chi(\xi = \xi^{c+1})$ jeweils die Werte der DichtevARIABLE in den Diskretisierungspunkten c , $c-1$ und $c+1$, welche bei einer expliziten Zeitdiskretisierung der Evolutionsgleichung aus dem vorherigen Iterationsschritt bekannt sind. Die Längen $\Delta \xi^{c-1} := \xi^{c-1} - \xi^c$ und $\Delta \xi^{c+1} := \xi^{c+1} - \xi^c$ ergeben sich aus der vorgegebenen räumliche Diskretisierung. Die Werte der ersten und zweiten räumlichen Ableitungen im Punkt c

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|_c \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right|_c$$

sind die gesuchten Größen, wobei nur der Wert der zweiten Ableitung zur Berechnung des Laplace-Operators benötigt wird. Gleichung (4.2.20) und (4.2.21) können nach den unbekannten Ableitung in Punkt c gelöst werden, sodass gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|_c &\approx \frac{\Delta \xi^{c-1} \chi^{c+1}}{\Delta \xi^{c+1} (\Delta \xi^{c-1} - \Delta \xi^{c+1})} - \frac{\Delta \xi^{c+1} + \Delta \xi^{c-1}}{\Delta \xi^{c+1} \Delta \xi^{c-1}} \chi^c + \frac{\Delta \xi^{c+1} \chi^{c-1}}{\Delta \xi^{c-1} (\Delta \xi^{c+1} - \Delta \xi^{c-1})} \\ \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right|_c &\approx 2 \frac{\chi^{c+1} - \chi^c}{\Delta \xi^{c+1} (\Delta \xi^{c+1} - \Delta \xi^{c-1})} + 2 \frac{\chi^{c-1} - \chi^c}{\Delta \xi^{c-1} (\Delta \xi^{c-1} - \Delta \xi^{c+1})}. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Für eine äquidistante Diskretisierung mit $\Delta \xi^{c+1} = h$ und $\Delta \xi^{c-1} = -h$ kann der Ausdruck weiter vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right|_c &\approx \frac{\chi^{c+1} - \chi^{c-1}}{2h} \\ \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} \right|_c &\approx \frac{\chi^{c+1} - 2\chi^c + \chi^{c-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Im d -dimensionalen Fall und einer regulären und strukturierten räumlichen Diskretisierung, d.h. die Koordinatenachsen ξ_i mit $i \in \{1, \dots, d\}$ stehen orthogonal zueinander, gilt Gl. (4.2.22) analog und unabhängig für jede Raumrichtung, sodass der Wert des Laplace-Operators im Punkt c bestimmen werden kann als

$$\nabla^2 \chi|_c \approx \sum_{i=1}^d \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi_i^2} \right|_c. \quad (4.2.24)$$

In der Regel können für praxisbezogene Randwertprobleme aufgrund der Komplexität der Geometrien bzw. Designräume Ω keine regulären bzw. strukturierten Netze zur räumlichen Diskretisierung angewandt werden. Dementsprechend wird im nun folgenden Abschnitt die Anwendung der Taylor-Reihenentwicklung zur Bestimmung des Laplace-Operators für unstrukturierte Netz diskutiert.

4.2.4. Neighbored-Point-Method (NPM)

Mehrdimensionale Taylor-Reihenentwicklung

Zur Bestimmung des Laplace-Operators $\nabla^2 \chi|_c$ für den zweidimensionalen ($d = 2$) und dreidimensionalen ($d = 3$) Fall bei unstrukturierten Netzen, d.h. die Verbindungen zwischen benachbarten Diskretisierungspunkten stehen nicht orthogonal zueinander, kann wieder eine Taylor-Reihenentwicklung herangezogen werden. Im Gegensatz zur Finite-Differenzen-Methode für strukturierte bzw. reguläre Netze wird nun eine mehr-dimensionale Taylor-Reihenentwicklung für die Koordinaten $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ mit $i = \{1, \dots, d\}$ angewandt. Die Taylor-Reihenentwicklung zweiter Ordnung von einem Entwicklungspunkt c zu einem beliebigen (nahe gelegenen) Punkt (englisch *neighbored point*) k ist gegeben durch

$$\chi^k \approx \chi^c + \sum_{i=1}^d \left[\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \Big|_c (x_i^k - x_i^c) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_c (x_i^k - x_i^c) (x_j^k - x_j^c) \right) \right] . \quad (4.2.25)$$

Mit $\Delta x_i^k := x_i^k - x_i^c$ ergibt sich für den zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \chi^k - \chi^c &\stackrel{d=2}{\approx} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \Big|_c \Delta x_1^k + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \Big|_c \Delta x_2^k \\ &\quad + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_c \Delta x_1^k \Delta x_2^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \Big|_c (\Delta x_1^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \Big|_c (\Delta x_2^k)^2 \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

und für den dreidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \chi^k - \chi^c &\stackrel{d=3}{\approx} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \Big|_c \Delta x_1^k + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \Big|_c \Delta x_2^k + \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \Big|_c \Delta x_3^k \\ &\quad + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_c \Delta x_1^k \Delta x_2^k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_c \Delta x_1^k \Delta x_3^k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_c \Delta x_2^k \Delta x_3^k \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \Big|_c (\Delta x_1^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \Big|_c (\Delta x_2^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_3^2} \Big|_c (\Delta x_3^k)^2 . \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Wie zuvor bei der Finite-Differenzen-Methode seien nun die Werte der räumlichen Ableitungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_i} \Big|_c \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_c$$

im jeweiligen Punkt c die zu bestimmenden Unbekannten, wobei die diskretisierungsabhängigen räumlichen Inkrementen Δx_i^k und die Werte der internen Variablen χ^k bzw. χ^c als bekannt vorausgesetzt werden. Für den zweidimensionalen Fall ergeben sich damit $N_\partial = 5$ und für den dreidimensionalen Fall $N_\partial = 9$ unbekannte räumlichen Ableitungen.

Für jeden Punkt c kann je eine Taylor-Reihenentwicklung für $k = \{1, \dots, N_k\}$ unterschiedliche Nachbarn ausgewertet werden, sodass sich diese als Gleichungssystem

$$\Delta \chi_c = \mathbf{D}_c \cdot \partial \chi_c \quad (4.2.28)$$

mit N_k Gleichungen schreiben lassen. Hierbei ist

$$\Delta \chi_c = \sum_k^{N_k} [(\chi^k - \chi^c) \mathbf{e}_k] \quad (4.2.29)$$

der Vektor der Differenzen der DichtevARIABLE in den Punkten c bzw. k , welche bei einer expliziten Zeitdiskretisierung der Evolutionsgleichung aus dem vorherigen Iterationsschritt innerhalb der numerischen Lösung gegeben sind. Der Vektor der unbekannten Werte der räumlichen Ableitungen $\partial \chi_c$ im jeweiligen Punkt c sei für den zweidimensionalen Fall definiert als

$$\partial \chi_c \stackrel{d=2}{=} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \right)^T \bigg|_c \quad (4.2.30)$$

und für den dreidimensionalen Fall als

$$\partial \chi_c \stackrel{d=3}{=} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_3} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_3^2} \right)^T \bigg|_c \quad (4.2.31)$$

Die $N_k \times N_\partial$ Koeffizientenmatrix $\mathbf{D}_c$ setzt sich vollständig aus den (bekannten) räumlichen Inkrementen Δx_i^k zusammen. Hierbei kann die DichtevARIABLE in beliebigen Punkten c bzw. k diskretisiert werden, sodass eine von der FEM unabhängige Diskretisierung gewählt werden kann.

Je nach Anzahl an einbezogenen Nachbarn N_k kann das Gleichungssystem (4.2.28) gemäß der Neighbored-Point-Method (NPM) direkt gelöst werden (falls $N_k = N_\partial$) oder die Lösung kann alternativ über die *Methode der gewichteten kleinsten Quadrate* (WLS) (englisch *weighted least squares*) für ein überbestimmtes Gleichungssystem ($N_k > N_\partial$) approximiert werden. Die Approximation der Lösung mit Hilfe eines überbestimmten Gleichungssystems findet häufig Anwendung in netzfreien Methoden zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und wird unter anderem als *diffuse element method* oder *renormalised operator* bezeichnet [Nayroles u. a. (1992); Sadat u. Prax (1996); Basic u. a. (2018)].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die NPM angewandt, bei welcher das Gleichungssystem (4.2.28) direkt gelöst wird, d.h. es wird nur die Mindestanzahl an benachbarten Datenpunkten $N_k = N_\partial$ verwendet. Hierbei müssen gewisse geometrische Eigenschaften zwischen den Nachbarn erfüllt sein, um singuläre (und damit nicht invertierbare) Matrizen $\mathbf{D}_c$ zu vermeiden. Entsprechende Nachbarschaftsbeziehungen werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

Nachbarschaftsbeziehungen für die direkte Lösung

Für den Fall $N_k = N_\partial$, d.h. es werden exakt so viele Nachbarn zur Aufstellung des Gleichungssystems (4.2.28) einbezogen wie unbekannte räumliche Ableitungen $\partial \chi_c$, kann die Bestimmung der Lösung des Gleichungssystems direkt, d.h. ohne weitere Approximationen, mit Hilfe der Inversen der nun quadratischen $N_\partial \times N_\partial$ Koeffizientenmatrix $\mathbf{D}$ in der Form

$$\partial \chi_c = \mathbf{D}_c^{-1} \cdot \Delta \chi_c \quad (4.2.32)$$

erfolgen.

Die Diskretisierung der DichtevARIABLE χ und die Wahl der Nachbarn eines jeden Diskretisierungspunktes c sind prinzipiell beliebig, jedoch sollten Nachbarn gleichmäßig um den Punkt c verteilt sein, damit numerische Fehler reduziert werden, bzw. $\mathbf{D}_c$ nicht singulär wird [Prax u. a. (1996); Basic u. a. (2018)]. Des Weiteren sollte bedacht werden, dass die Evolutionsgleichung sinnvollerweise in den Punkten ausgewertet werden sollte, in denen die Triebkräfte mit Hilfe der FEM möglichst exakt berechnet werden bzw. in denen die Triebkräfte mit möglichst geringem Fehler durch Interpolation bestimmt werden können. Damit wäre es am sinnvollsten, die Evolutionsgleichung und damit die DichtevARIABLE in den Integrationspunkten der FEM zu diskretisieren (Siehe Abschnitt 4.1.5). Jedoch ist die Bestimmung der Nachbarschaftsbeziehungen von Integrationspunkten bzw. die sinnvolle Wahl der Nachbarn für jeden Punkt verhältnismäßig komplex. Dementsprechend wird die DichtevARIABLE elementweise in den jeweiligen Elementschwerpunkten bzw. Elementmittelpunkten diskretisiert⁶ (siehe [Jantos u. a. (2019a); Junker u. a. (2019)]). Für eine elementweise konstante DichtevARIABLE $\bar{\chi}$ ergibt sich die Evolutionsgleichung gemäß Gl. (3.7.29) zu

$$\dot{\bar{\chi}} = \frac{1}{\eta} \left(\bar{\tau}_{\chi} - \lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \chi} \right|_{\chi=\bar{\chi}} - \bar{\gamma} + \beta \nabla^2 \chi \Big|_{\chi=\bar{\chi}} \right) \quad (4.2.33)$$

mit den elementweise definierten Triebkräften $\bar{\tau}_{\chi}$ gemäß Gl. (4.2.3).

Sinnvolle und allgemeingültige Nachbarschaftsbeziehungen, welche möglichst geringe numerische Fehler aufweisen, lassen sich vor allem für Netze bestehend aus Viereckselementen im zweidimensionalen Fall bzw. Hexaederelementen für den dreidimensionalen Fall definieren, da diese Elementtypen verhältnismäßig viele direkte Nachbarelemente besitzen, d.h. Elemente, die sich eine gemeinsame Kante (im zweidimensionalen Fall) bzw. eine gemeinsame Fläche (im dreidimensionalen) mit dem Pivotelement c teilen. Diese direkten Nachbarelemente sind bei gut konditionierten Netzen, d.h. „wohlgeformten“ Elementen, üblicherweise gleichmäßig um das Pivotelement c verteilt, sodass entsprechend der Fehler für die Berechnung des Laplace-Operators gering ausfällt. Zudem ist es möglich, strukturierte Netze mit Hilfe von Vierecks- bzw. Hexaederelementen zu generieren, wobei für diesen Fall die Lösung gemäß Gl. (4.2.32) zu exakt den selben Ausdrücken wie die der Finite-Differenzen-Methode gemäß Abschnitt 4.2.3 führt.

Die Wahl der Nachbarelemente ist für den zweidimensionalen Fall in Abb. 4.2.2 illustriert: In diesem Fall werden $N_k = N_{\partial} = 5$ Nachbarn im näheren Umfeld um das Pivotelement c benötigt. Die vier direkten Nachbarn n , w , s und e lassen sich mit Hilfe der lokalen Knotennummerierung (Zahlen in Kreisen) innerhalb der FEM bestimmen: Direkte Nachbarn von c sind diejenigen Elemente, welche exakt zwei Knoten mit dem Pivotelement c gemeinsam haben. Die lokale Knotennummerierung im Element c definiert welcher Nachbar (n , w , s oder e) dieses Element ist: Beispielsweise ist das Element s dasjenige Element, welchem ebenfalls die lokalen Knoten 1 und 2 des Elementes c zugeordnet sind. Analog ergibt sich das Element e über die lokalen Knoten 2 und 3, n aus 3 und 4 sowie w über 4 und 1. Der zusätzliche fünfte Nachbar o ist der dem Punkt c am nächsten liegende indirekte Nachbar bzw. Diagonalnachbar. Diagonalnachbarn sind diejenigen Elemente, welche exakt einen Knoten mit dem Pivotelement c gemeinsam haben.

Für den dreidimensionalen Fall wird analog verfahren. Hierbei sind die direkten Nachbarn n ,

⁶Eine elementweise Diskretisierung der DichtevARIABLE ist der übliche Ansatz im Rahmen der Topologieoptimierung, wenn auch aus anderen Gründen: Siehe beispielsweise Abschnitt 2.2 und 2.4

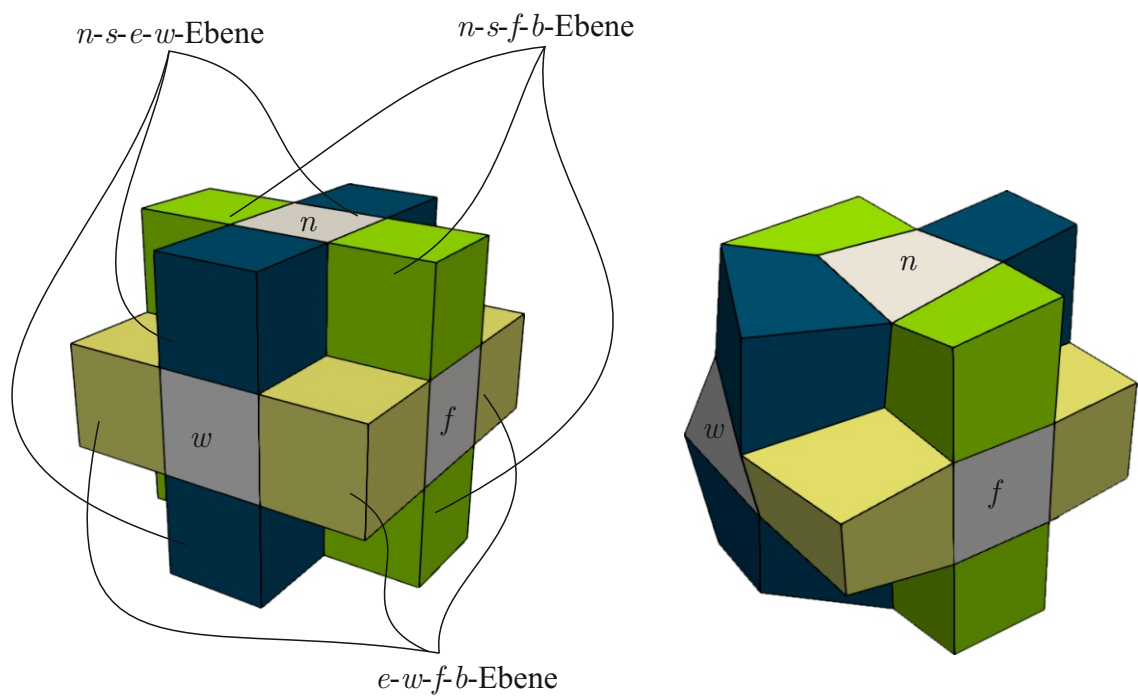


Abbildung 4.2.3.: Nachbarschaftsbeziehung im dreidimensionalen Fall (strukturiertes und unstrukturiertes Netz) für die direkte Lösung mit $N_k = N_\partial = 9$ Nachbarnpunkten: Die 6 direkten Nachbarelemente n , w , s , e , f und b sind in grau gekennzeichnet. Die drei zusätzlichen Nachbarelemente o , p und q liegen je in einer der drei farblich gekennzeichneten Ebenen.

Operatormatrix zur Bestimmung des Laplace-Operators

Im vorliegenden Fall ist nur die Berechnung des Laplace-Operators von Interesse, sodass nur die ungemischten zweiten Ableitungen

$$\partial\chi_c^* \stackrel{d=2}{=} \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} \right)^T \Big|_c \quad \text{und} \quad \partial\chi_c^* \stackrel{d=3}{=} \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x_3^2} \right)^T \Big|_c \quad (4.2.34)$$

relevant sind. Basierend auf der Lösung des Gleichungssystems (4.2.28) kann für jeden Punkt c eine $d \times N_k$ Operatormatrix B_c^∇ in der Form

$$\partial\chi_c^* = B_c^\nabla \cdot \Delta\chi_c \quad (4.2.35)$$

definiert werden. Die Operatormatrix B_c^∇ ergibt sich aus der Reduktion der inversen Koeffizientenmatrizen D_c^{-1} , sodass nur die letzten d Einträge von $\partial\chi_c$ (welche $\partial\chi_c^*$ entsprechen) berechnet werden:

$$(B_c^\nabla)_{i,j} := (D_c^{-1})_{i+l,j} \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, d\}, \quad j \in \{1, \dots, N_\partial\}, \quad l = N_\partial - d. \quad (4.2.36)$$

Die Koeffizientenmatrizen D_c hängen nur von den räumlichen Inkrementen Δx_i^k und somit nur von den Nachbarschaftsbeziehungen bzw. der Topologie der räumlichen Diskretisierung ab. Dementsprechend müssen die sich aus den Koeffizientenmatrizen D_c bestimmten Operatormatrizen B_c^∇ nur einmalig für eine gegebene räumliche Diskretisierung bzw. Vernetzung im Vorfeld vor der Optimierung für das gegebene Netz bestimmt werden. Die numerische Berechnung des Laplace-Operators reduziert sich auf eine Vektor-Matrix-Multiplikation gemäß Gl. (4.2.35) und der Aufsummierung der Einträge

$$\nabla^2\chi|_c = \sum_{i=1}^d [\partial\chi_c^* \cdot e_i] = \sum_{i=1}^d [(B_c^\nabla \cdot \Delta\chi_c) \cdot e_i]. \quad (4.2.37)$$

Neben den Operatormatrizen B_c^∇ wird noch zusätzlich die Nachbarschaftsbeziehungen benötigt, welche jedem Punkt c seine N_k Nachbarnpunkte zuordnet, um die Werte der Differenzen $\chi^k - \chi^c$ für $\Delta\chi_c$ im jeweiligen Iterationsschritt bestimmen zu können.

Folglich ergibt sich mit der expliziten Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (4.1.33) und der Anwendung der Operatormatrix B_c^∇ der Optimierungsschritt zu

$$\chi^{j+1} = \chi^j + \frac{\Delta t}{\eta} \left(\tau_\chi^j - \lambda^j \frac{\partial f}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi^j} - \gamma^j + \beta \sum_{i=1}^d [(B_c^\nabla \cdot \Delta\chi^j) \cdot e_i] \right), \quad (4.2.38)$$

welcher lokal, d.h. eine separate skalare Gleichung für jeden Diskretisierungspunkt von χ , ausgewertet werden kann, da $\Delta\chi^j$ durch die bekannten Werte der DichtevARIABLE χ^j aus dem vorherigen Iterationsschritt j gegeben ist.

4.2.5. Neumann-Randbedingung

Die Neumann-Randbedingungen gemäß Gl. (3.7.32) ergeben sich direkt aus der partiellen Integration und müssen entsprechen bei der Auswertung der starken Form der Evolutionsgleichung

(4.2.33) eingehalten werden. Eine mögliche Umsetzung ist die Anwendung von so genannten *Ghost-Punkten* (englisch für „Geist“). Bei den Ghost-Punkten handelt sich um Diskretisierungspunkte g mit Koordinaten $x^g \notin \Omega$ außerhalb des Designraumes Ω , welche über die Spiegelung von Punkten $x^c \in \Omega \setminus \partial\Omega$ am Rand $\partial\Omega$ definiert werden können. Dabei sollten die Punkte x^c möglichst nahe am Rand $\partial\Omega$ liegen, jedoch kein Teil des selbigen sein. Die freie Oberfläche $\partial\Omega_c$ eines Elementes c kann durch die Abwesenheit von direkten Nachbarn ermittelt werden. Wie beispielsweise in Abb. 4.2.4 dar gestellt, besitzt das Element c keinen Nachbarn w , d.h. es gibt kein anderes Element, dem die lokalen Knoten 4 und 1 des Elementes c zugeordnet sind. Ein dementsprechend definierter Ghost-Punkt g wird dann für die Berechnung der Operatorma-

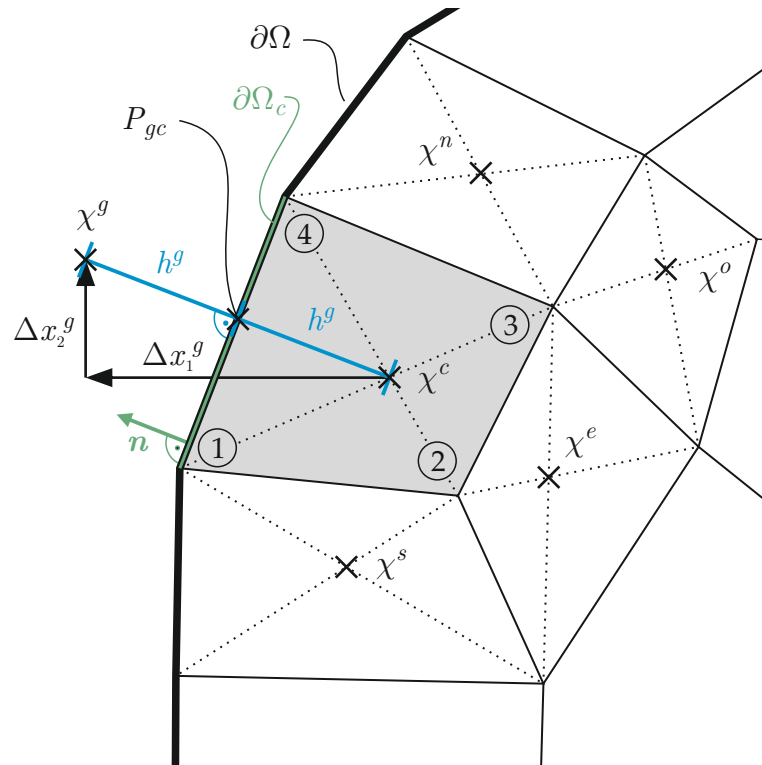


Abbildung 4.2.4.: Nachbarschaftsbeziehung am Rand des Designraumes $\partial\Omega$ im zweidimensionalen Fall für ein unstrukturiertes Netz. Der zusätzliche Ghost-Punkt g ersetzt den Nachbarn w des Pivotelementes c .

trix B_c^∇ dem Element c als zusätzlicher Nachbar hinzugefügt bzw. füllt die Lücke eines abwesenden Nachbarn (im Beispiel in Abb. 4.2.4 ersetzt der Ghost-Punkt g den Nachbarn w). Der Wert der DichtevARIABLE im Ghost-Punkt wird identisch gleich seinem Spiegelpunkt c gesetzt ($\chi^g = \chi^c$). Dadurch ergibt sich automatisch $\nabla\chi \cdot \mathbf{n} = 0$ im Punkt P_{gc} , welcher als Schnittpunkt der Oberfläche $\partial\Omega_c$ und der Verbindungslinie zwischen den Punkten c und g definiert ist. Die Koordinaten der Ghost-Punkte x^g bzw. Δx_i^g werden nur einmalig zur Bestimmung der Operatormatrizen B_c^∇ benötigt und die Bedingung $\chi^g = \chi^c$ kann über die Zuordnung der Werte für $\Delta\chi_c$ erfolgen: Anstatt auf ein nicht vorhandenes Nachbarelement von c zu verweisen, wird auf den Wert von c selbst verwiesen. Dadurch müssen keinen zusätzlichen Daten für die Ghost-Punkte innerhalb der Implementation der Operatormatrizen B_c^∇ gespeichert werden.

4.2.6. Regularisierungsparameter

Regularisierungsparameter für den diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz

Der Regularisierungsparameter β wird für den diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz gemäß Abschnitt 4.2.2 nach Junker u. Hackl (2016b) bzw. in der leicht abgewandelten Form nach Jantos u. a. (2016, 2018) definiert als

$$\beta = \Omega_e \max \left\{ \frac{\mathbf{R}_e^* \cdot \hat{\mathbf{u}}_e}{\Omega_e} \mid \forall \Omega_e \in \Omega \right\} \quad (4.2.39)$$

mit

$$\mathbf{R}_e^* = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (4.2.40)$$

und den Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_e$ des jeweiligen Elementes e . Bei Anwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes für die numerische Bestimmung des Gradienten der DichtevARIABLE, welche in den Integrationspunkten diskretisiert werden, beeinflusst der Wert von β nur den lokalen Dichtegradienten innerhalb der Elemente, sodass eine übermäßige Erhöhung von β dazu führen würde, dass sämtliche DichtevARIABLEn in den Integrationspunkten innerhalb eines Elementes den gleichen Wert annehmen würden. Dementsprechend ist es nicht möglich mit Hilfe des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes die charakteristische Länge des Problems, d.h. das Mindeststrukturabmaß und damit die Strukturkomplexität, zu beeinflussen. Dadurch ist das Auftreten von minimalistischen Balken (siehe Abb. 2.6.1) prinzipiell möglich. Ähnliche Beobachtungen ergeben sich bei der Anwendung einer so genannten *patch technique* [Bendsøe u. Sigmund (2003)]. Jedoch wird das Problem bei Anwendung von viskosen Wachstumsansätzen (siehe Abschnitt 4.4.2) zusätzlich relaxiert, sodass keine minimalistischen Balken und keine Netzabhängigkeit für eine hinreichend große Viskosität auftreten.

Regularisierungsparameter für die Neighbored-Point-Method

Bei der Verwendung der NPM gemäß Abschnitt 4.2.4 werden Informationen bezüglich des Gradienten der DichtevARIABLE zwischen beliebigen Diskretisierungspunkten innerhalb gewisser Bereiche, welche durch die Nachbarschaftsbeziehungen definiert sind, ausgetauscht. Hierbei korrespondiert der Regularisierungsparameter β mit der charakteristischen Länge des Problems. Im Rahmen der Topologieoptimierung korrespondiert die charakteristische Länge mit dem Mindeststrukturabmaß, während beispielsweise bei Schädigungsmodellen diese mit der Mindestrissbreite korrespondiert. Um eine problemunabhängige Steuerung des Mindeststrukturabmaßes, d.h. unabhängig von physikalischen Einheiten bzw. Größenordnung der Materialparameter und aufgebrachten Kräfte, zu ermöglichen, wird die Skalierung nach Jantos u. a. (2019a)

$$\beta = \beta^* \langle \tau_X \rangle \quad (4.2.41)$$

mit

$$\langle \tau_\chi \rangle = \frac{\int_{\Omega} w(\chi) \tau_\chi \, dV}{\int_{\Omega} w(\chi) \, dV} \quad (4.2.42)$$

und

$$w(\chi) = (\chi - \chi_{\min})(1 - \chi) \quad (4.2.43)$$

eingeführt. Dabei gewichtet $w(\chi)$ die Triebkräfte τ_χ nach der „Aktivität“ der DichtevARIABLE: DichtevARIABLEN mit Werten nahe der Intervallgrenze $\chi \rightarrow \{\chi_{\min}, 1\}$ gehen weniger stark in die Mittlung ein, da diese üblicherweise nur geringfügige Änderungen im weiteren Verlauf der Optimierung erfahren und entsprechend geringeren Einfluss auf die Evolution der Struktur haben. Dementsprechend wird die Regularisierung auf die Größenordnung der effektiven Triebkräfte skaliert. Die Beziehung des Steuerparameters β^* zum Radius des Mindeststrukturabmaßes $R_{\min}$ ergibt sich zu (siehe hierzu Abschnitt 5.3.4)

$$\sqrt{\beta^*} \approx R_{\min} . \quad (4.2.44)$$

Die charakteristische Länge muss signifikant größer als der Abstand zwischen den Diskretisierungspunkten h der DichtevARIABLE sein, damit keine Netzhängigkeit entsteht. Dementsprechend sollte

$$\beta^* \geq 2(h_{\max})^2 \quad (4.2.45)$$

eingehalten werden, um netzhängige Ergebnisse ausschließen zu können.

4.3. Schrittweitenkontrolle

4.3.1. Instabiles Verhalten

Aufgrund der starken Nichtkonvexität des Problems bzw. der Nichtlinearität von Gl. (3.7.25) bzw. Gl. (3.7.31), muss die numerische Lösung kleinschrittig erfolgen: Die numerische Dämpfung bzw. die Schrittweite $\chi^{i+1} - \chi^i$ der Evolutionsgleichung muss adäquat gesteuert werden, da sonst der Optimierungsalgorithmus in lokale Minima fallen könnte. Dadurch wird die Konvergenz zu einem besseren Minimum beeinträchtigen oder es kann zu Oszillationen der Lösung kommen, sodass der Optimierungsalgorithmus vollständig versagt. Abbildung 4.3.1 zeigt die Änderung des Designs χ in aufeinanderfolgenden Iterationen bei schwacher Oszillation und den Extremfall einer fatalen Oszillation aufgrund unzureichender numerischen Dämpfung.

Bei der fatalen Oszillation scheitert die Optimierung bereits in den ersten Iterationsschritten: Im ersten Optimierungsschritt wird eine homogene Dichteverteilung für die FEM angewandt. Dies führt bei darauffolgenden (in diesem Fall zu schwach gedämpften) Optimierungsschritten zu einer diskreten „Schwarz-Weiß“-Struktur $\chi \rightarrow \{0, 1\}$, bei welcher das gesamte Strukturvolumen an den Lagern sowie an den Krafteinleitungspunkten konzentriert ist. Es kommt zum Abreißen der Struktur, d.h. Lager und Belastung sind nicht mehr über eine zusammenhängende Struktur verbunden. Dadurch werden die Triebkräfte im folgenden Iterationsschritt im Be-

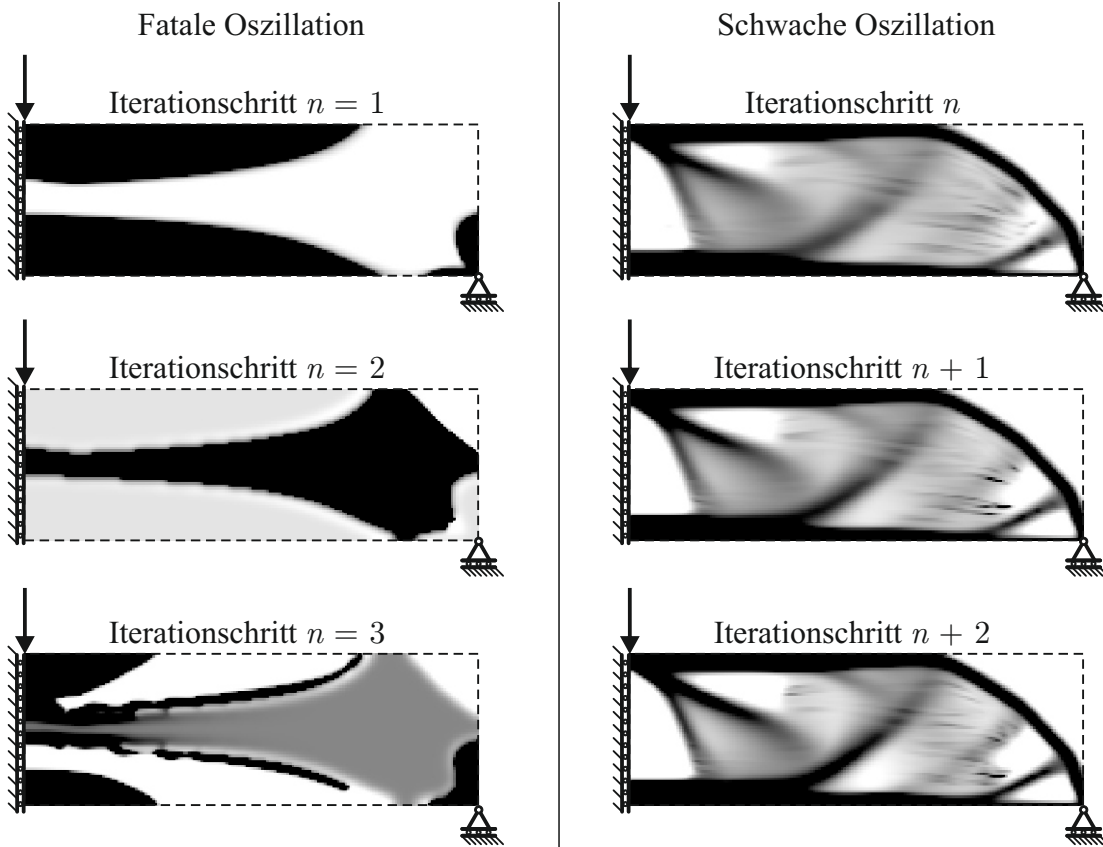


Abbildung 4.3.1.: Fatale und schwache Oszillation des Dichtefeldes χ aufgrund unzureichender numerischer Dämpfung.

reich zwischen den Struktursegmenten extrem groß im Vergleich zu den Triebkräften innerhalb der nun überdimensionierten Struktursegmenten an den Lagern und Krafteinleitungspunkten. Im folgenden Iterationsschritt versucht die Optimierung nun den Fehler aus dem vorherigen Schritt auszugleichen und lagert die Struktur von den Lagern und Krafteinleitungspunkten in den Zwischenbereich um. Durch die zu große Schrittweite wird dies aber überkompensiert: Die Zwischenbereiche werden überdimensioniert während die Struktursegmente an den Lagern und Krafteinleitungspunkten fast vollständig entfernt werden und es kommt zu einer starken Oszillation der Lösung durch wiederholtes Abreißen.

Bei den im Rahmen der vorliegenden Arbeit gezeigten Modelle kann die numerische Dämpfung bzw. die Schrittweite über das Zeitinkrement Δt und die Viskosität η gesteuert werden, welche immer gemeinsam als Bruch auftreten und globale Größen darstellen, d.h. sie sind ortsunabhängig bzw. konstant $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Im Idealfall wird eine Definition für $\eta/\Delta t$ gefunden, die sich so an ein gegebenes Randwertproblem anpasst, dass keine weitere Anpassung bzw. Parameterstudien von Anwenderseite aus nötig sind, um eine stabile und gleichzeitig schnelle Konvergenz zu gewährleisten. Im nun folgenden Abschnitt werden zwei mögliche Definitionen vorgestellt, welche diese Bedingung erfüllen.

4.3.2. Ansätze für die Viskosität und das Zeitinkrement

In Jantos u. a. (2016) wurde das Zeitinkrement $\Delta t = 1$ gewählt, sodass nur die Viskosität η definiert werden muss. Diese wurde so definiert, dass innerhalb eines jeden Optimierungsschrittes

die Intervallgrenze $\chi \in \{\chi_{\min}, 1\}$ von keiner (diskretisierten) DichtevARIABLE χ überschritten wird

$$\eta \rightarrow |\chi^{i+1} - \chi^i| \leq \begin{cases} 1 - \chi^i & \text{falls } \dot{\chi}^i > 0 \\ \chi^i - \chi_{\min} & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.3.1)$$

Die Viskosität η wird somit auf die sich im jeweiligen Iterationsschritt am „schnellsten“ entwickelnde (diskretisierte) DichtevARIABLE χ bezogen. Damit ist die numerische Dämpfung in jedem Fall hinreichend groß, um Instabilitäten gemäß Abb. 4.3.1 zu verhindern sowie das Problem für Wachstum unter Verwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes soweit zu relaxieren, dass netzunabhängige Ergebnisse erzielt werden [Jantos u. a. (2016, 2018)]. Allerdings ist dieser Ansatz mit einer verhältnismäßig aufwendigen Implementierung verbunden. Zudem kann sich die Gesamtanzahl an Optimierungsschritten bei feineren Netzen bzw. Anzahl an Diskretisierungspunkten für die DichtevARIABLE χ erhöhen, da immer nur eine diskretisierte DichtevARIABLE χ nach der anderen an die Intervallgrenze geführt wird.

Dementsprechend wurde in Jantos u. a. (2019a) die Formulierung basierend auf der gewichteten Mittlung der mechanischen Triebkräfte analog zu Gl. (4.2.41) eingeführt als

$$\frac{\eta}{\Delta t} = \frac{\eta^*}{\Delta t} \langle \tau_\chi \rangle. \quad (4.3.2)$$

Mit Gl. (4.3.2) wird ein globales Maß eingeführt, welches alle Diskretisierungspunkte $\mathbf{x} \in \Omega$ einbezieht, sodass die Definition der Viskosität η unabhängig von der Diskretisierung bzw. Anzahl an Diskretisierungspunkten für die DichtevARIABLE χ ist. Die Größe $\langle \tau_\chi \rangle$ normiert die Triebkräfte τ_χ in der Evolutionsgleichung (und damit die Schrittweite) mit Hilfe der Anwendung der effektiven Triebkräfte, sodass die Wahl von $\eta^*/\Delta t$ problemunabhängig erfolgen kann. Allerdings entspricht die Anwendung der expliziten Zeitdiskretisierung auf die starke Form der Evolutionsgleichung (3.7.31) einer FTCS-Diskretisierung, welche bedingt stabil ist, sodass die Werte für $\eta^*/\Delta t$ gewisse Stabilitätskriterien erfüllen müssen, welche im nun folgenden Abschnitt diskutiert werden.

4.3.3. Stabilitätskriterium für FTCS-Diskretisierung

Die Anwendung der expliziten Zeitdiskretisierung auf die starke Form der Evolutionsgleichung (3.7.31) entspricht einer FTCS-Diskretisierung, welche bedingt stabil ist. Für die Stabilitätsanalyse wird davon ausgegangen, dass der Einfluss der Triebkräfte τ_χ , des Lagrange-Multiplikators λ und des Kuhn-Tucker-Parameters γ gegenüber dem Einfluss des Laplace-Operators bzw. der Regularisierungsterms $\beta \nabla^2 \chi$ mit voranschreitendem Optimierungsprozess vernachlässigbar ist: Im konvergierten Zustand werden die Triebkräfte minimal, während der Betrag des Regularisierungsterms mit voranschreitendem Optimierungsprozess ansteigt, da das Design gegen eine „Schwarz-Weiß“-Lösung mit entsprechend (lokal) erhöhten Dichtegradienten strebt. Mit der entsprechenden Annahme lässt sich die Evolutionsgleichung in der Form einer parabolischen PDG ähnlich zur Wärmeleitungsgleichung [Dehghan (2004)]

$$\chi^{i+1} - \chi^i = \frac{\Delta t}{\eta} \beta \nabla^2 \chi^i \quad (4.3.3)$$

schreiben. Für ein strukturiertes, äquidistantes Netz mit $\Delta\xi^k = \Delta x_i^k = h$ führt die Diskretisierung gemäß Gl. (4.3.3) zu einer stabilen numerischen Lösung, falls das *Neumann-Stabilitätskriterium*

$$d \frac{\Delta t \beta}{\eta h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4.3.4)$$

erfüllt ist. Mit der Definition für β nach Gl. (4.2.41) und η nach Gl. (4.3.2) ergibt sich damit

$$\frac{\eta^*}{\Delta t} \geq 2d \frac{\beta^*}{h^2}, \quad (4.3.5)$$

wobei h durch die Diskretisierung festgelegt wird und $\beta^* \approx R_{\min}^2$ durch das Mindeststrukturabmaß $R_{\min}$, welches durch die jeweiligen Anwendungsfall gegeben ist. Für den Mindestwert $\beta^* \geq 2h^2$, welcher netzunabhängige Ergebnisse liefert, ergibt sich damit $\eta^* \geq 12$ für $\Delta t = 1$ und $d = 3$. Bei einer Erhöhung von β^* , d.h. Erhöhung des Mindeststrukturabmaß, müsste η^* ebenfalls erhöht bzw. Δt verringert werden, sodass die Evolution der DichtevARIABLE χ verlangsamt werden würde, was wiederum in mehr Iterationsschritten und FEM-Analysen resultieren würde. Dadurch würde entsprechend der Rechenaufwand der gesamten Optimierung maßgeblich erhöht werden. Um dies zu umgehen, wird nach Jantos u. a. (2019a) bzw. Gaganelis u. a. (2019) eine innere Optimierungsschleife über die Schritte $j \in \{1, \dots, N_j\}$ eingeführt (siehe Abb. 4.3.2): Innerhalb der inneren Iterationsschritte j werden die Ergebnisse der FEM, d.h. die Verschiebungen $\hat{u}_l^i$ und damit die Dehnungen $\tilde{\epsilon}_l^i$, konstant gehalten⁷. Die Evolutionsgleichung wird N_j -mal mit der gegebenen Viskosität ($\eta^* = 15$ nach Gaganelis u. a. (2019)) und angepasstem Zeitinkrement

$$\Delta t = \frac{1}{N_j} \quad (4.3.6)$$

ausgewertet. Mit den N_j inneren Iterationsschritten und dem Zeitinkrement Δt ergibt sich

$$t^{i+1} = t^i + N_j \Delta t \quad (4.3.7)$$

und damit das Zeitinkrement zwischen zwei aufeinander folgenden FEM-Analysen i und $i + 1$

$$t^{i+1} - t^i = (N_j \Delta t + t^i) - t^i = 1. \quad (4.3.8)$$

Das Zeitinkrement Δt wird so gewählt, dass das Stabilitätskriterium gemäß Gl. (4.3.5) mit

$$N_j = \left\lceil \frac{2d \beta^*}{\eta^* h^2} \right\rceil \stackrel{d=3}{=} \left\lceil \frac{6 \beta^*}{\eta^* h^2} \right\rceil \quad (4.3.9)$$

erfüllt wird, wobei $\lceil \cdot \rceil$ eine Aufrundung auf die nächst größte natürliche Zahl definiert.

Das Stabilitätskriterium gemäß Gl. (4.3.5) gilt hierbei nur für die Anwendung der Finite-Differenzen-Methode bzw. der NPM für äquidistante und strukturierte bzw. reguläre Netze. Bei der NPM für unstrukturierte Netze ist die Herleitung eines Stabilitätskriteriums nicht trivial,

⁷Innerhalb der Implementierung kann $\Psi_0^i = \sum_l \frac{1}{2} \epsilon_l^i \cdot \mathbb{E}_0 \cdot \epsilon_l^i$ bestimmt werden, sodass nur eine skalare Größe für jeden Diskretisierungspunkt der DichtevARIABLE χ für alle Lastfälle zusammen zur Bestimmung der Triebkräfte τ_χ^j als Ergebnis der FEM gespeichert werden muss.

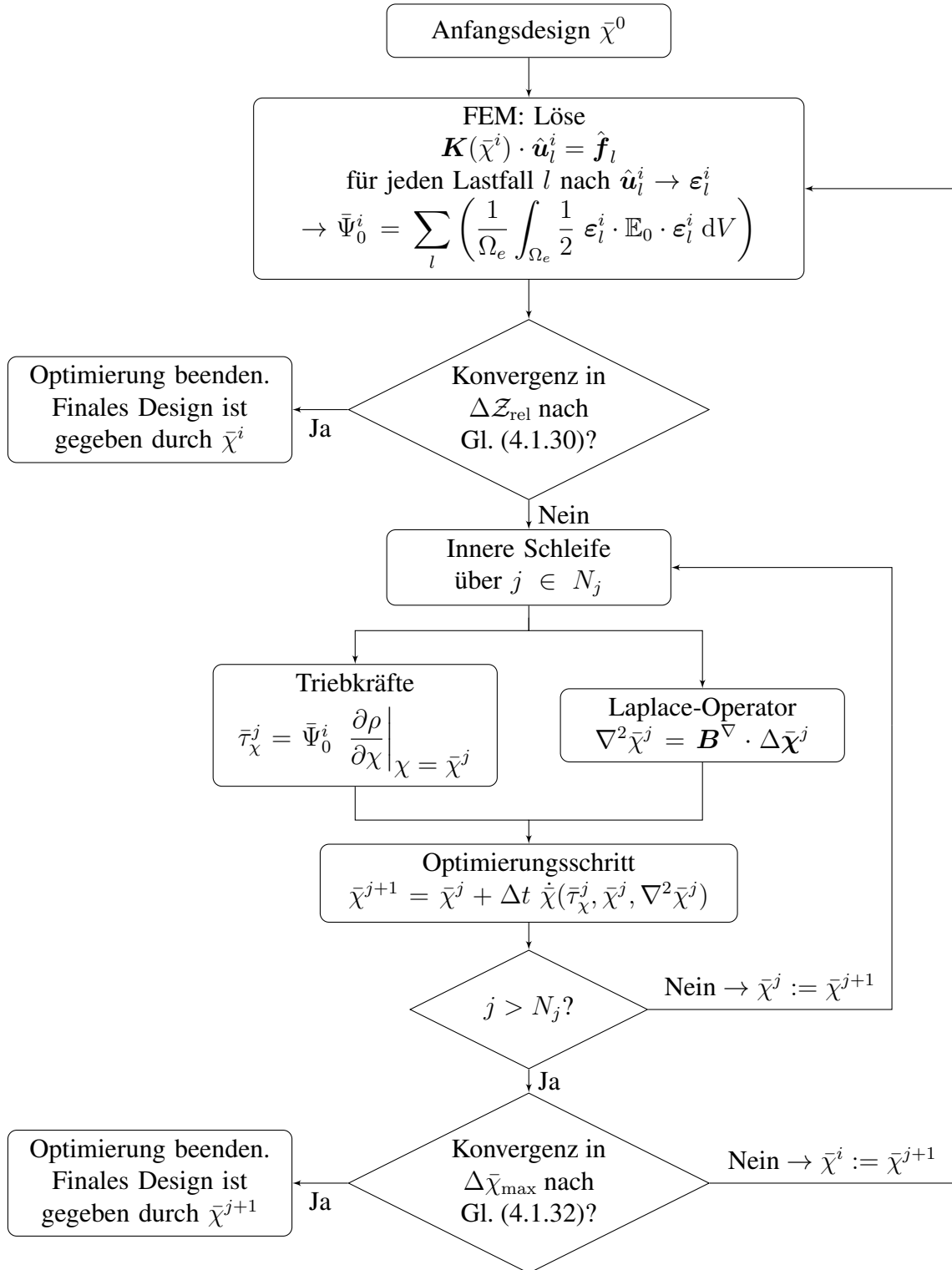


Abbildung 4.3.2.: Allgemeiner Programmablaufplan der Optimierung mit innerer Optimierungsschleife zur Einhaltung des Neumannstabilitätskriteriums (4.3.5) bei Verwendung einer FTCS-Diskretisierung.

sodass hier der Einfachheit halber vom „schlimmsten“ Fall

$$h = \max\{||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^c||\}, \quad (4.3.10)$$

d.h. dem größten Abstand zwischen zwei Nachbarn, ausgegangen wird. Die Definition der Viskosität und des Zeitinkrementes gemäß Gl. (4.3.1) bei Verwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes für die numerische Berechnung des Gradienten führt automatisch zur Einhaltung des Stabilitätskriteriums, sodass für diesen Fall keine zusätzlichen inneren Iterationsschritte notwendig sind und $N_j = 1$ bzw. $\Delta t = 1$ angewandt werden kann [Jantos u. a. (2016, 2018)].

4.4. Nebenbedingungen

4.4.1. Intervallbegrenzung

Formal wird die Nebenbedingung für die Intervallgrenzen $\chi \in [\chi_{\min}, 1]$ mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Parameter gemäß Gl. (3.7.10) in das Modell einbezogen. Im Allgemeinen müssen die Kuhn-Tucker-Parameter γ bzw. γ^* eines jeden Diskretisierungspunktes nicht explizit berechnet werden und können innerhalb der Implementation bzw. numerischen Lösung durch eine If-Abfrage bzw. min-max-Funktion

$$\chi^{j+1} = \max \left\{ \chi_{\min}, \min \left\{ 1, \chi^j + \Delta t \dot{\chi}^j \right\} \right\} \quad (4.4.1)$$

ersetzt werden. Bei der Verwendung einer doppelasymptotischen Interpolationsfunktion ρ , d.h. $\partial \rho / \partial \chi \rightarrow 0$ und damit $\tau_\chi \rightarrow 0$ für $\chi \in \{\chi_{\min}, 1\}$, ergeben sich die Intervallgrenzen auf natürliche Weise, sodass der Kuhn-Tucker-Parameter γ bzw. γ^* näherungsweise vernachlässigt werden kann, sodass die analytische Bestimmung des Lagrange-Multiplikators λ möglich ist. Ein solcher Fall wird mit der Interpolationsfunktion gemäß Gl. (3.7.5) im folgenden Abschnitt 4.4.2 im Zusammenhang mit dem Wachstumsansatz nach Jantos u. a. (2016) diskutiert. Bei Anwendung einer streng monoton steigenden Interpolationsfunktion, wie zum Beispiel dem Potenzgesetz gemäß Gl. (3.7.3), kann der Kuhn-Tucker-Parameter nicht vernachlässigt werden und die analytische Bestimmung des Lagrange-Multiplikators λ ist nicht mehr ohne Weiteres möglich. Dementsprechend werden für diesen Fall numerische Lösungsverfahren für den Lagrange-Multiplikator λ angewandt, welche in Abschnitt 4.4.3 diskutiert werden.

4.4.2. Wachstumsansatz

Für die Topologieoptimierungsansätze basierend auf Wachstum nach Jantos u. a. (2016) wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Materialinterpolationsfunktion

$$\rho(\chi) = \left[1 + \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) (1 - \chi)^2 \right]^{-1} \quad (4.4.2)$$

gemäß Gl. (3.7.5) angewandt. Das Zielvolumen sei in der Zeit (d.h. zwischen einzelnen Optimierungsschritten) veränderlich mit $\varrho = \varrho(t)$. Prinzipiell kann eine beliebige Funktion für $\varrho(t)$ vorgegeben werden, um zum Beispiel biologische Wachstumsprozesse in der Zeit zu modellieren. In Jantos u. a. (2016) wurde neben einen Exponentialansatz der *Lagrange-Shift*-Ansatz eingeführt. Hierbei stellte sich der Lagrange-Shift-Ansatz als vorteilhafter gegenüber dem Exponentialansatz heraus, da hier nur ein problemunabhängiger Parameter $\lambda_S \in]0, 1[$ definiert werden muss, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Die Wachstumsfunktion für den Lagrange-

Shift-Ansatz lautet

$$\varrho(t) = \frac{1 - \lambda_S}{\Omega} \int_{\Omega} f(\chi) \, dV \Big|_{\lambda=0} . \quad (4.4.3)$$

Gemäß Gl. (4.4.3) ergibt sich das Zielvolumen ϱ aus dem Strukturvolumen durch freies Wachstum, d.h. eine Evolution ohne Restriktion mit $\lambda = 0$, multipliziert mit einem Vorfaktor

$$1 - \lambda_S \in]0, 1[. \quad (4.4.4)$$

Wie in Abschnitt 4.4.1 beschrieben, kann dank der dopelasymptotischen Eigenschaft der Interpolationsfunktion (4.4.2) der Kuhn-Tucker-Parameter γ für die Bestimmung des Lagrange-Multiplikators λ näherungsweise vernachlässigt werden. Damit ergibt sich für die zeitliche Ableitung der Nebenbedingung (3.7.11)

$$\dot{l}(\chi) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} \, dV - \dot{\varrho} \, \Omega = 0 \quad (4.4.5)$$

mit

$$\dot{\varrho} = \frac{1 - \lambda_S}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} \, dV \Big|_{\lambda=0} . \quad (4.4.6)$$

Dementsprechend stellt sich ein Wachstumsverhalten zwischen einem freien Wachstum mit $\lambda_S \rightarrow 0$ und einem konstant gehaltenen Strukturvolumen mit $\dot{\varrho} \rightarrow 0$ für $\lambda_S \rightarrow 1$ ein. Bei Verwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes für die Berechnung des Gradienten der DichtevARIABLE in der schwachen Form der Variation gemäß Gl. (3.7.25) und Vernachlässigung des Kuhn-Tucker-Parameters γ ergibt sich durch Einsetzen der Evolutionsgleichung gemäß Gl. (4.2.17) der Ausdruck [Jantos u. a. (2016)]

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \left(\tau_{\chi} - \beta \widetilde{\nabla \chi} \right) \frac{\partial f}{\partial \chi} \, dV - \eta \dot{\varrho} \, \Omega}{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi} \right)^2 \, dV} . \quad (4.4.7)$$

Hierbei sollte bei der expliziten Vorgabe einer Wachstumsfunktion $\varrho(t)$ die Zeitdiskretisierung

$$\dot{\varrho} = \frac{\varrho(t^{j+1}) \, \Omega - \int_{\Omega} f(\chi^j) \, dV}{\Delta t} \quad (4.4.8)$$

angewandt werden, um Rundungsfehler innerhalb der numerischen Lösung zu vermeiden. Für den Lagrange-Shift-Ansatz ergibt sich mit

$$\dot{\varrho} = \frac{1 - \lambda_S}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \chi} \, dV \Big|_{\lambda=0} \quad (4.4.9)$$

nach Vereinfachung der Terme in Gl. (4.4.7) der Lagrange-Multiplikator für den Lagrange-

Shift-Ansatz zu

$$\lambda = \lambda_S \frac{\int_{\Omega} \left(\tau_{\chi} - \beta \widetilde{\nabla \chi} \right) \frac{\partial f}{\partial \chi} dV}{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi} \right)^2 dV}. \quad (4.4.10)$$

Wachstumsansätze können prinzipiell interessant für Anwendungen in der Biomechanik sein, da hier biologische bzw. physikalische Wachstumsfunktionen $\varrho(t)$ angewandt werden können um entsprechende Prozesse in der Zeit abzubilden. Für die technische Anwendung kann ein Wachstumsansatz jedoch nachteilig sein, da hier üblicherweise nur die „Schwarz-Weiß“-Lösung für das Endergebnis der Struktur mit vorgegebenen Zielvolumen von Interesse ist. Etwaige Zwischenlösungen für „Schwarz-Weiß“-Strukturen mit einem von dem Zielvolumen abweichenden Strukturvolumen, deren Berechnung je nach Wachstumsgeschwindigkeit zu einer Erhöhung der Anzahl an Iterationsschritten führen kann, sind i.d.R. nicht relevant. Prinzipiell kann der hier gezeigte Wachstumsansatz mit $\varrho(t) = \text{konstant}$ in Gl. (4.4.8) bzw. mit $\lambda_S = 1$ ebenfalls ein Modell mit konstantem Strukturvolumen abbilden. Nach Jantos u. a. (2016) wird für die Volumen Nebenbedingung gemäß Gl. (3.7.11) $f(\chi) = \rho(\chi)$ angewandt. Dadurch werden Zwischendichten $\chi \in]\chi_{\min}, 1[$ nicht direkt bestraft und nur während des Wachstumsprozesses unterdrückt: Hierbei wird der Struktur mit jedem Iterationsschritt voll ausgebildeten Material ($\chi = 1$) in Bereichen ohne Material ($\chi = \chi_{\min}$) hinzugefügt, sodass größere Bereiche mit Zwischendichten gar nicht erst auftreten⁸. Dementsprechend werden im Rahmen dieser Arbeit die Anfangsbedingungen $\chi^0(\mathbf{x}) = \chi_{\min} \forall \mathbf{x} \in \Omega$ in Kombination mit dem Lagrange-Shift-Ansatz für ein Wachstum angewandt, bis das Strukturvolumen das gewünschte Zielvolumen erreicht. Erst in den darauffolgenden Iterationsschritten wird das Strukturvolumen $\varrho(t)$ gemäß Gl. (4.4.8) konstant gehalten.

4.4.3. Konstantes Strukturvolumen (SIMP)

Die Vorgabe des Strukturvolumens ϱ als konstante Größe ist in sofern sinnvoll, da so keine zusätzlichen Parameter für die Definition der Strukturvolumenänderung innerhalb der Zeit bzw. der Iterationsschritte definiert werden müssen, welche bei ungünstiger Wahl zu einer Erhöhung der benötigten Iterationsschritte führen könnten. Üblicherweise wird hierbei als Anfangsbedingung für die DichtevARIABLE eine homogene Verteilung $\chi^0(\mathbf{x}) = \varrho \forall \mathbf{x} \in \Omega$ angenommen, welche mit $f(\chi) = \chi$ die Volumen Nebenbedingung (3.7.11) identisch erfüllt, sodass das Zielvolumen während des gesamten Optimierungsprozesses eingehalten werden kann. Folglich entsprechen die Lösungen eines jeden Iterationsschrittes der vorgegebenen Volumen Nebenbedingungen und es werden keine „unbrauchbaren“ Lösungen mit abweichendem Zielvolumen berechnet. Allerdings führt die homogene Anfangsbedingung für die DichtevARIABLE zu einem völlig mit Zwischendichte gefüllten Designraum, was wiederum aus technischer Sicht unerwünscht ist. Um Zwischendichten effektiv zu bestrafen und diskrete „Schwarz-Weiß“-Lösungen zu erhalten, wird ein SIMP-Ansatz mit $f(\chi) = \chi$ und dem Potenzgesetz $\rho(\chi) = \chi^p$ gemäß Gl. (3.7.3) mit $p = 3$ angewandt (siehe [Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003); Jantos u. a. (2019a)] und Abschnitt 2.4). Damit ergibt sich eine streng monoton steigende Interpolationsfunktion $\rho(\chi)$, wodurch übermäßiges Wachstum, d.h. $\tau_{\chi} > 0$ für $\chi = 1$, nicht automatisch gestoppt wird, sodass die Nebenbedingung für die Intervallgrenzen explizit eingehalten werden muss. Dementsprechend

⁸Aufgrund der Regularisierung basierend auf der Bestrafung des Gradienten der DichtevARIABLE kommt es immer zu Übergangszonen mit Zwischendichten.

kann der Kuhn-Tucker-Parameter γ bei der Bestimmung des Lagrange-Multiplikators λ nicht vernachlässigt werden, sodass eine analytische Lösung nicht trivial bzw. unmöglich ist. Daher werden der Lagrange-Multiplikator und der Kuhn-Tucker-Parameter üblicherweise mit Hilfe numerischer Lösungsansätze bestimmt.

Da die Volumen Nebenbedingung (3.7.11) mit $f(\chi) = \chi$ linear und somit streng monoton steigend in χ ist, kann ein Bisektionsalgorithmus zur Berechnung des Lagrange-Multiplikators unter Verwendung der min-max-Funktion zur Einbeziehung der Intervallbegrenzung angewandt werden [Sigmund (2001a)]. Dabei wird der Kuhn-Tucker-Parameter γ durch die min-max-Funktion vollständig ersetzt. Algorithmus 4.1 beschreibt eine mögliche Umsetzung nach Jantos u. a. (2019a). Hierbei werden die untere Schranke $\underline{\lambda}$ und obere Schranke $\bar{\lambda}$ des Lagrange-Multiplikators nicht willkürlich gewählt, sondern an die beiden möglichen Extremfälle angepasst, wodurch die Anzahl an Bisektionsschritten auf ein sinnvolles Minimum reduziert werden kann. Für die untere Grenze $\underline{\lambda}$ wird folgendes angenommen: Der Lagrange-Multiplikator λ nimmt einen solch kleinen Wert $\underline{\lambda}$ an, dass selbst in dem diskretisierten Punkt, in welchem die Triebkräfte mit $\min\{\tau_{\chi}^j + \beta \nabla^2 \chi^j\}$ am kleinsten sind, die DichtevARIABLE vollständig von $\chi^j = 0$ auf $\chi^{j+1} = 1$ erhöht werden würde, sodass die Beziehung

$$\chi^{j+1} - \chi^j = \Delta t \dot{\chi} = \frac{\Delta t}{\eta} (\min\{\tau_{\chi}^j + \beta \nabla^2 \chi^j\} - \underline{\lambda}) = 1 \quad (4.4.11)$$

gilt, welche im Algorithmus 4.1 in Zeile 2 eingepflegt ist. Für die obere Grenze $\bar{\lambda}$ wird angenommen: Der Lagrange-Multiplikator λ nimmt einen solch großen Wert $\bar{\lambda}$ an, dass selbst in dem diskretisierten Punkt, in welchem die Triebkräfte mit $\max\{\tau_{\chi}^j + \beta \nabla^2 \chi^j\}$ am größten sind, die DichtevARIABLE vollständig von $\chi^j = 1$ auf $\chi^{j+1} = 0$ reduziert werden würde, sodass die Beziehung

$$\chi^{j+1} - \chi^j = \Delta t \dot{\chi} = \frac{\Delta t}{\eta} (\max\{\tau_{\chi}^j + \beta \nabla^2 \chi^j\} - \bar{\lambda}) = -1 \quad (4.4.12)$$

gilt, welche im Algorithmus 4.1 in Zeile 3 eingepflegt ist.

Algorithmus 4.1: Optimierungsschritt mit Berechnung des Lagrange-Multiplikators λ mit Hilfe eines Bisektionsalgorithmus. Der Kuhn-Tucker-Parameter γ aus Gl. (3.7.31) wird bei der Auswertung der Evolutionsgleichung in Zeile 6 nicht explizit berechnet und durch die min-max-Funktion in Zeile 7 ersetzt.

gegeben: ϱ , Δt , η , β , χ^j , τ_χ^j und $\nabla^2 \chi^j$;

```

1   $\lambda_{\text{trial}} = 0$ ;
2   $\underline{\lambda} = \min\{\tau_\chi^j + \beta \nabla^2 \chi^j\} - \frac{\eta}{\Delta t}$ ;
3   $\bar{\lambda} = \max\{\tau_\chi^j + \beta \nabla^2 \chi^j\} + \frac{\eta}{\Delta t}$ ;
4  tue
5      für jedes  $\chi(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega$  tue
6           $\Delta \chi = \frac{\Delta t}{\eta} (\tau_\chi^j - \lambda_{\text{trial}} + \beta \nabla^2 \chi^j)$ ;
7           $\chi_{\text{trial}} = \max\{\chi_{\min}, \min\{1, \Delta \chi + \chi^j\}\}$ ;
8       $\varrho_{\text{trial}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \chi_{\text{trial}} \, dV$ ;
9      wenn  $\varrho_{\text{trial}} > \varrho$  dann
10          $\underline{\lambda} = \lambda_{\text{trial}}$ ;
11      sonst
12          $\bar{\lambda} = \lambda_{\text{trial}}$ ;
13          $\lambda_{\text{trial}} = \frac{1}{2}(\bar{\lambda} + \underline{\lambda})$ ;
14 solange  $|\varrho_{\text{trial}} - \varrho| > 10^{-7}$ ;
15  $\chi^{j+1} = \chi_{\text{trial}}$ ;
```

5. Numerische Ergebnisse

5.1. Randbedingungen

Abbildung 5.1.1 bis 5.1.5 zeigen die im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausgewerteten mechanischen Randwertprobleme. Hierbei ist die Richtung der ersten, d.h. betragsmäßig größten, Hauptspannungsrichtung dargestellt, welche sich aus einer homogenen Dichteverteilung und isotropen Material ergeben und für die Anfangsbedingungen der simultanen Optimierung der Topologie und lokalen Materialorientierung, welche später in Abschnitt 7 bzw. 7.4.3 diskutiert wird, verwendet werden. Der Fokus der numerischen Beispiele liegt auf den im vorliegenden Abschnitt gezeigten zweidimensionalen Standardbeispielen aus der Literatur, welche zur Untersuchung des Modells bezüglich Netzunabhängigkeit, Konvergenzverhalten und Parameterstudien dienen. Weitere demonstrative Randwertprobleme werden in den jeweiligen Abschnitten beschrieben, wie beispielsweise ein Brückenrandwertproblem sowie ein Schwenklager in Abschnitt 5.3.8.

Abbildung 5.1.1 und 5.1.2 zeigen einen L-förmigen abgewinkelten und einen quaderförmigen Balken, welche einseitig fest eingespannt sind und am freien Ende mit einer Einzellast belastet werden. Die Randbedingungen für den Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB) Balken sind in Abb. 5.1.3 gegeben, welcher auf der Unterseite auf einer Seite mit einem Festlager und auf der gegenüberliegenden Seite mit einem Loslager gelagert ist sowie durch einer mittig angreifenden Einzellast auf der Oberseite belastet wird. Die Randbedingungen für den beidseitig eingespannten Balken mit einer Einzellast in der Mitte sind in Abb. 5.1.4 gegeben. Abbildung 5.1.5 zeigt dreidimensionale, symmetrische Biegeprobleme, welche durch eine einseitige Einspannung bzw. Vier-Punkt-Lagerung und am gegenüberliegenden freien Ende angreifenden Linienlast bzw. Einzellast definiert sind.

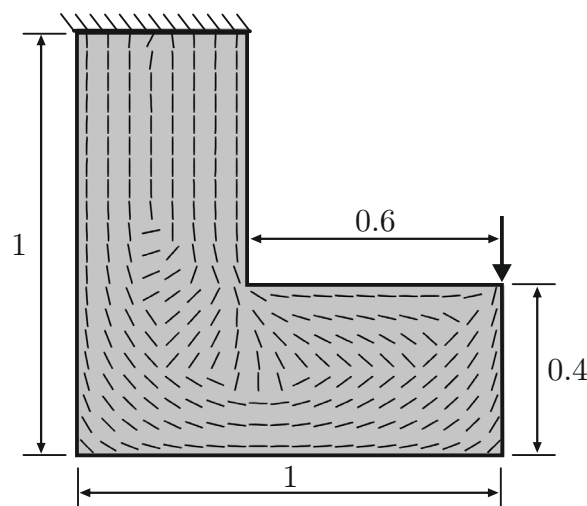


Abbildung 5.1.1.: Randbedingungen für den abgewinkelten Balken inklusive der Richtung der ersten Hauptspannung.

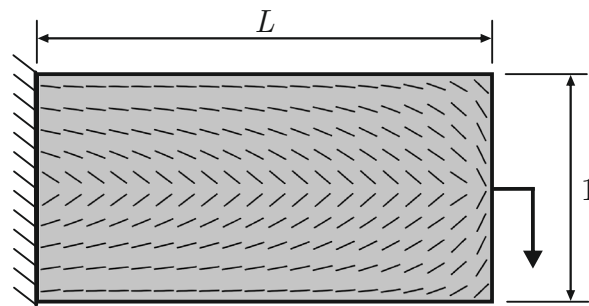


Abbildung 5.1.2.: Randbedingungen für den Biegebalken inklusive der Richtung der ersten Hauptspannung.

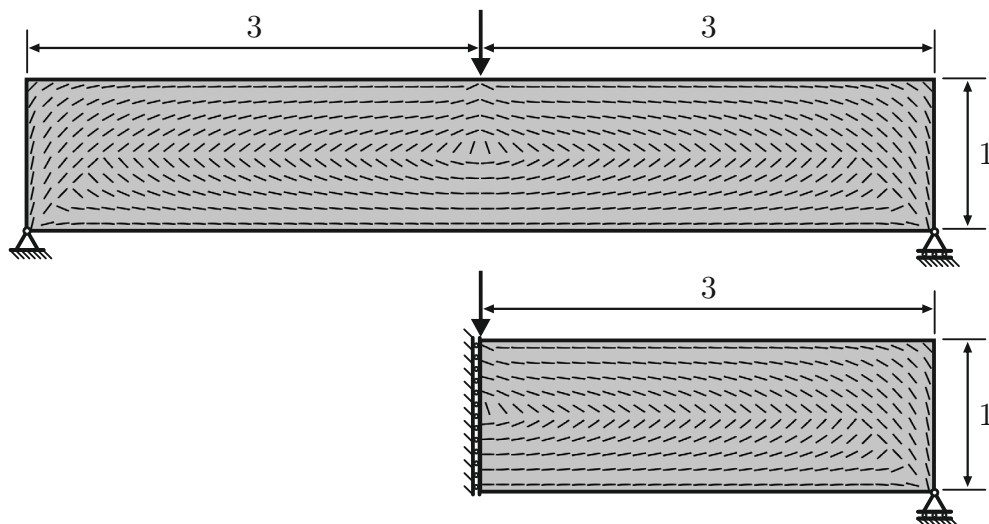


Abbildung 5.1.3.: Randbedingungen für den Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB) Balken sowie äquivalentem Problem mit halbem Designraum und Symmetrierandbedingungen inklusive der Richtung der ersten Hauptspannung.

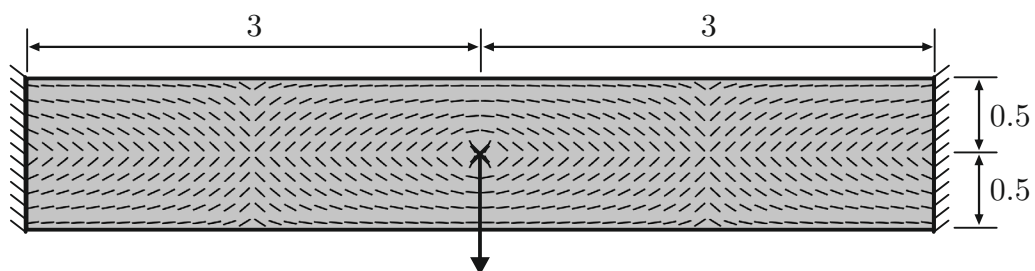


Abbildung 5.1.4.: Randbedingungen für den doppelseitig eingespannten Balken inklusive der Richtung der ersten Hauptspannung.

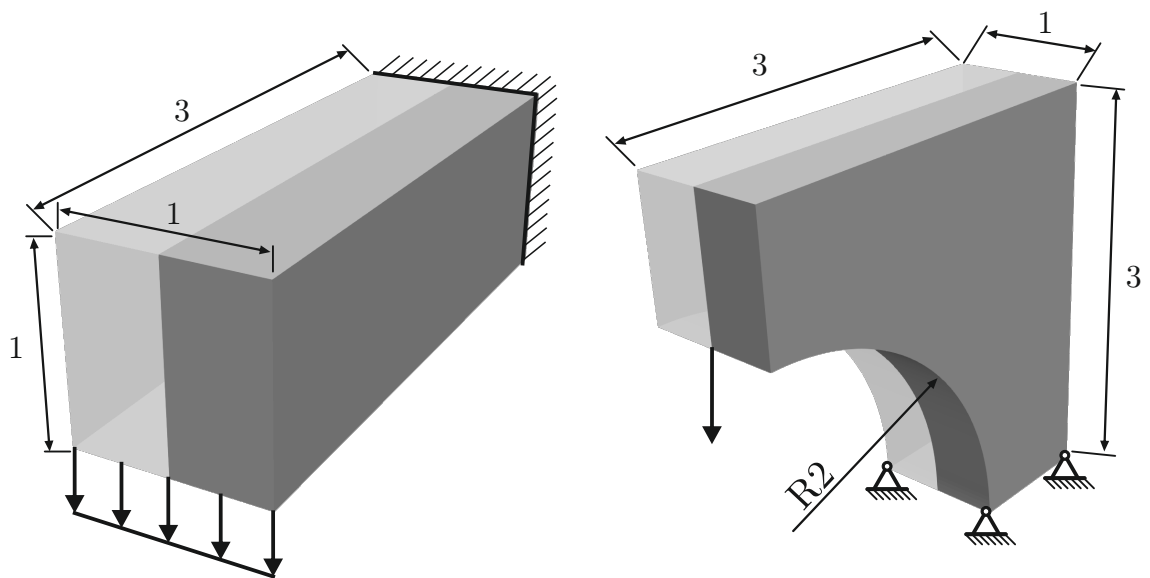


Abbildung 5.1.5.: Randbedingungen für dreidimensionale Biegeprobleme. Die Symmetriehälfte ist ausgegraut.

5.2. Wachstum mit diskontinuierlichem Galerkin Ansatz

5.2.1. Numerische Parameter und Beziehungen

Für die TTO basierend auf dem Wachstumsansatz nach Jantos u. a. (2016) werden folgende Beziehungen und Parameter angewandt:

- ▶ Hooke'sche Gesetz für $\mathbb{E}_0$ mit Elastizitätsmodul $E_0 = 2 \times 10^5$ und Querkontraktionszahl $\nu_0 = 0.3$
- ▶ quadratische Mischung der Nachgiebigkeiten für die Materialinterpolation $\rho(\chi)$ gemäß Gl. (3.7.5) mit $\rho_{\min} = \kappa = 5 \times 10^{-3}$
- ▶ Volumen Nebenbedingung gemäß Gl. (3.7.11) mit dem Lagrange-Shift-Ansatz nach Gl. (4.4.3) mit $f(\chi) = \rho(\chi)$. Bei Vorgabe eines Zielvolumens ϱ wird die Volumen Nebenbedingung gemäß Gl. (4.4.8) mit $\varrho(t^{i+1}) = \varrho = \text{konstant}$ angewandt, sobald das entsprechende Zielvolumen während des Wachstumsprozesses erreicht wurde
- ▶ Dissipationsfunktion Φ gemäß Gl. (3.7.15) mit der Viskosität η gemäß Gl. (4.3.1)
- ▶ schwache Form der Variation gemäß Gl. (3.7.25).

Für die numerische Lösung werden folgende Beziehungen und Parameter angewandt:

- ▶ DichtevARIABLE ist in den Integrationspunkten diskretisiert $\chi \rightarrow \tilde{\chi}$
- ▶ diskontinuierlicher Galerkin Ansatz zur Bestimmung des Gradienten der DichtevARIABLE gemäß Abschnitt 4.2.2
- ▶ Regularisierungsparameter β gemäß Gl. (4.2.39)
- ▶ Berechnung des Lagrange-Multiplikators λ gemäß Gl. (4.4.10) mit $\lambda_S = 0.9$
- ▶ Optimierungsschritt mit Hilfe der expliziten Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (4.2.19)
- ▶ Triebkräfte der DichtevARIABLE $\tilde{\tau}_\chi$ werden somit gemäß Gl. (4.2.1) berechnet
- ▶ die Optimierung gilt bei Vorgabe eines Zielvolumens ϱ als konvergiert, sobald eines der beiden Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ bzw. Gl. (4.1.32) mit $\Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} = 10^{-2}$ erfüllt ist.

Die Topologie wird mittels Graustufen über $\rho(\chi) \in [\kappa, 1]$ abgebildet, wobei schwarz Vollmaterial ($\rho = 1$) und weiß die Abwesenheit von Material ($\rho = \kappa$) darstellt. Die Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ eines jeden Iterationsschrittes $t = t^i$ ist (falls nicht anders angegeben) gegeben durch die Inverse der Zielfunktion $\mathcal{Z}$ gemäß Gl. (4.1.31) normiert und auf den Wert Zielfunktion $\mathcal{Z}^0$ gegeben durch die homogene Anfangsbedingung $\rho = \kappa \forall \mathbf{x} \in \Omega$:

$$\mathcal{S} = \left[\frac{\mathcal{Z}^i}{\mathcal{Z}^0} \right]^{-1}. \quad (5.2.1)$$

5.2.2. Evolution der Topologie

Zunächst wird die Evolution der Struktur anhand des abgewinkelten Balkens (Abb. 5.1.1) untersucht, wobei neben einem freien Wachstum die Zielvolumina $\varrho = \{25, 35, 50\}\%$ vorgegeben sind. Abbildung 5.2.1 zeigt die Entwicklung bzw. das Wachstum des Strukturvolumens ϱ in der Zeit bzw. Iterationsschritte. Für die entsprechenden Fälle ist die Entwicklung der Struktursteifigkeit S in Abb. 5.2.2 gegeben. Abbildung 5.2.3 zeigt die Entwicklung der Topologie in den ersten Schritten des Wachstumsprozesses sowie Abb. 5.2.4 die Topologien bei erstmaligen Erreichen des Zielvolumens sowie die konvergierten Endergebnisse bei konstant gehaltenem Strukturvolumen ϱ .

Das Wachstum beginnt üblicherweise an Orten mit Spannungsüberhöhungen, d.h. der Lagerung, dem Krafteinleitungspunkt und der Singularität in der Ecke des Designraumes (siehe auch Abb. 5.2.7). Es bilden sich Wachstumsfronten, welche sich aufeinander zu bewegen und zu einer geschlossenen Tragwerksstruktur zusammen wachsen. Im weiteren Verlauf nimmt die Dicke der feinen Balken weiter zu, während die Topologiekategorie sich nicht ändert. Mit Vollmaterial ausgebildete Bereiche werden während des Wachstumsprozesses nicht entfernt bzw. die Dichte wird lokal nicht verringert. Wird das Strukturvolumen konstant gehalten, kann die Dichte lokal abnehmen, sodass sich die Form der Struktur verändert. Die Formänderungen scheinen optisch zwar nur unwesentlich zu sein, jedoch zeigen die Graphen einen deutlichen Anstieg der Struktursteifigkeit bis diese zu einem konstanten Wert konvergiert.

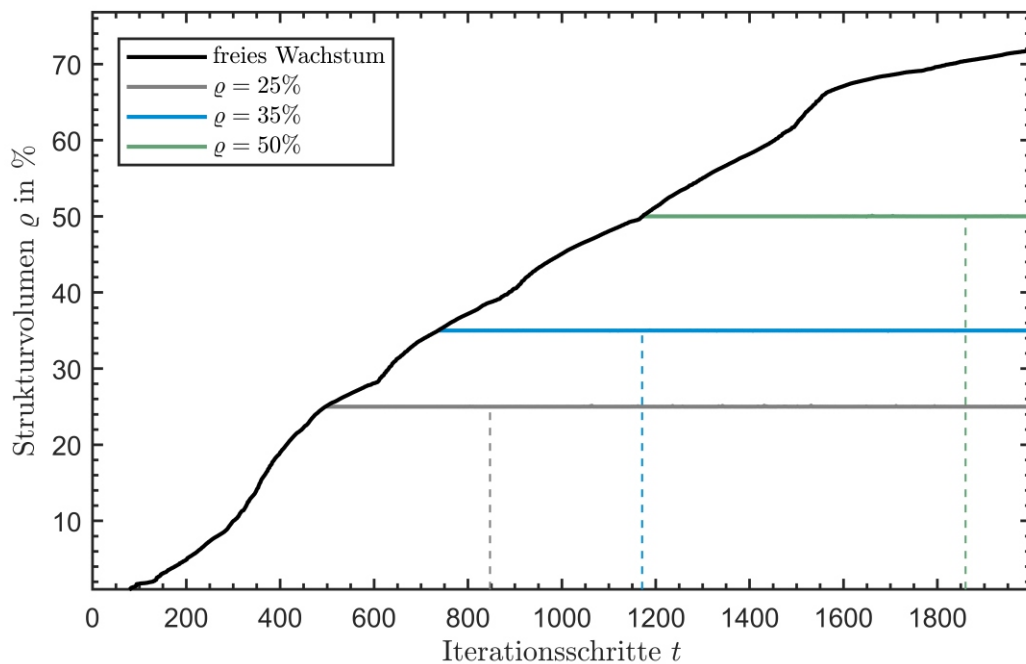


Abbildung 5.2.1.: Entwicklung des Strukturvolumens während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 5.2.3 und Abb. 5.2.4 für unterschiedliche Zielvolumina ϱ . Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmalig) erfüllt wurde.

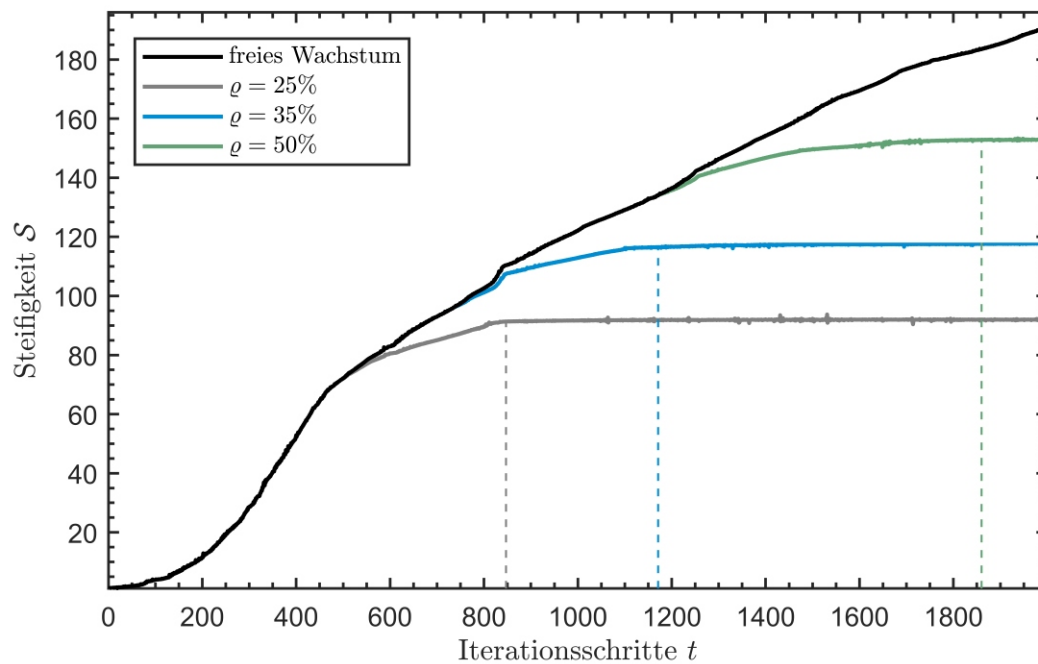


Abbildung 5.2.2.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 5.2.3 und 5.2.4 mit unterschiedlichen Zielvolumina ϱ . Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

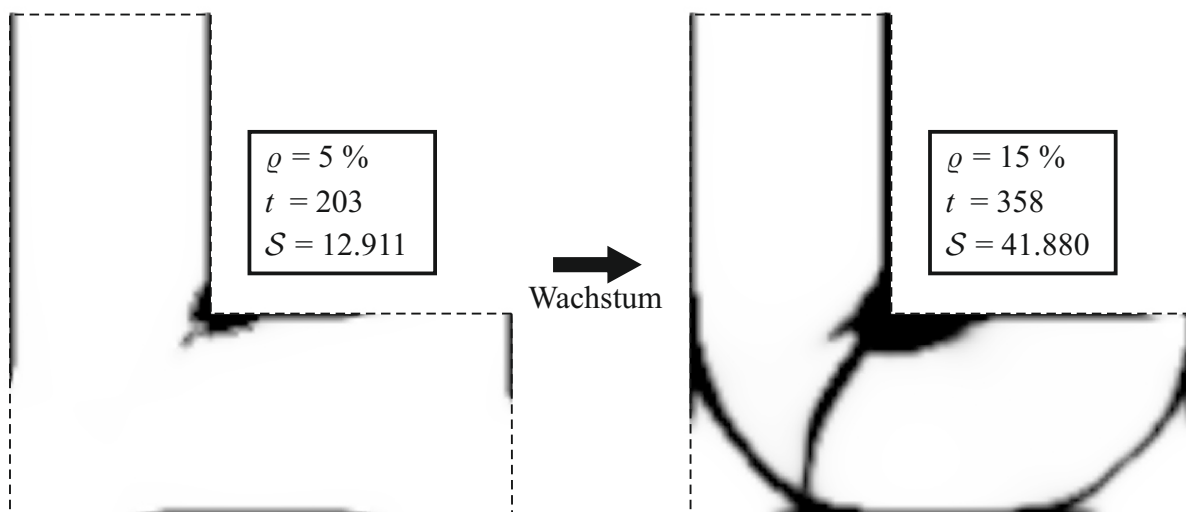


Abbildung 5.2.3.: Wachstum der Struktur in den ersten Iterationsschritten für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1).

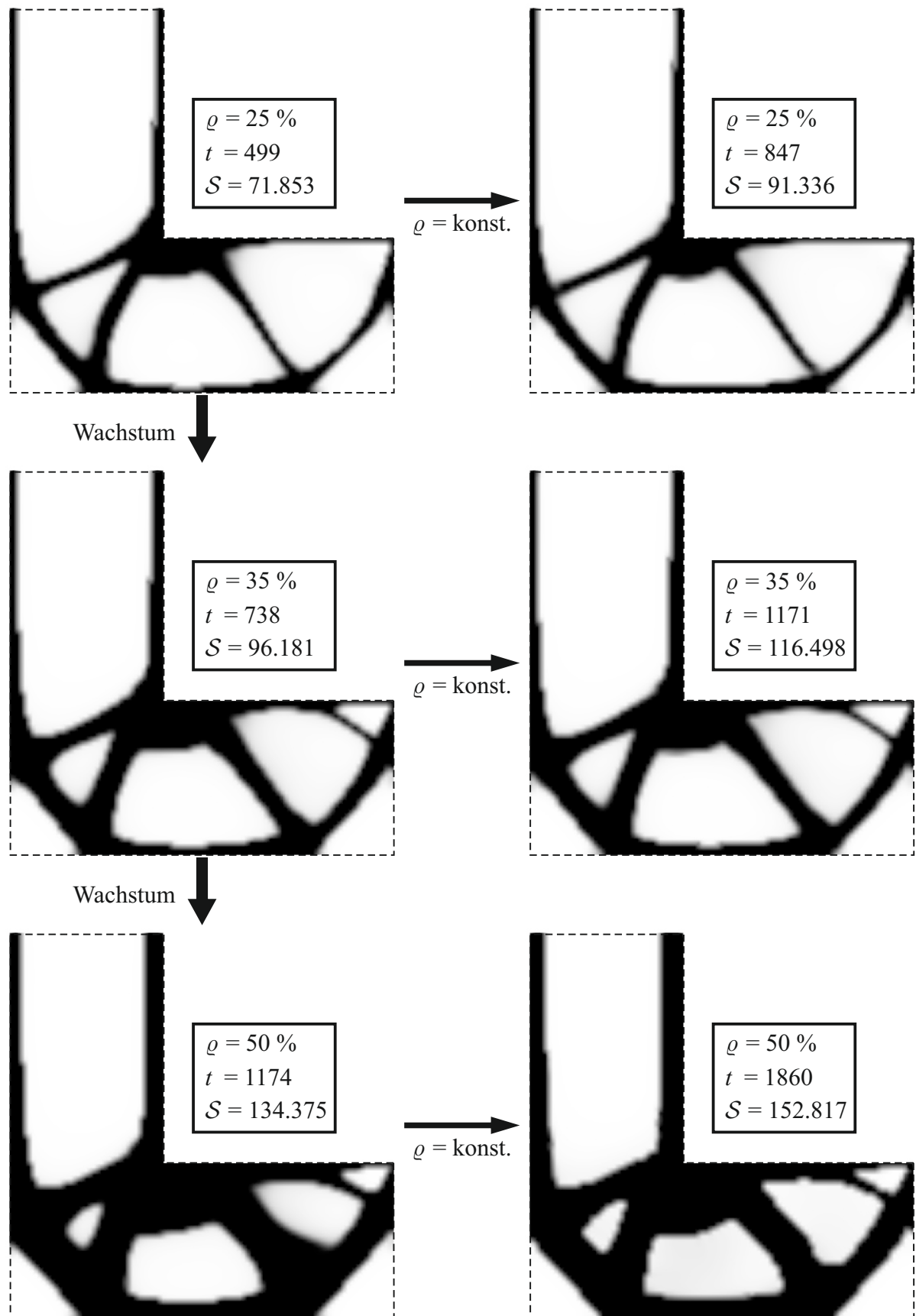


Abbildung 5.2.4.: Voranschreitendes Wachstum sowie konstant halten des Strukturvolumens für ausgewählte Werte ϱ .

5.2.3. Netzunabhängigkeit

Im Folgenden wird die Netzunabhängigkeit der Ergebnisse anhand des MBB-Balkens (Abb. 5.1.3) sowie anhand des Biegebalkens (Abb. 5.1.2) untersucht. Die Abbildungen 5.2.5 und 5.2.6 zeigen jeweils die Struktursteifigkeit S in Abhängigkeit des Strukturvolumens ϱ für unterschiedlich feine Netze. Die entsprechenden Topologien für ein Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ sind in Abb. 5.2.8 und 5.2.9 dargestellt. Des Weiteren ist die Evolution der Struktur während des Wachstumsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 5.2.7 für zwei unterschiedlich feine Diskretisierungen gegeben.

Vor allem der Kurvenverlauf der Steifigkeit $S(\varrho)$ für die jeweils größte Vernetzung weisen Schwankungen auf und sind nicht glatt. Insgesamt zeigen jedoch sämtliche Kurven einen ähnlichen Verlauf und weichen nicht voneinander ab. Die Topologie für den Biegebalken mit der groben Vernetzung mit 40×20 ist nicht klar erkennbar, sodass die Auflösung der Diskretisierung für das gegebene Randwertproblem unzureichend ist. Alle weiteren Topologien stimmen qualitativ überein und quantitativ betrachtet ergibt sich eine Abweichung der Struktursteifigkeit S von maximal 5% bei hinreichend feiner Diskretisierung. Folglich lassen sich die Ergebnisse als hinreichend netzunabhängig bezeichnen, sofern eine gewisse Mindestauflösung durch eine entsprechend feine Diskretisierung bzw. Vernetzung gegeben ist.

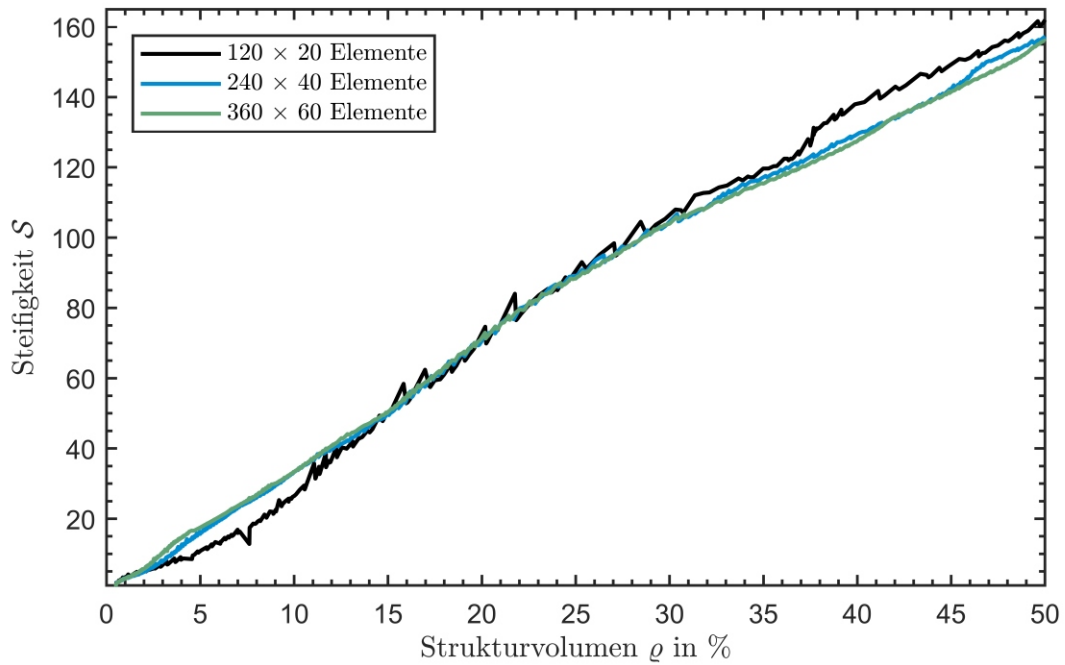


Abbildung 5.2.5.: Struktursteifigkeit in Abhängigkeit des Strukturvolumens für den MBB-Balken in Abb. 5.2.7 und 5.2.8 für unterschiedlich feine Netze.

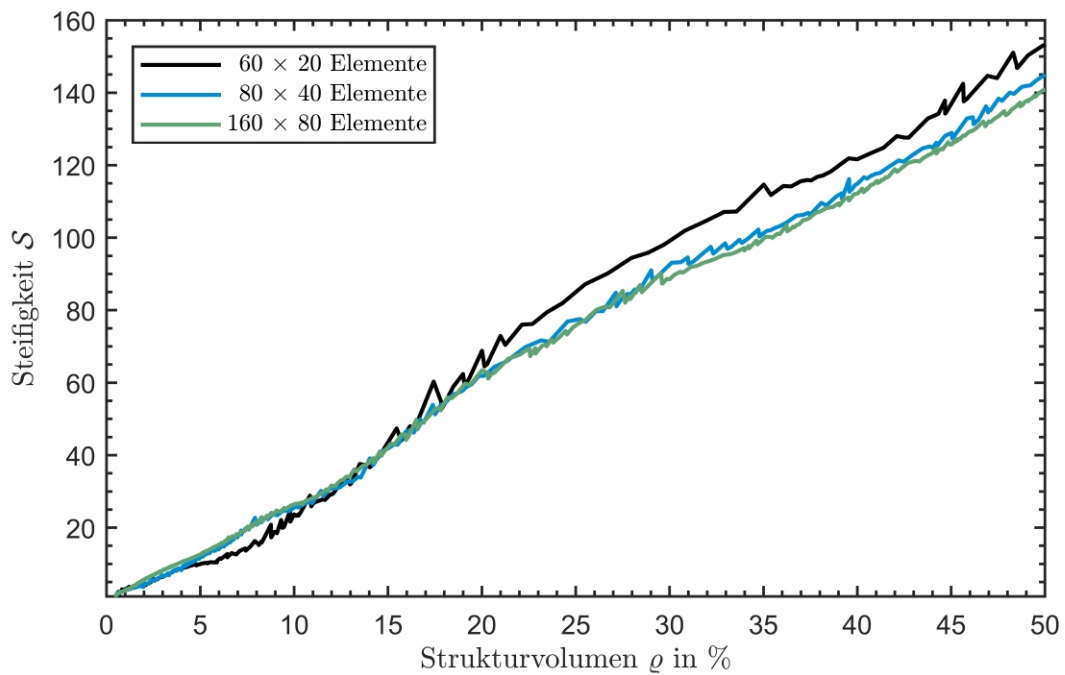


Abbildung 5.2.6.: Struktursteifigkeit in Abhängigkeit des Strukturvolumens für den Biegebalken in Abb. 5.2.9 für unterschiedlich feine Netze.

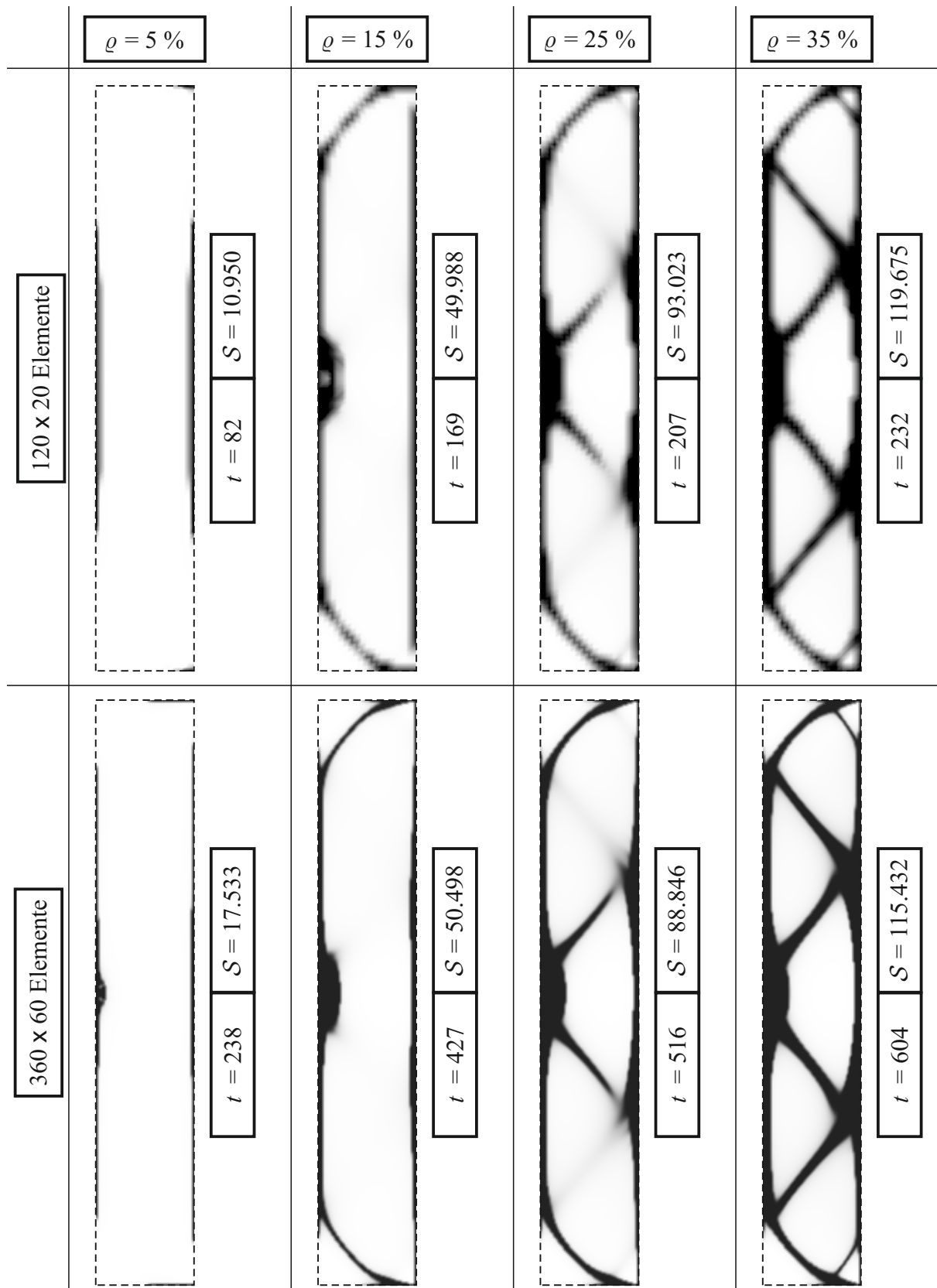


Abbildung 5.2.7.: Evolution der Struktur für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für zwei unterschiedlich feine Netze.

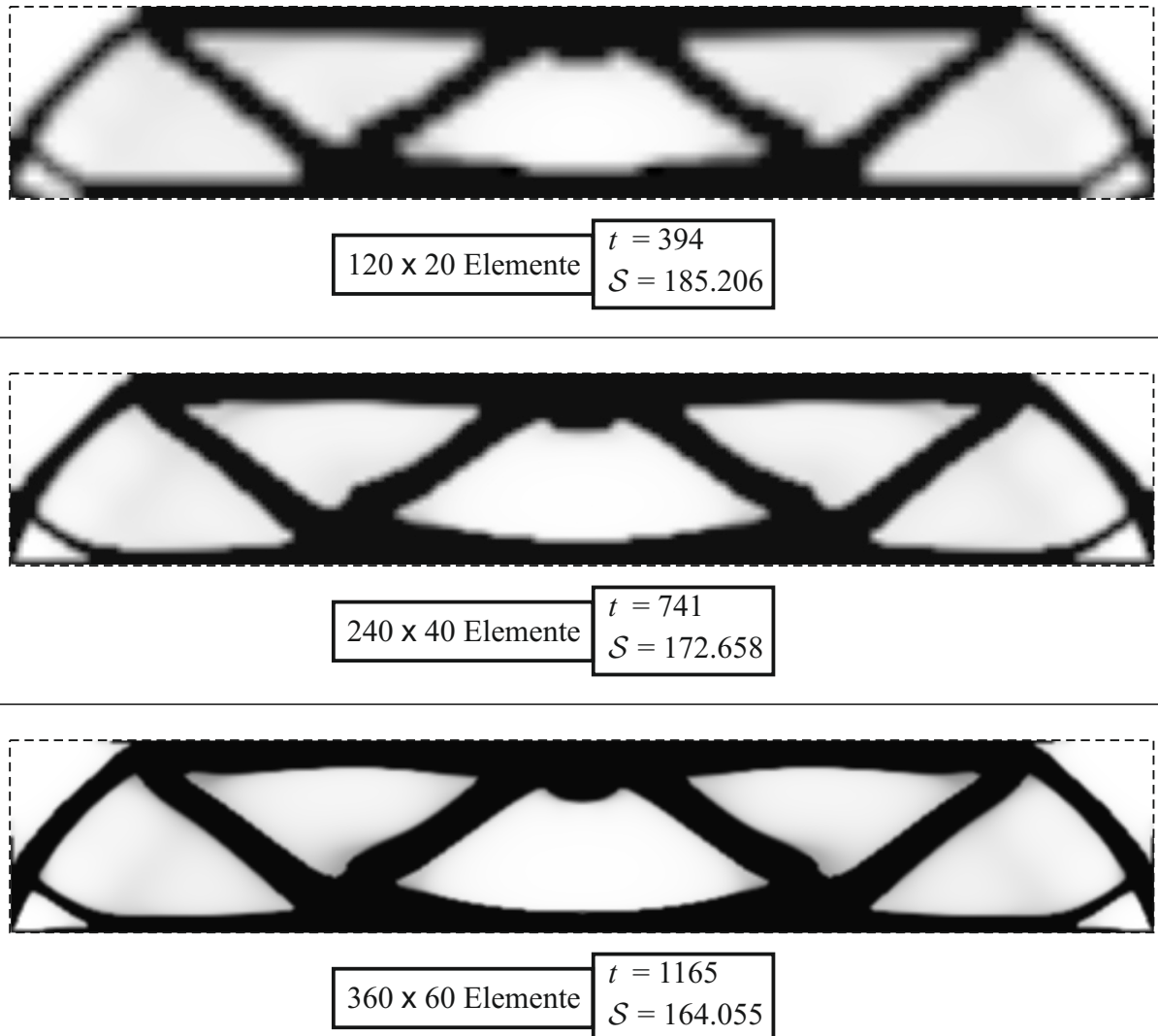


Abbildung 5.2.8.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für ein vorgegebenes Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ und unterschiedlich feine Netze.



40 x 20 Elemente

$t = 357$

$S = 167.374$



80 x 40 Elemente

$t = 470$

$S = 160.714$



160 x 80 Elemente

$t = 609$

$S = 155.996$

Abbildung 5.2.9.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) für ein vorgegebenes Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ und unterschiedlich feine Netze.

5.2.4. Dreidimensionaler Fall

Abbildung 5.2.10 zeigt die Entwicklung der Struktur für den dreidimensionalen Biegebalken (Abb. 5.1.5). Es wird jeweils die Isofläche für die DichtevARIABLE mit Wert $\chi = 0.5$ dargestellt.

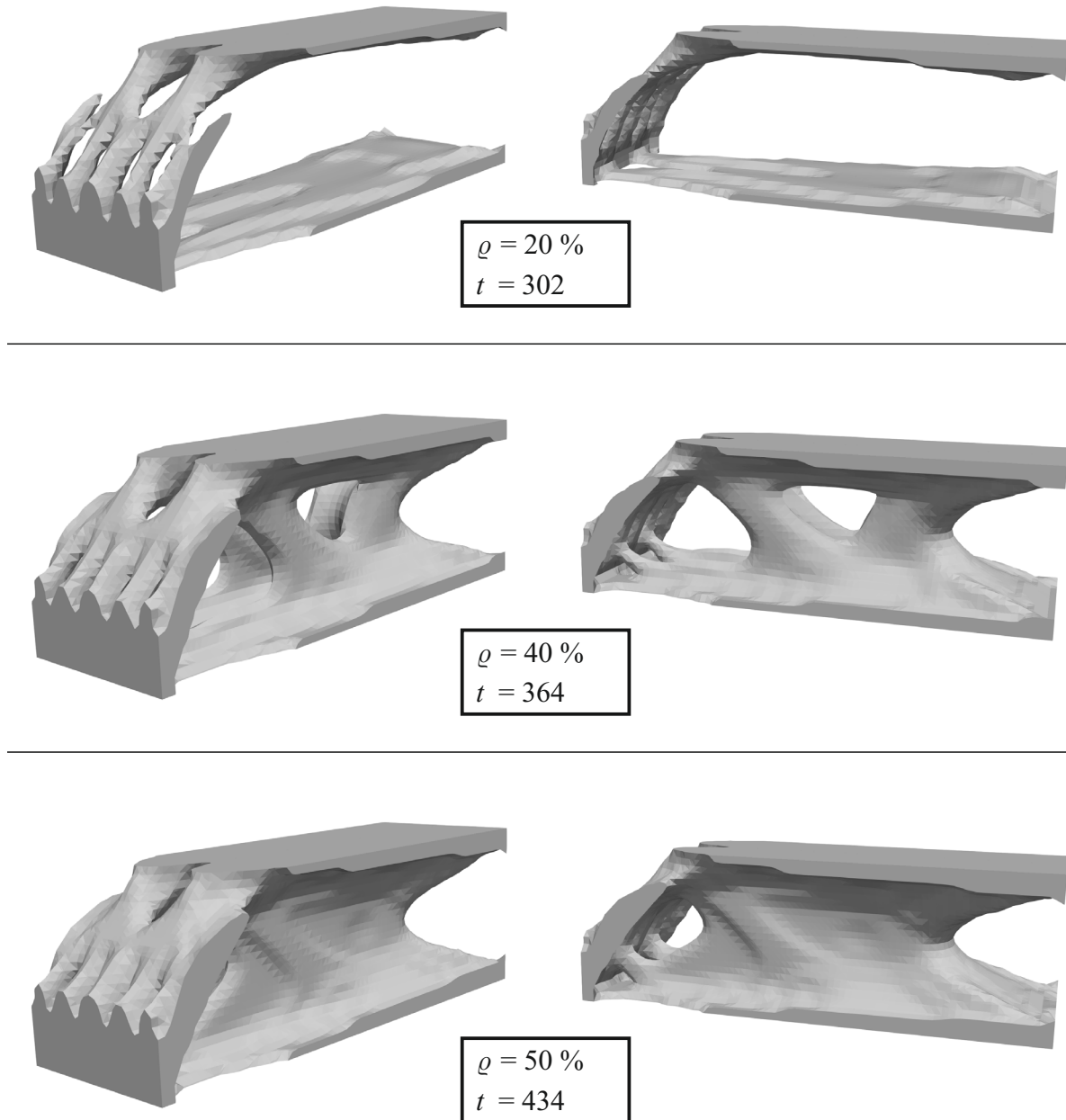


Abbildung 5.2.10.: Ergebnisse für den dreidimensionalen Biegebalken (Abb. 5.1.5) für unterschiedliche Strukturvolumina ϱ mit je zwei Ansichten. Netz mit $72 \times 24 \times 24$ Elementen.

5.2.5. Zusammenfassung

Die präsentierten numerischen Beispiele zeigen, dass bei hinreichend feiner Diskretisierung und hinreichendem Strukturvolumen die Regularisierung basierend auf dem diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz in Kombination mit dem Lagrange-Shift-Wachstumsansatz zu netzunabhängigen Ergebnissen führt. Bei Verwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes werden Oszillationen der Dichte χ nur zwischen Datenpunkten innerhalb eines jeden finiten Elementes unabhängig von der Dichte benachbarten finiten Elementen bestraft. Damit können im Gegensatz zum kontinuierlichen Galerkin-Ansatz die Evolutionsgleichungen elementweise entkoppelt werden, sodass der Rechenaufwand stark reduziert werden kann (siehe Junker u. Hackl (2016b)). *Checkerboarding* wird erfolgreich unterdrückt, ohne dass (im Gegensatz zu klassischen Filtertechniken) eine charakteristische Länge definiert wird.

Grundsätzlich könnten sich dennoch netzabhängige Ergebnisse ergeben, beispielsweise durch minimalistische Balken, wie bei der Verwendung sogenannter *patch formations* oder Super-Elemente [Bendsøe (1995)]. Erst durch die Kombination mit einem Wachstumsansatz ergeben sich netzunabhängige Ergebnisse: Bei relativ kleiner Netzweite können sich zwar zu Beginn der Optimierung entsprechend feine Segmente bzw. minimalistische Balken ausprägen, diese werden jedoch im weiteren Simulationsverlauf über klar definierte Wachstumsfronten weiter ausgebaut, welche frei von numerischen Artefakten durch Mikrostrukturen sind, d.h. ohne Checkerboarding oder breite Übergangszonen mit Zwischendichten. Dementsprechend nimmt beispielsweise die Dicke von Balkensegmenten zu, sodass keine minimalistischen Balken bestehen bleiben. Sofern das Strukturvolumen hinreichend kleinschrittig erhöht wird, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit hinreichend klein ist, ergeben sich für hinreichend große Strukturvolumina netzunabhängige Ergebnisse. Der Lagrange-Shift-Ansatz steuert entsprechend die Wachstumsgeschwindigkeit, sodass diese hinreichend klein genug ist.

5.3. Konstantes Strukturvolumen mit NPM

5.3.1. Numerische Parameter und Beziehungen

Für die TTO basierend auf dem SIMP-Ansatz nach Jantos u. a. (2019a) werden folgende Beziehungen und Parameter angewandt¹:

- ▶ Hooke'sche Gesetz für $\mathbb{E}_0$ mit Elastizitätsmodul $E_0 = 2 \times 10^5$ und Querkontraktionszahl $\nu_0 = 0.3$
- ▶ Potenzgesetz für die Materialinterpolation $\rho(\chi) = \chi^p$ gemäß Gl. (3.7.3) mit $p = 3$ und $\chi_{\min} = 10^{-3}$
- ▶ Volumen Nebenbedingung für ein konstantes (relatives) Volumen ϱ gemäß Gl. (3.7.11) mit $f(\chi) = \chi$
- ▶ Dissipationsfunktion Φ gemäß Gl. (3.7.15) mit Viskosität η gemäß Gl. (4.3.2) mit $\eta^* = 15$
- ▶ starke Form der Variation gemäß Gl. (3.7.30).

Für die numerische Lösung werden folgende Beziehungen und Parameter angewandt:

- ▶ DichtevARIABLE ist elementweise diskretisiert $\chi \rightarrow \bar{\chi}$
- ▶ NPM gemäß Abschnitt 4.2.4 zur Bestimmung des Laplace-Operators der DichtevARIABLE
- ▶ Regularisierungsparameter β gemäß Gl. (4.2.41), wobei β^* als Steuerparameter für das Mindeststrukturabmaß individuell für das gegebene Problem gewählt wird
- ▶ Berechnung des Lagrange-Multiplikators mit Hilfe der Bisektion gemäß Algorithmus 4.1
- ▶ Optimierungsschritt mit Hilfe der expliziten Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (4.2.38) und den inneren Iterationsschritten gemäß Algorithmus 4.3.2
- ▶ Triebkräfte der DichtevARIABLE $\bar{\tau}_\chi$ werden gemäß Gl. (4.2.3) berechnet
- ▶ die Optimierung gilt als konvergiert, sobald eines der beiden Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ bzw. Gl. (4.1.32) mit $\Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} = 10^{-2}$ erfüllt ist.

Die Topologie wird mittels Graustufen über $\chi \in [\chi_{\min}, 1]$ abgebildet, wobei schwarz Vollmaterial ($\chi = 1$) und weiß die Abwesenheit von Material ($\chi = \chi_{\min}$) darstellt. Die Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ wird gemäß Gl. (5.2.1) normiert, wobei die Struktursteifigkeit $\mathcal{Z}^0$ durch die homogene Anfangsbedingung $\chi^0 = \varrho \forall \mathbf{x} \in \Omega$ gegeben ist.

¹Die Unterschiede im Vergleich zum Modell aus dem vorherigen Abschnitt 5.2 sind in Tabelle 5.4.1 gegeben.

5.3.2. Evolution der Topologie

Die Entwicklung der Struktursteifigkeit S sowie der Topologie während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Biegebalken (Abb. 5.1.1) für unterschiedliche Zielvolumina ϱ ist in den Abbildungen 5.3.1 bzw. 5.3.3 und 5.3.4 dargestellt. Analog sind die Ergebnisse für einen MBB-Balken (Abb. 5.1.3) mit Abmaßen $\Omega = 32 \times 1$ in den Abbildungen 5.3.2 und 5.3.5 gegeben. Hierbei sind neben den Ergebnissen, welche sich gemäß dem Konvergenzkriterium ergeben, die Ergebnisse bis zum Iterationsschritt $t = 300$ bzw. $t = 100$ gegeben, um die Konvergenz der Ergebnisse zu verifizieren.

Die Steifigkeitsverläufe zeigen ein stabiles Konvergenzverhalten der Optimierung. Die Ergebnisse der Topologie nach Erreichen des Konvergenzkriteriums ändern sich in folgenden Iterationsschritten unmerklich. Die Steifigkeit erhöht sich im weiteren Optimierungsprozess stetig, allerdings nur geringfügig: Innerhalb von zusätzlichen 150 Iterationsschritten nach Erreichen des Konvergenzkriteriums erhöht sich die Steifigkeit um weniger als 0.6%.

Bei der Entwicklung der Topologie während des Optimierungsprozesses wird Material schrittweise aus unbelasteten Bereichen in stark belastete Bereiche (i.d.R. Lagerpunkte, Krafteinleitungspunkte und Singularitäten) umverteilt, wobei das Strukturvolumen insgesamt erhalten bleibt. Der SIMP-Ansatz erzwingt dabei mit zunehmenden Optimierungsprozess die schrittweise Annäherung an eine „Schwarz-Weiß“-Lösung, wobei nach und nach Bereiche mit Zwischendichten durch diskrete Struktursegmente ersetzt werden. Innerhalb der ersten 60 Iterationsschritte beim abgewinkelten Biegebalken bzw. 40 Iterationsschritte beim MBB-Balken, d.h. ungefähr nach der Hälfte der Iterationsschritte bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums, sind die Bereiche mit Zwischendichte fast vollständig entfernt worden. Im restlichen Verlauf der Optimierungsprozesses erfolgen kleinere Änderungen der Topologie durch Entfernen von schmalen Balken sowie geringfügige Formänderungen verhältnismäßig langsam, d.h. die Änderungen der Dichte pro Iterationsschritt ist weitaus geringer als zu Beginn des Optimierungsprozesses. Dies wird durch den Verlauf der Struktursteifigkeiten S bestätigt, welche nach etwa der Hälfte der Iterationsschritte bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums in ein Plateau übergehen.

Die verhältnismäßig langsame Entwicklung der Topologie nach Erreichen einer ersten diskreten „Schwarz-Weiß“-Lösung (ohne Einbeziehung der Zwischendichte an den Phasenübergängen aufgrund der Regularisierung) ist ein bekanntes Phänomen in der Topologieoptimierung [Sigmund u. Maute (2013)]: Aufgrund der bekannten Existenzprobleme der Lösung bzw. unbestimmte Anzahl an lokalen Minima ist es praktisch unmöglich das globale Minimum (sofern eines existiert) zu finden, sodass die Optimierung grundsätzlich in ein lokales Minimum „fällt“, d.h. eine erste „Schwarz-Weiß“-Lösung. Nur verhältnismäßig langsam, durch schrittweise kleinste Änderung der Topologie bzw. Form, entwickelt sich die Struktur zu einem besseren Minimum. Folglich muss ein Kompromiss zwischen sinnvollem lokalen Minimum und Rechenzeit getroffen werden. In Jantos u. a. (2019a) wurde gezeigt, dass die mit dem hier gezeigten Model erhaltenen Ergebnisse quantitativ mit denen etablierter Optimierungsverfahren vergleichbar sind.

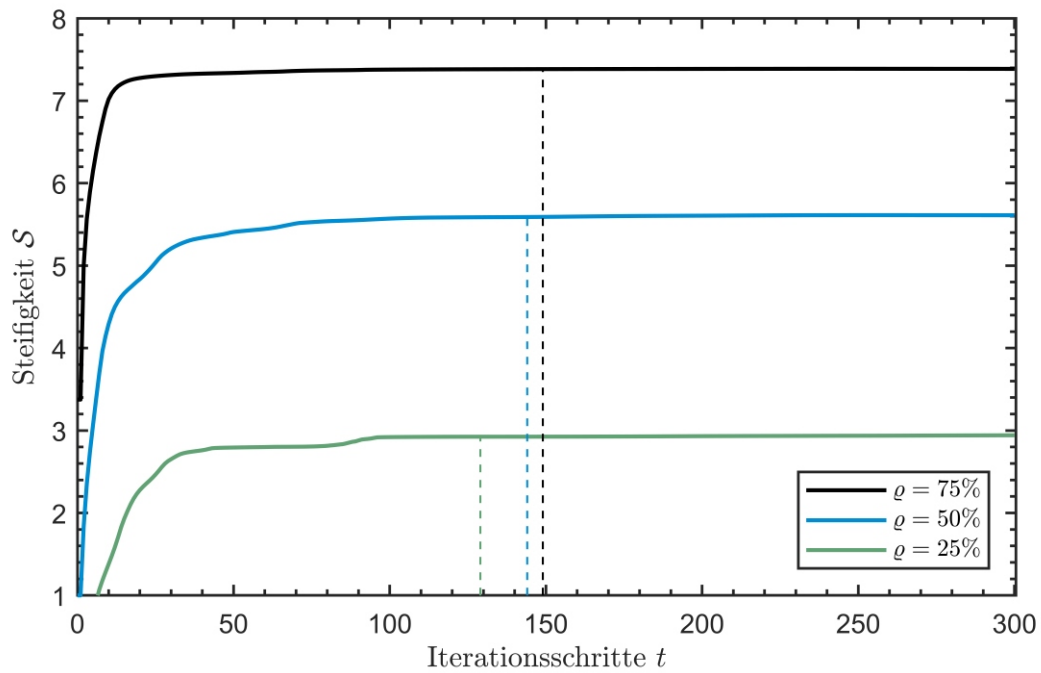


Abbildung 5.3.1.: Entwicklung der Struktursteifigkeit (normiert auf die Steifigkeit für den Fall $\chi = 50\% \forall \mathbf{x} \in \Omega$) während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 5.3.3 und 5.3.4 für unterschiedliche Zielvolumina ϱ . Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

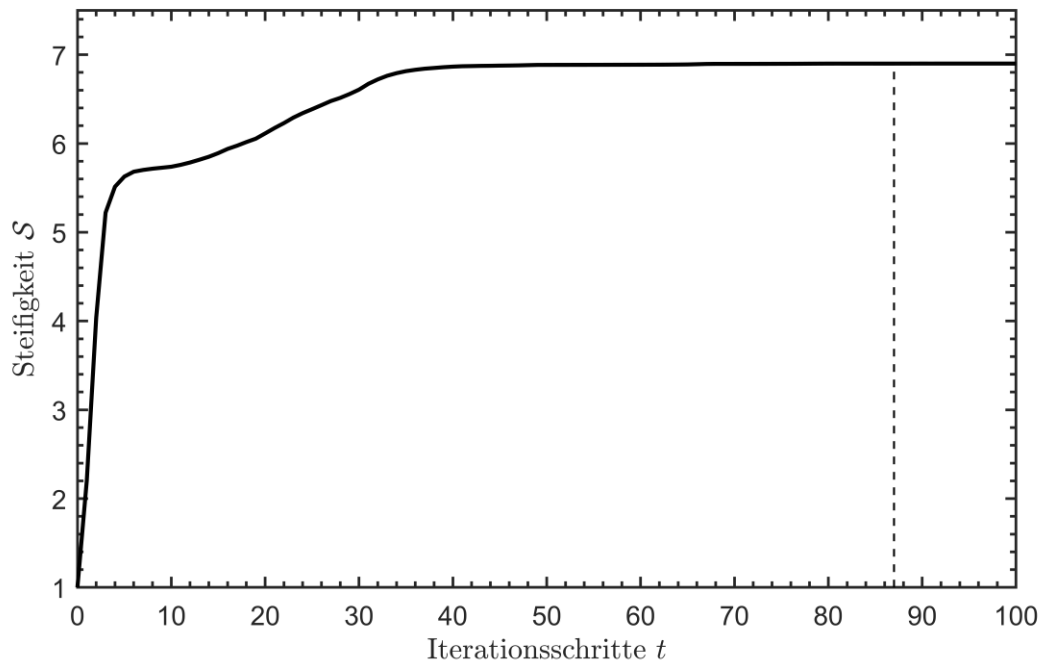


Abbildung 5.3.2.: Entwicklung der Struktursteifigkeit während des Optimierungsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 5.3.5. Die senkrechte Linie markieren den Iterationsschritt $t = 87$, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

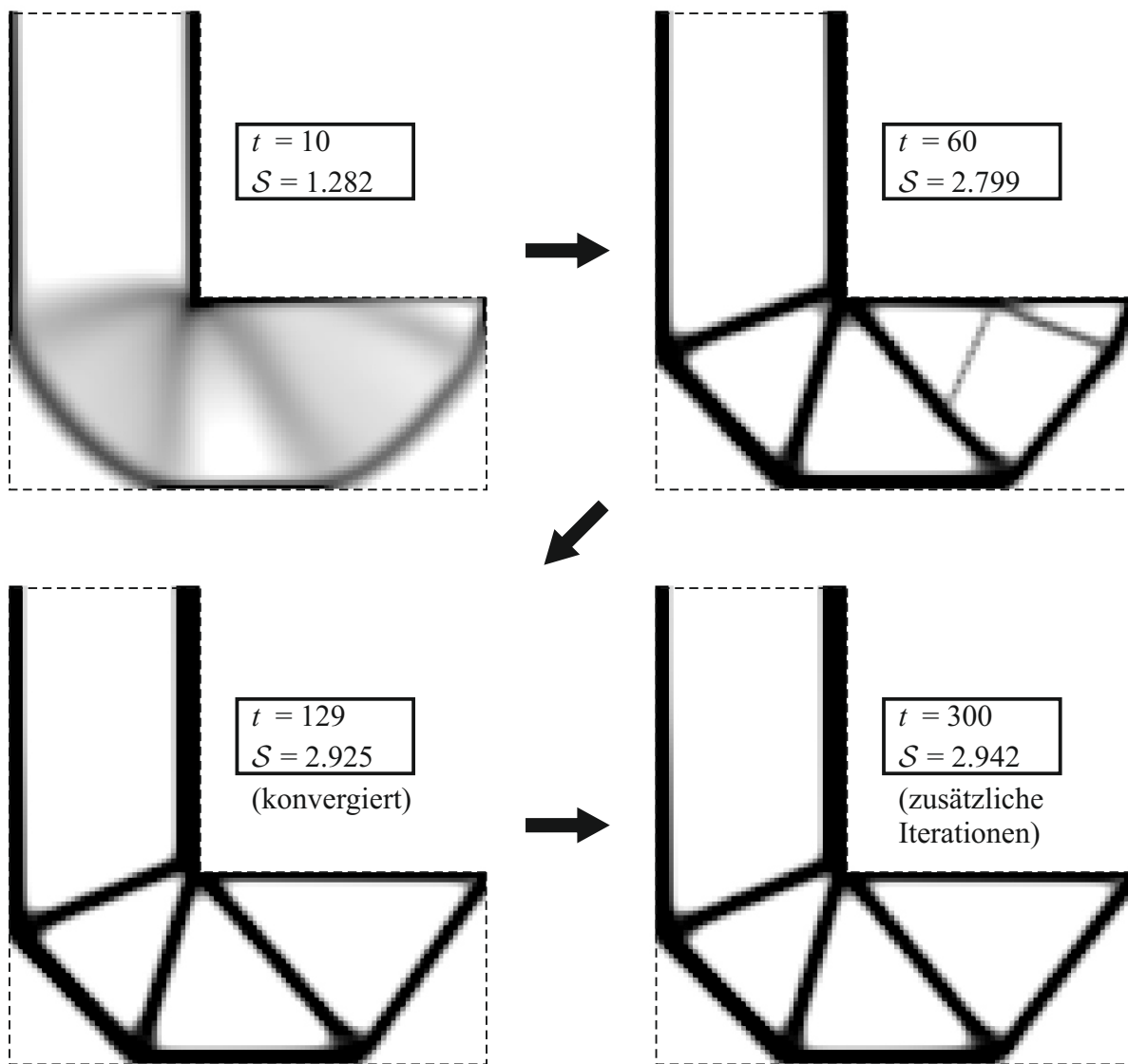


Abbildung 5.3.3.: Evolution der Struktur für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1) bei einem konstantem Strukturvolumen von $\varrho = 25\%$ inklusive konvergiertem Zustand sowie Ergebnis nach 300 Iterationsschritten. Die Struktursteifigkeit S ist auf den Fall $\chi = 50\% \forall \mathbf{x} \in \Omega$ normiert.

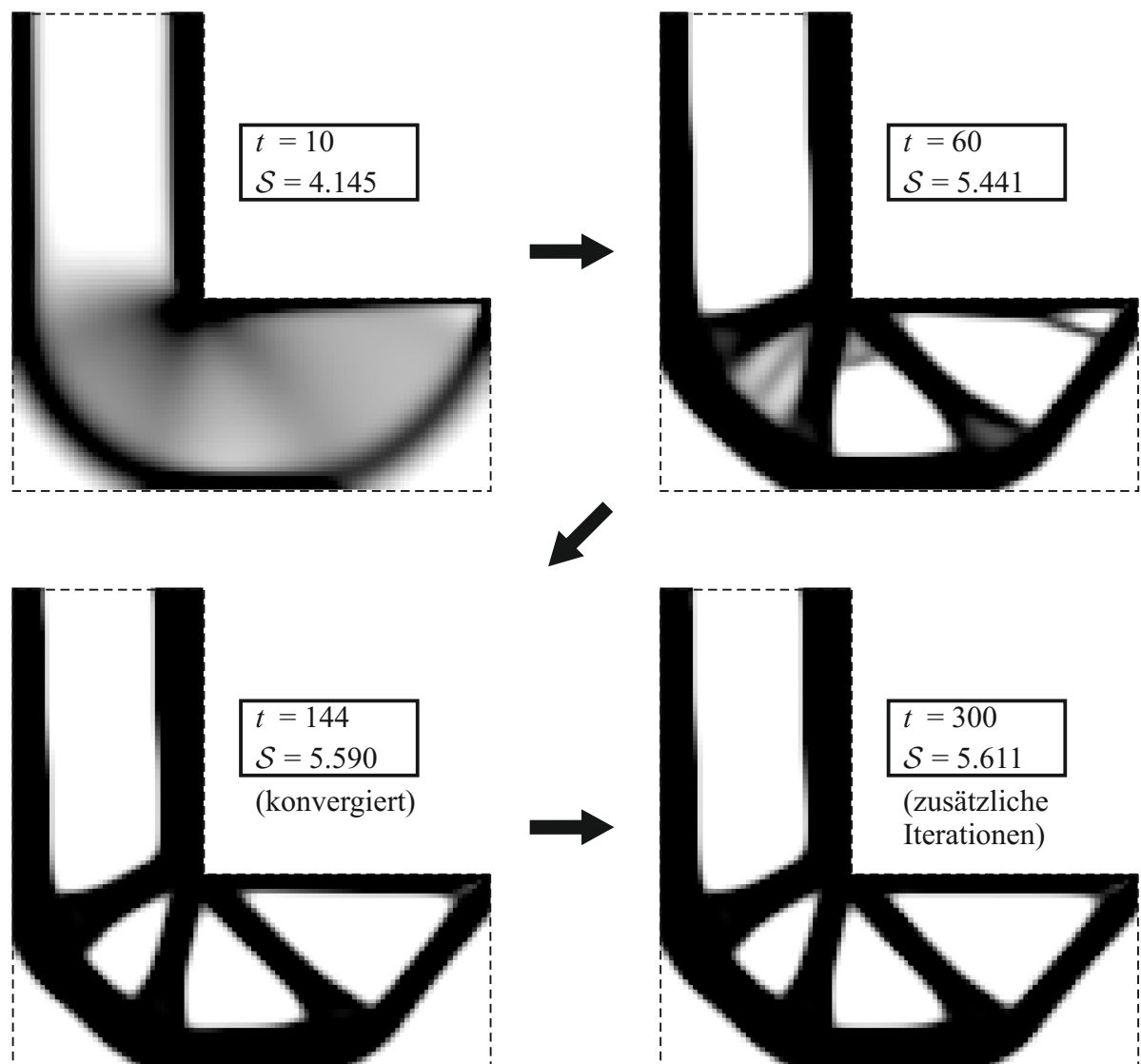


Abbildung 5.3.4.: Evolution der Struktur Analog zu Abb. 5.3.3 für ein konstantes Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$.

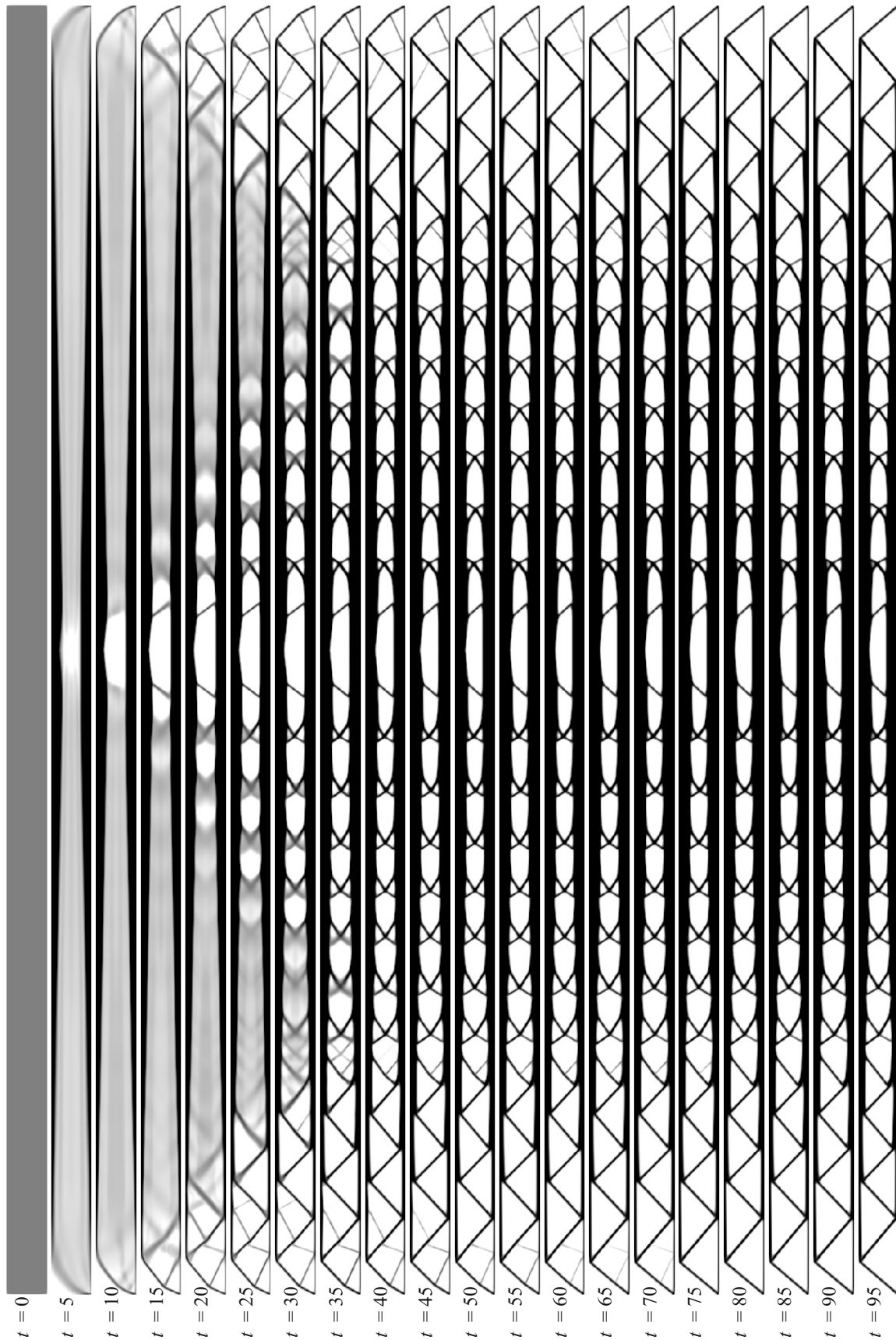


Abbildung 5.3.5.: Evolution der Struktur für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) mit Abmaßen $\Omega = 32 \times 1$ mit einer Diskretisierung von 1600×50 Elementen (Netzweite $h = 1/50$). Der Regularisierungsparameter beträgt $\beta^* = 2h^2$ und das Zielvolumen $\varrho = 50\%$.

5.3.3. Netzunabhängigkeit

Die Abbildungen 5.3.6 und 5.3.7 zeigen den Verlauf der Steifigkeit $\mathcal{S}$ während des Optimierungsprozesses bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) bzw. MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedlich feine Diskretisierungen bei jeweils gleichem Wert für den Regularisierungsparameter β^* . Die dazugehörigen Topologien sind in Abb. 5.3.8 und Abb. 5.3.9 gegeben. Zusätzlich zeigen die Abbildungen 5.3.10 und 5.3.11 das Biegeproblem und den beidseitig eingespannten Balken (Abb. 5.1.4) für eine Diskretisierung mit zu je einer Hälfte strukturierten und unstrukturierten Netzen.

Prinzipiell lassen alle Ergebnisse auf die Netzunabhängigkeit des Modells schließen. Die Steifigkeitsverläufe $\mathcal{S}$ zeigen vergleichbare Tendenzen, wobei die Steifigkeit bei gröberer Vernetzung geringer ausfällt. Dies geht einher mit der erhöhten numerischen Genauigkeit der FEM bei feinerer Vernetzung relativ zur charakteristischen Länge (im Falle der Topologieoptimierung das Mindeststrukturabmaß). Bei immer feiner werdenden Diskretisierung nähern sich die Kurven der Steifigkeitsverläufe immer weiter an, wobei die Abweichung der Struktursteifigkeit im konvergierten Zustand zwischen den unterschiedlichen Diskretisierung weniger als 1% beträgt. Auch die Anzahl an benötigten Iterationsschritten bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums ist vergleichbar und weicht um maximal 10% ab.

Bei der Anwendung von halbseitig strukturierten und halbseitig unstrukturierten Netzen für die hier gezeigten symmetrischen Randwertprobleme ist die resultierenden Topologie ebenfalls symmetrisch, sodass die Netzunabhängigkeit des Modells weiter bekräftigt wird. Dies ist auch der Fall für die recht feine Struktur für den beidseitig eingespannten Balken in Abb. 5.3.11, dessen kleinsten Balken eine Breite von zwei bis drei finiten Elementen aufweist.

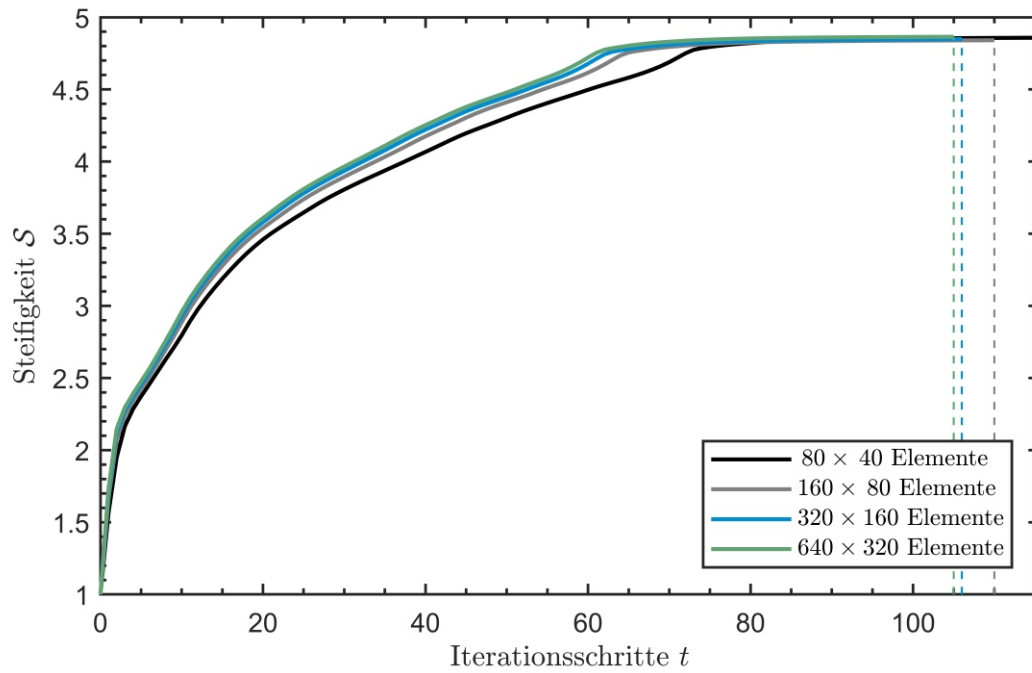


Abbildung 5.3.6.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den Biegebalken Abb. 5.3.8 für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 2/40^2 = 1.25 \times 10^{-3}$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

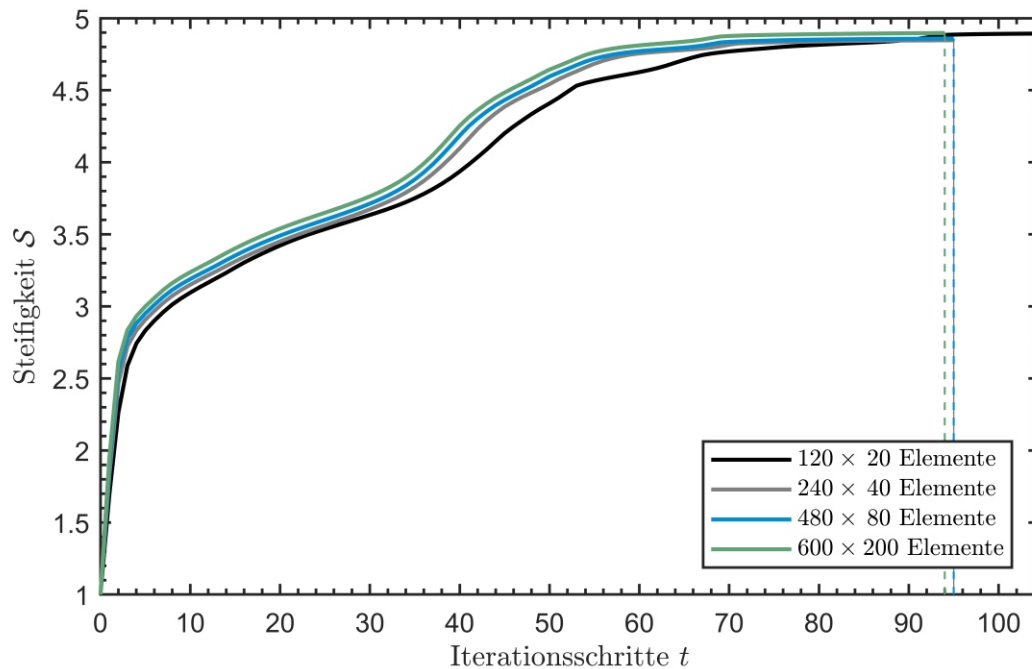


Abbildung 5.3.7.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 5.3.9 für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 2/20^2 = 5 \times 10^{-3}$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

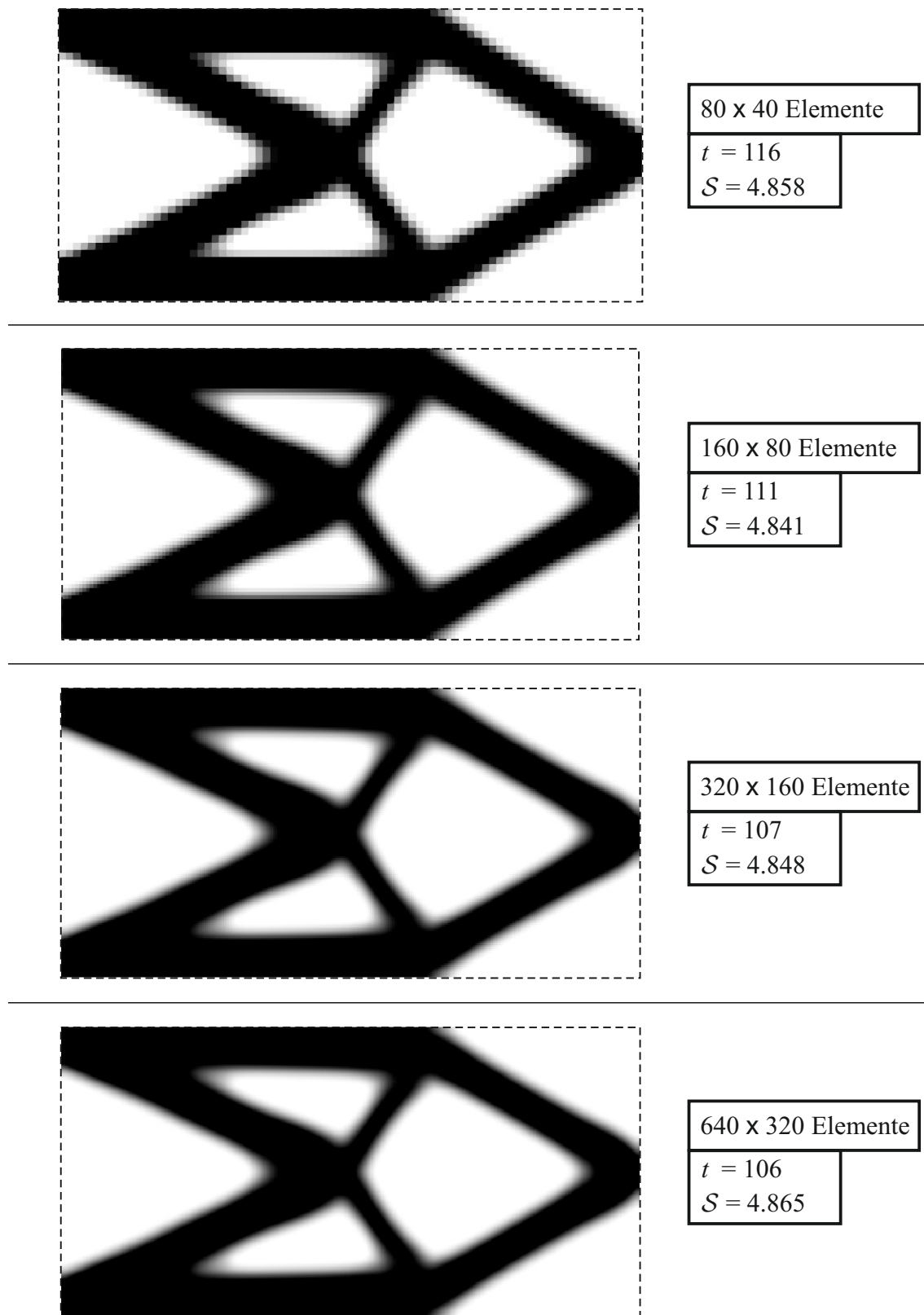
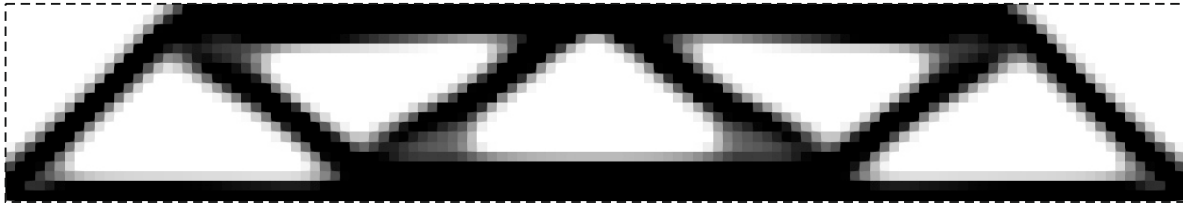
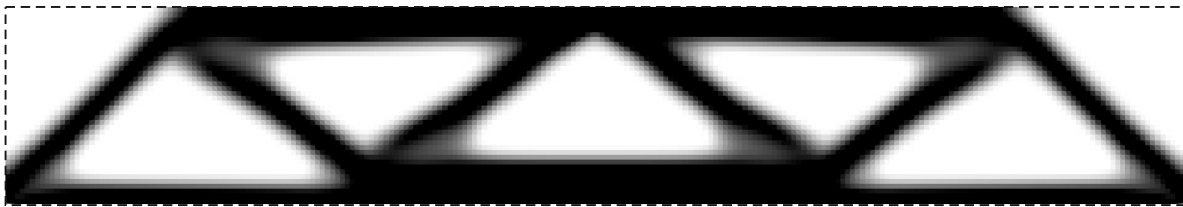


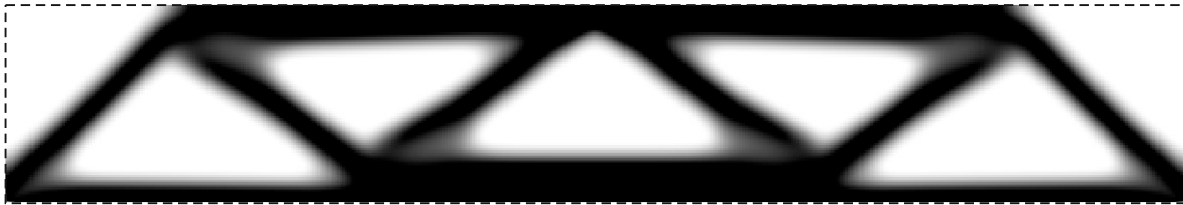
Abbildung 5.3.8.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 2/40^2 = 1.25 \times 10^{-3}$.



120 x 20 Elemente

 $t = 105$
 $S = 4.893$


240 x 40 Elemente

 $t = 96$
 $S = 4.847$


480 x 80 Elemente

 $t = 96$
 $S = 4.859$


1200 x 200 Elemente

 $t = 95$
 $S = 4.897$

Abbildung 5.3.9.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 2/20^2 = 5 \times 10^{-3}$.

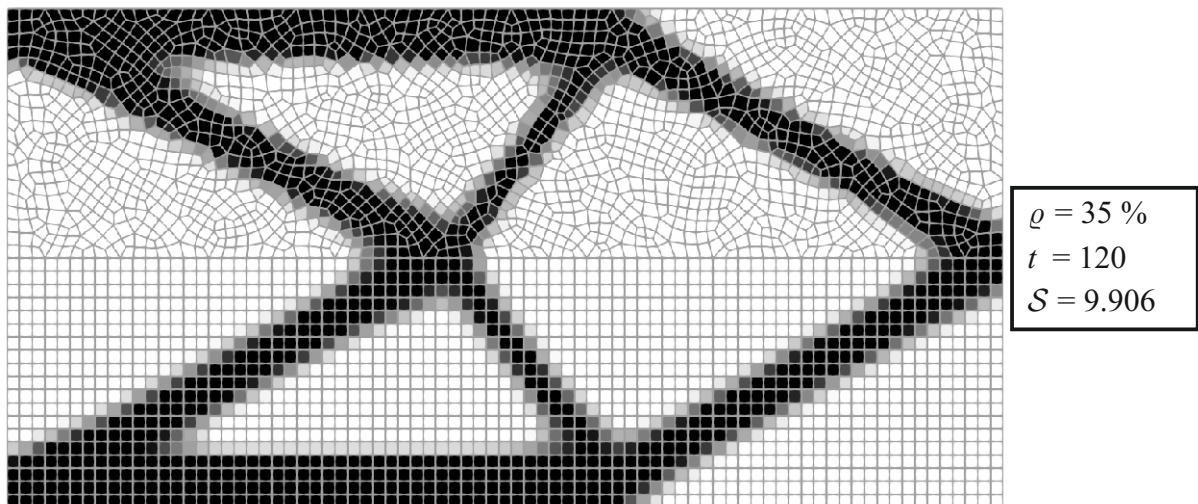


Abbildung 5.3.10.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) für ein halbseitig strukturiertes und halbseitig unstrukturiertes Netz (76×38 Elemente entlang der Ränder mit insgesamt 3460 Elementen) für ein Strukturvolumen von $\varrho = 35\%$ und $\beta^* = 125 \times 10^{-5}$.

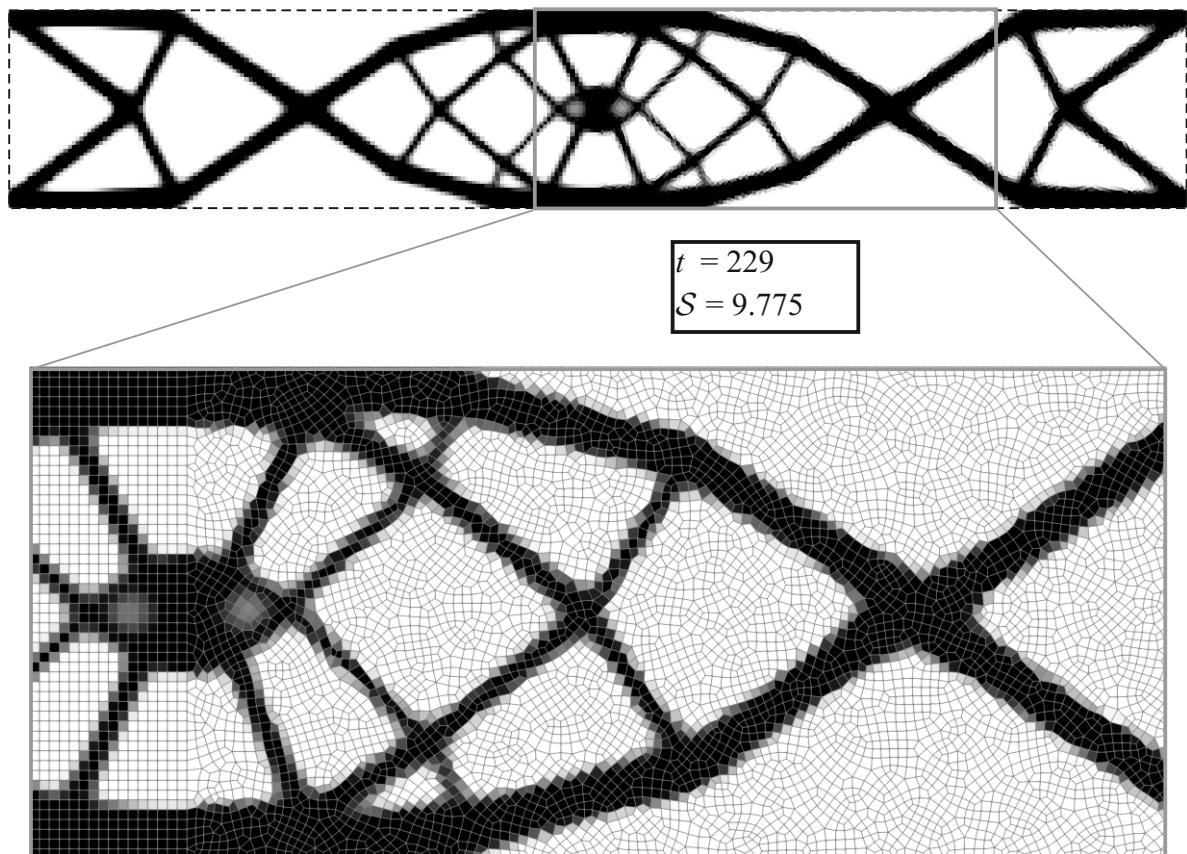


Abbildung 5.3.11.: Ergebnisse für den beidseitig eingespannten Balken (Abb. 5.1.4) für ein halbseitig strukturiertes und halbseitig unstrukturiertes Netz (50×300 Elemente entlang der Ränder mit insgesamt 17035 Elementen) für $\varrho = 33\%$ und $\beta^* = 50 \times 10^{-5}$.

5.3.4. Mindeststrukturabmaß

Im folgenden wird nun die Beziehung zwischen dem Regularisierungsparameter β^* und dem Mindeststrukturabmaß der resultierenden Topologie untersucht. Abbildung 5.3.12 zeigt das Ergebnis für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für zwei verschiedene Werte des Regularisierungsparameters β^* . Die Abbildungen 5.3.13 und 5.3.14 zeigen die Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums sowie die finalen Ergebnisse der Topologie für den Biegebalken gemäß Abb. 5.1.2 mit $L = 3$ für unterschiedliche Regularisierungsparameter β^* .

Die Radien der schwarzen Punkte in Abb. 5.3.14 und 5.3.12 (neben den Werten von β^*) besitzen jeweils den Wert $\sqrt{\beta^*}$. Dies entspricht in etwa dem jeweiligen sich ergebenden Mindeststrukturabmaß bzw. der charakteristischen Länge des Problems. Folglich kann abgeschätzt werden, dass der Mindestradius der Balken innerhalb resultierenden Topologie dem Wert $\sqrt{\beta^*}$ annehmen. Dieser Sachverhalt deckt sich mit Berichten aus der Literatur bezüglich anderer gradientenbasierter Regularisierungen De Borst u. Mühlhaus (1992); Dimitrijevic u. Hackl (2008); Lazarov u. Sigmund (2011). Dementsprechend ist die resultierende Struktur umso weniger detailliert bzw. weniger feine Balken bilden sich aus, je größer der Wert von β^* ist. Die Optimierung konvergiert für größere Werte von β^* schneller, da keine feinen Substruktursegmente ausgebildet werden müssen bzw. können. Allerdings ist die Steifigkeit der feineren Strukturen höher, da der Optimierung ein größeres Set an möglichen Lösungen mit „besseren“ Minima zur Verfügung steht, welches durch eine stärkere Regularisierung reduziert werden würde: Es können feinere Strukturen ausgebildet werden, welche näher an der (theoretischen) optimalen Lösung gegeben durch eine infinitesimale Mikrostruktur (Laminate) liegen (siehe Abschnitt 2.6 und 3.4).

In Kombination mit der Netzunabhängigkeit des Modells (siehe Abschnitt 5.3.3) kann zunächst das gewünschte Mindeststrukturabmaß (und damit der Wert für β^*) festgelegt werden und anschließend die Diskretisierung des Designraumes so gewählt werden, dass sich die Netzweite $2h^2 \leq \beta^*$ ergibt. Dadurch kann die Rechenzeit (vor allem bei der mechanischen Analyse mittels der FEM) auf ein Minimum reduziert werden. Gleichzeitig werden numerische Instabilitäten wie das Checkerboarding unterbunden. Ein entsprechendes Vorgehen ist in den Abbildungen 5.3.14 und 5.3.12 angewandt worden.

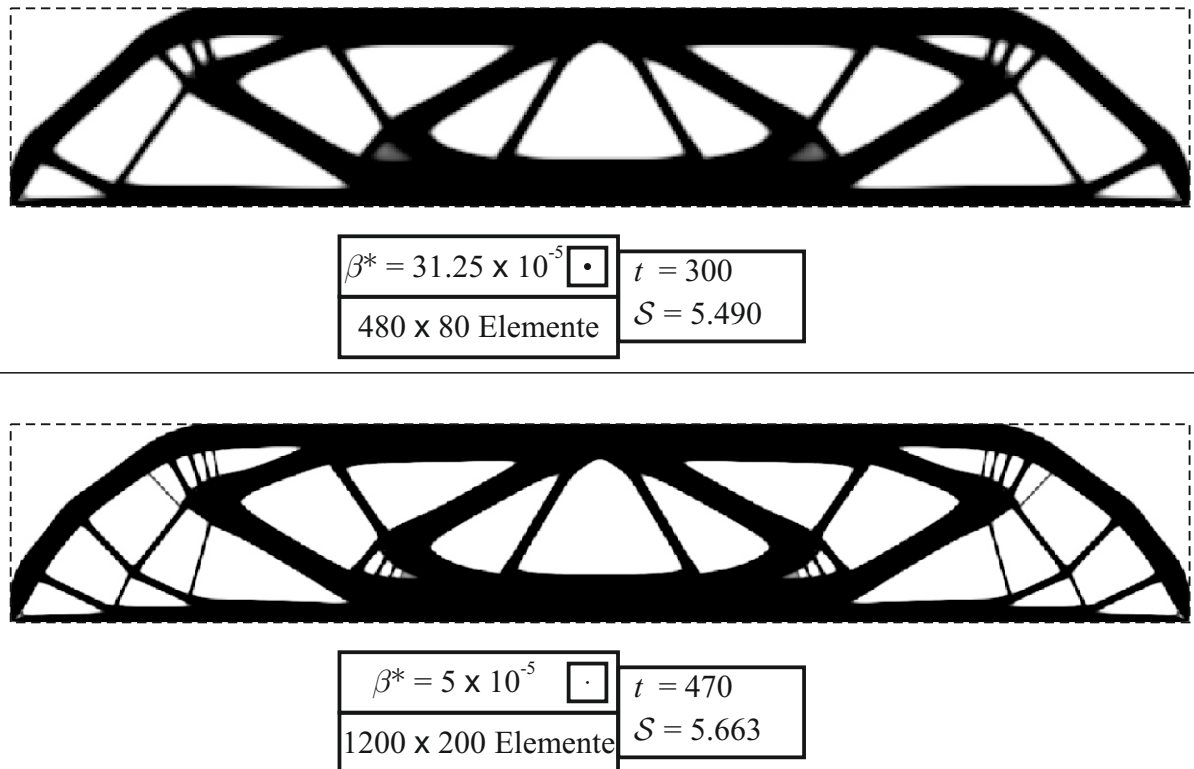


Abbildung 5.3.12.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedlich feine Netze und Regularisierungsparameter $\beta^* = 2/h^2$ mit $\varrho = 50\%$. Die schwarzen Punkte neben den Werten von β^* besitzen den Radius $\sqrt{\beta^*}$.

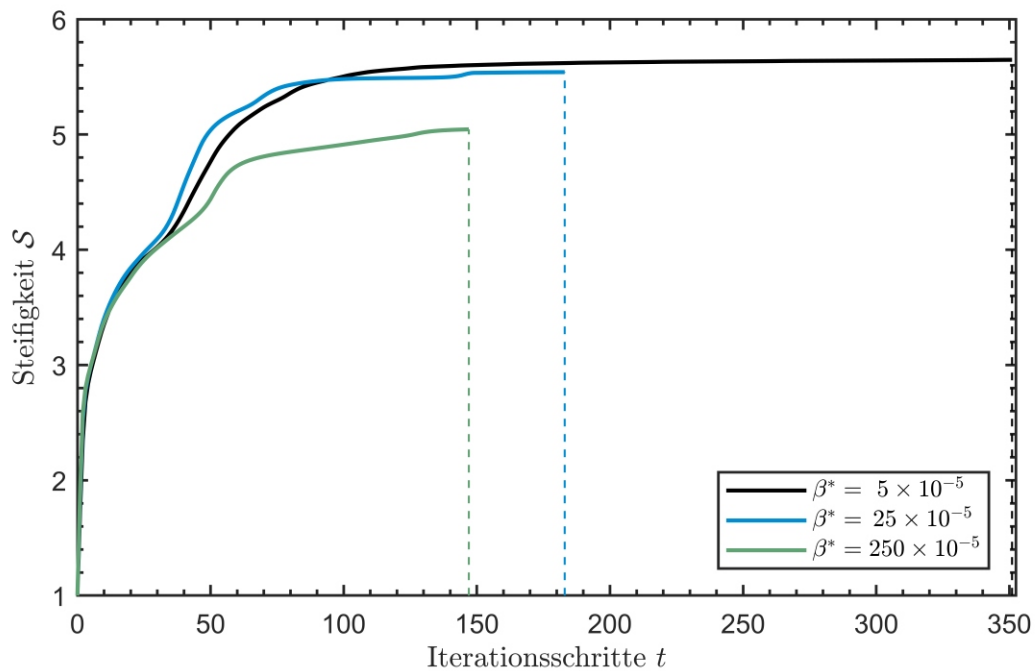


Abbildung 5.3.13.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den Biegebalken in Abb. 5.3.14 für ein Netz mit 600×200 Elementen und unterschiedlichen Regularisierungsparametern β^* . Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

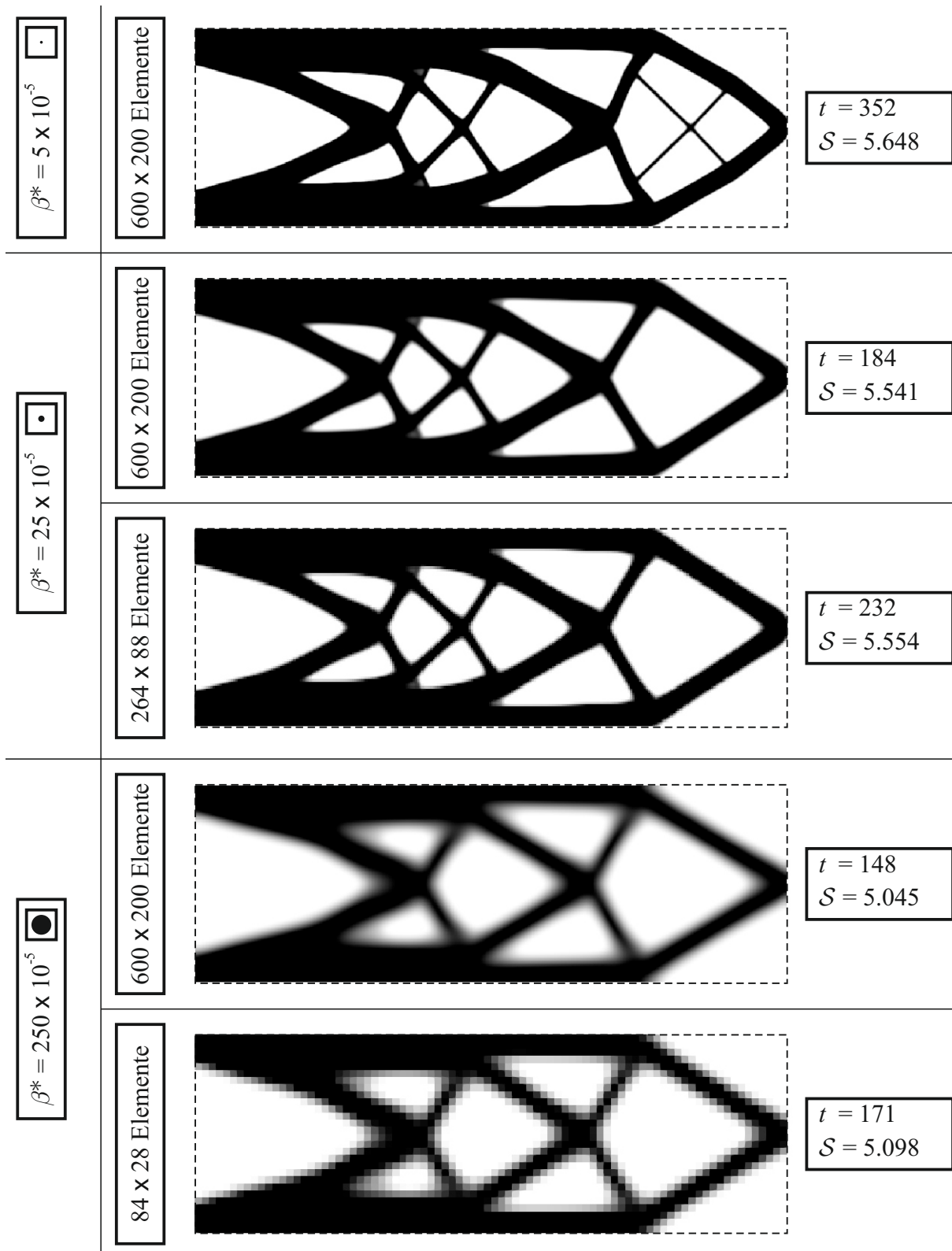


Abbildung 5.3.14.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 3$) für unterschiedlich feine Netze und Regularisierungsparameter β^* mit $\varrho = 50\%$. Die schwarzen Punkte neben den Werten von β^* besitzen den Radius $\sqrt{\beta^*}$.

5.3.5. Berechnungszeiten

Im folgenden wird der Rechenaufwand des im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ansatzes zur Topologieoptimierung basierend auf Prinzipien der Thermodynamik mit der aus der Literatur bekannten *optimality criteria method* (OCM) verglichen (siehe auch Jantos u. a. (2019a)). Hierfür wurde die in Abschnitt 5.3.1 vorgestellte Optimierung in den frei verfügbaren *Matlab*-Code nach Andreassen u. a. (2011)² implementiert und mit der ursprünglichen OCM bei Anwendung des Dichtefilters basierend auf einem Faltungsoperator sowie des Dichtefilters basierend auf der Lösung einer Helmholtz-Differentialgleichung (Helmholtz-DGL) verglichen. Der *Matlab*-Code enthält dabei eine vollständige FEM für strukturierte und äquidistante Netze, welcher nicht modifiziert wurde.

Die Abbildungen 5.3.15 bis 5.3.18 zeigen die Rechenzeiten der Optimierung ohne FEM, die Anzahl an Iterationsschritten sowie die gesamte Brechungszeit inklusive FEM bis zum Erreichen der Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) und Gl. (4.1.32) bei Anwendung unterschiedlicher charakteristischer Längen bzw. Mindeststrukturabmaße $r_\chi/h = \sqrt{\beta^*}/h$ für eine gegebene Netzweite h . Analog zeigen die Abbildungen 5.3.19 bis 5.3.22 die Berechnungszeiten und Anzahl an Iterationsschritten für unterschiedliche Diskretisierungen mit Netzweite h , wobei hier das jeweils minimal zulässige bzw. sinnvolle β^* bzw. r_χ angewandt wurde, sodass numerische Instabilitäten unterbunden werden [Andreassen u. a. (2011); Jantos u. a. (2019a)]: Regularisierungsparameter $\beta^* \geq 2h^2$, Radius $r_\chi \geq 1.5h$ für den Filter basierend auf dem Faltungsoperator und $r_\chi \geq 2.5h$ für den Filter basierend auf einer Helmholtz-DGL.

Für die reine Optimierung ergibt sich ein vergleichbarer Rechenaufwand für die OCM und die TTO basierend auf dem Hamilton-Prinzip: Beide Verfahren sind explizite Update-Schemata und verwenden einen Bisektionsalgorithmus zur Berechnung des Lagrange-Multiplikators. Der Hauptunterschied in den Berechnungszeiten ergibt sich durch die numerische Umsetzung der Regularisierung: Bei der NPM im Zusammenhang mit der TTO wird der für die Regularisierung benötigte Laplace-Operator explizit mittels Informationen der direkten Nachbarn eines jeden Diskretisierungspunktes bestimmt. Dementsprechend wäre der Rechenaufwand eines einzelnen Optimierungsschrittes unabhängig von der charakteristischen Länge bzw. Mindeststrukturabmaß $r_\chi = \sqrt{\beta^*}$. Jedoch müssen zur Einhaltung der Neumann-Stabilität gemäß Abschnitt 4.3.3 zusätzliche innere Iterationsschritte erfolgen. Dadurch steigt der Rechenaufwand linear mit β^* bzw. quadratisch mit r_χ , da die Anzahl der inneren Iterationsschritte gemäß Gl. (4.3.9) linear mit β^* steigt. Der Rechenaufwand steigt linear mit der Gesamtanzahl an Diskretisierungspunkten bzw. Elementen, da alle Operationen lokal, das heißt separat für jedes Element, erfolgen.

Ein ähnliches Verhalten ergibt sich bei der Verwendung des Dichtefilters basierend auf einem Faltungsoperator: Mit zunehmender charakteristischen Länge, d.h. Filterradius r_χ , müssen für jeden diskretisierten Punkt entsprechend alle benachbarte Punkte innerhalb des Filterradius einbezogen werden. Dementsprechend steigt auch hier der Rechenaufwand quadratisch mit der charakteristischen Länge bzw. dem Mindeststrukturabmaß r_χ . Jedoch wird der Dichtefilter sowohl auf die Designvariablen wie auch auf die Sensitivitäten angewandt [Bourdin (2001); Andreassen u. a. (2011)], wodurch sich ein insgesamt um den Faktor 3.5 höherer Rechenaufwand als bei der NPM ergibt. Wie auch bei der NPM steigt der Rechenaufwand linear mit der Gesamtanzahl an Diskretisierungspunkten bzw. Elementen.

²<http://www.topopt.mek.dtu.dk/Apps-and-software/Efficient-topology-optimization-in-MATLAB>

Bei dem Filter basierend auf der Lösung einer Helmholtz-DGL wird im Gegensatz zur NPM die DGL

$$\chi^* - r_\chi^2 \nabla^2 \chi^* = \chi \quad (5.3.1)$$

implizit bzw. global, d.h. für alle Diskretisierungspunkte gleichzeitig nach der gefilterten Größe χ^* gelöst [Lazarov u. Sigmund (2011)]. Damit ist der Rechenaufwand unabhängig von der charakteristischen Länge r_χ und das Verfahren ist bedingungslos stabil, d.h. die Einhaltung der Neumann-Stabilitätsbedingung mittels mehrerer innerer Iterationsschritte ist hinfällig. Allerdings steigt dadurch der Rechenaufwand quadratisch mit der Anzahl an Diskretisierungspunkten bzw. Elementen, da zur Anwendung des Filters das globale (diskretisierte) Gleichungssystem (5.3.1) gelöst werden muss.

Für die TTO im Kombination mit der NPM führen beide Konvergenzkriterien zu einer vergleichbaren Anzahl an Iterationsschritten, wobei sich ein Unterschied von durchschnittlich 70 Iterationsschritten zwischen den Konvergenzkriterien ergibt. Zwar benötigt die OCM zum Erreichen des Konvergenzkriteriums basierend auf der relativen Änderung der Zielfunktion gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ i.d.R. weniger Iterationsschritte als TTO (durchschnittlich 90 Iterationsschritte), jedoch deutlich mehr Iterationsschritte (durchschnittlich 700 Iterationsschritte) zum Erreichen des Konvergenzkriteriums basierend auf der maximalen Änderung der Designvariable gemäß Gl. (4.1.32) mit $\Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} = 10^{-2}$. Der deutliche Unterschied zwischen den Konvergenzkriterien lässt auf lokalisierte Änderungen der Designvariable schließen, welche geringen Einfluss auf die gesamte Struktur bzw. Struktursteifigkeit haben. Bei der TTO liegt die Anzahl an benötigten Iterationsschritten zum Erreichen beider Konvergenzkriterien wesentlich näher zusammen, sodass ein lokal und global stabiles Konvergenzverhalten angenommen werden kann.

Die gesamte Brechungszeit ist stark abhängig von der Anzahl an benötigten Iterationsschritten, da die FEM einen Großteil der Rechenzeit (ca. 70 – 95% in den gezeigten Beispielen) ausmacht. Die Anzahl an benötigten Iterationsschritten bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums und damit die gesamte Brechungszeit des Optimierungsprozesses hängt neben dem konkreten Konvergenzkriterium und dem Toleranzwert auch von dem Randwertproblem, dem Wert des Regularisierungsparameters bzw. Filterradius sowie weiteren numerischen Parametern ab. Um eine klare Aussage bezüglich der Konvergenzverhaltens der Verfahren im Vergleich zueinander zu erhalten, sind weitreichendere Parameter- und Randwertproblemstudien nötig. Die hier gezeigten Ergebnisse basieren nur auf dem MBB-Balken und sollen nur eine Tendenz aufzeigen und sind exemplarisch, aber nicht zwangsweise repräsentativ.

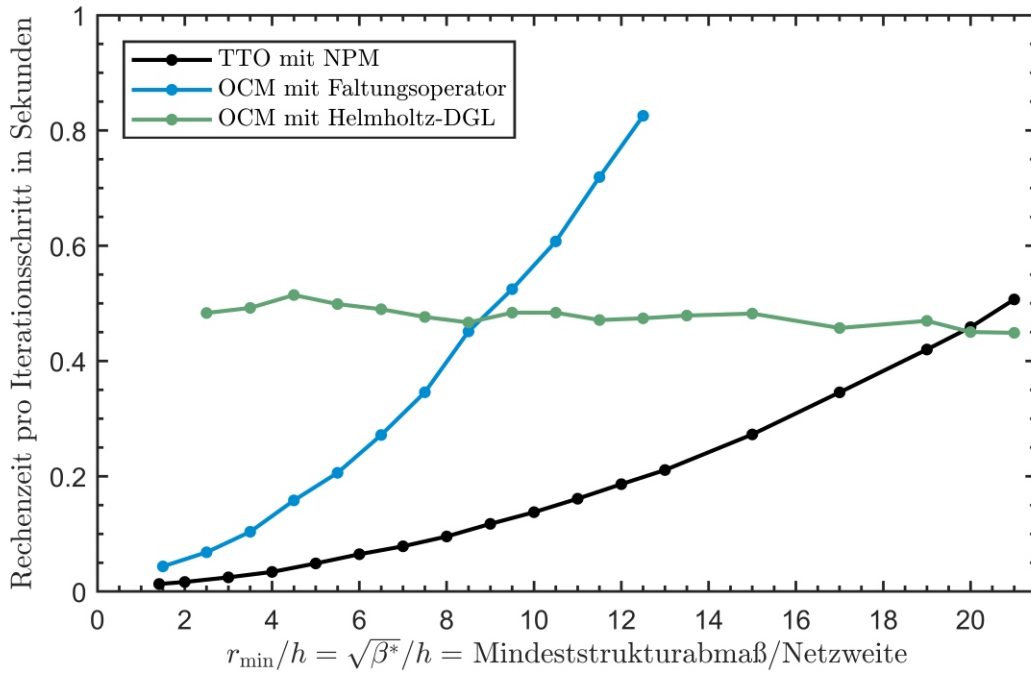


Abbildung 5.3.15.: Rechenzeit der reinen Optimierung pro Iterationsschritt für den MBB-Balken gemäß Abb. 5.1.3 für verschiedene Mindeststrukturabmaße $r_\chi = \sqrt{\beta^*}$ bei gleichbleibender Diskretisierung (Anzahl an Elementen) mit Netzweite h .

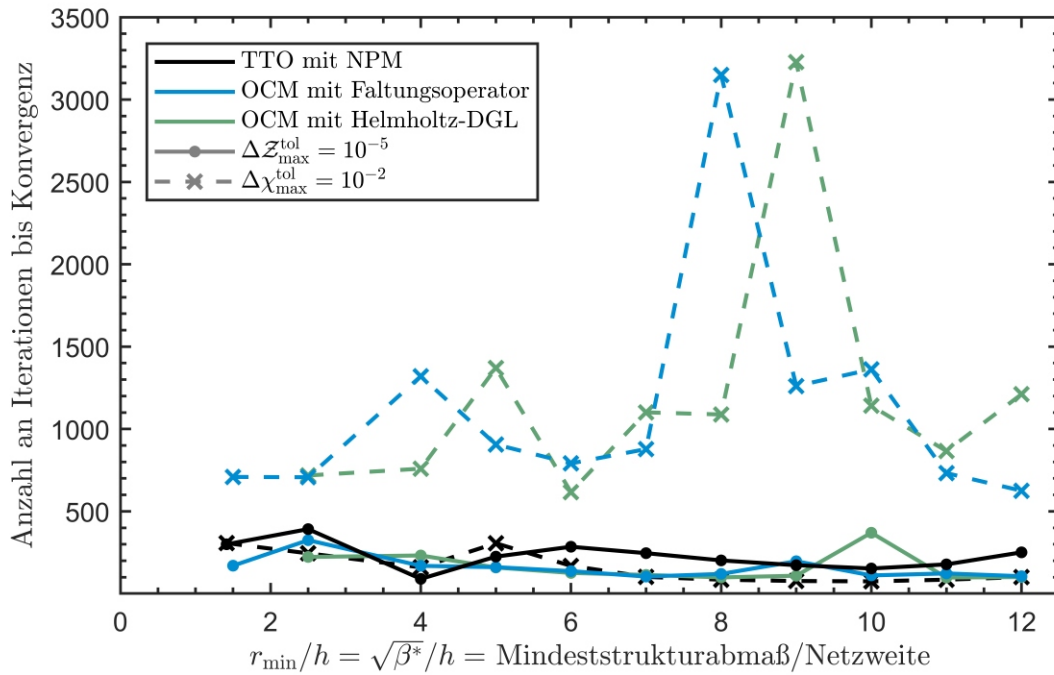


Abbildung 5.3.16.: Anzahl an Iterationen bis zum Erreichen der Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) und Gl. (4.1.32) für die Berechnungen in Abb. 5.3.15

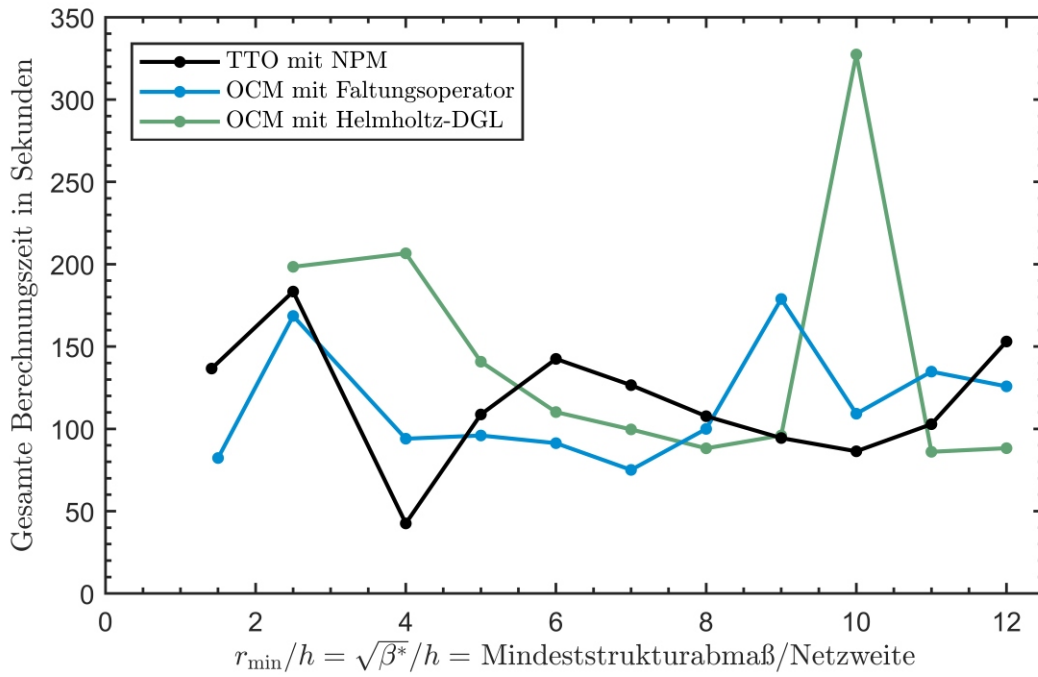


Abbildung 5.3.17.: Gesamte Berechnungszeit inklusive FEM bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ für die Berechnungen in Abb. 5.3.15

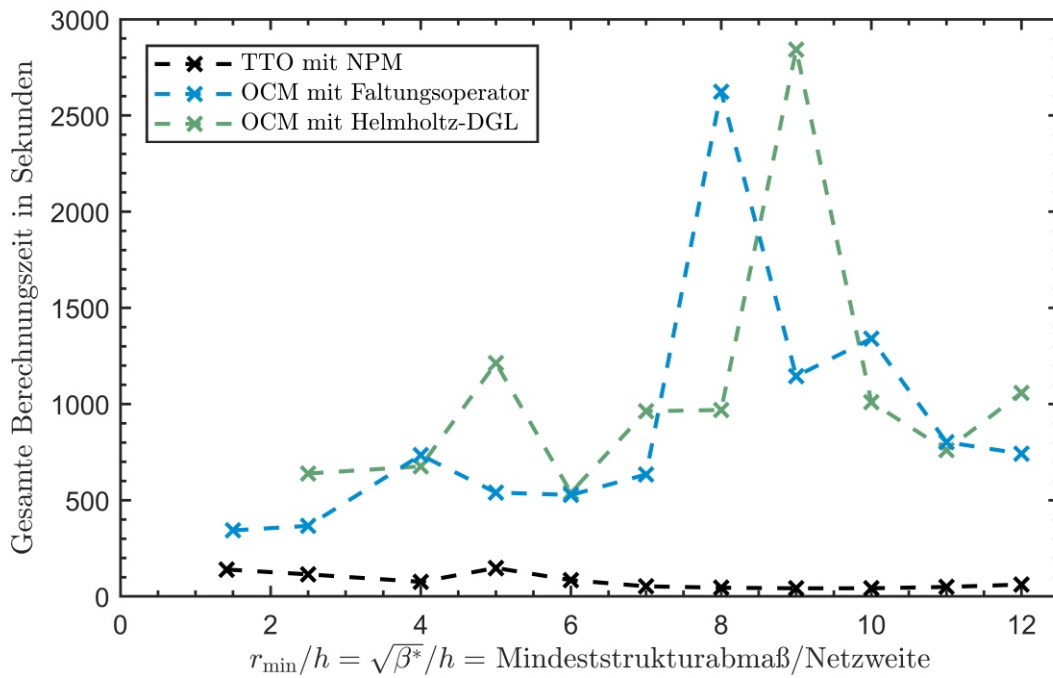


Abbildung 5.3.18.: Gesamte Berechnungszeit inklusive FEM bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums gemäß Gl. (4.1.32) mit $\Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} = 10^{-2}$ für die Berechnungen in Abb. 5.3.15

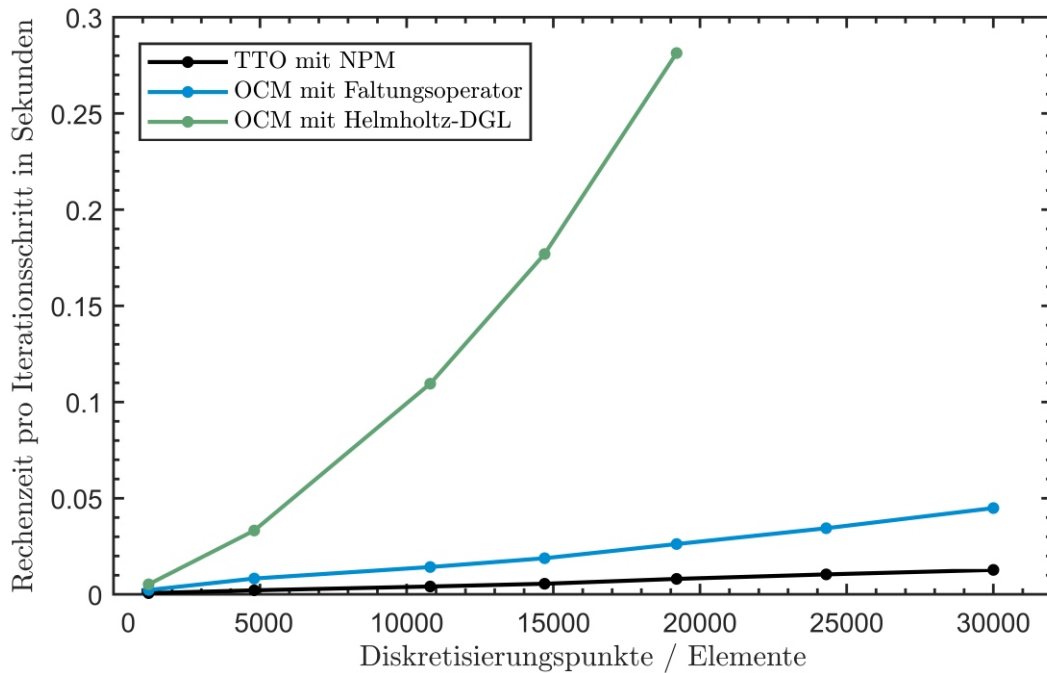


Abbildung 5.3.19.: Rechenzeit der reinen Optimierung pro Iterationsschritt für den MBB-Balken gemäß Abb. 5.1.3 für unterschiedliche Diskretisierungen h wobei r_χ so gewählt wurde, dass es für die jeweilige Diskretisierung dem Minimum der charakteristischen Länge entspricht, welche nötig ist, um numerische Instabilitäten zu unterbinden.

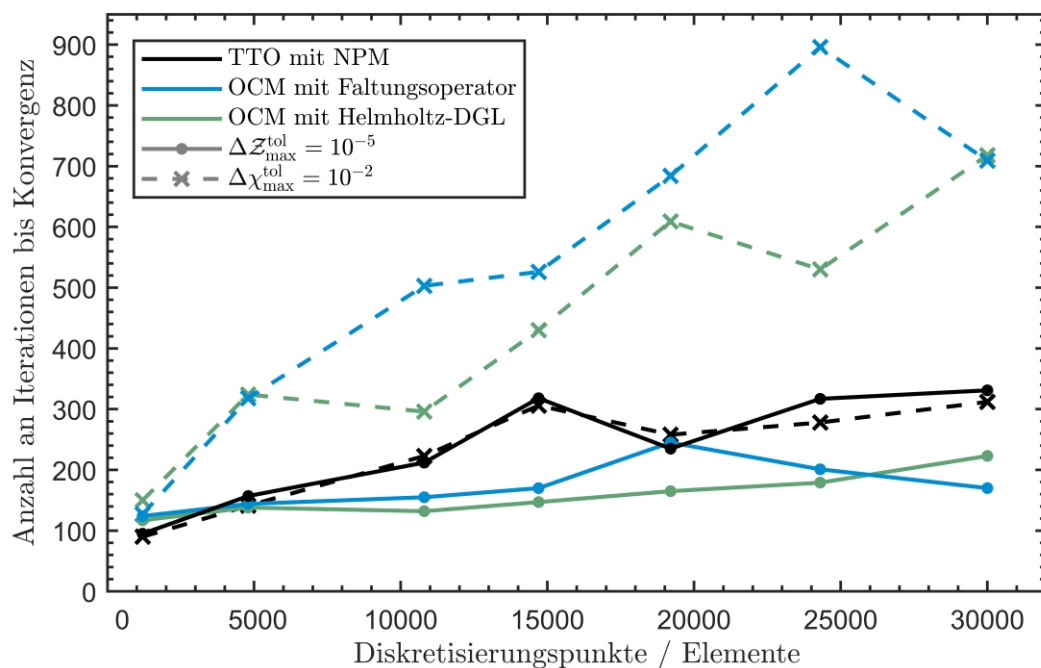


Abbildung 5.3.20.: Anzahl an Iterationen bis zum Erreichen der Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) und Gl. (4.1.32) für die Berechnungen in Abb. 5.3.19

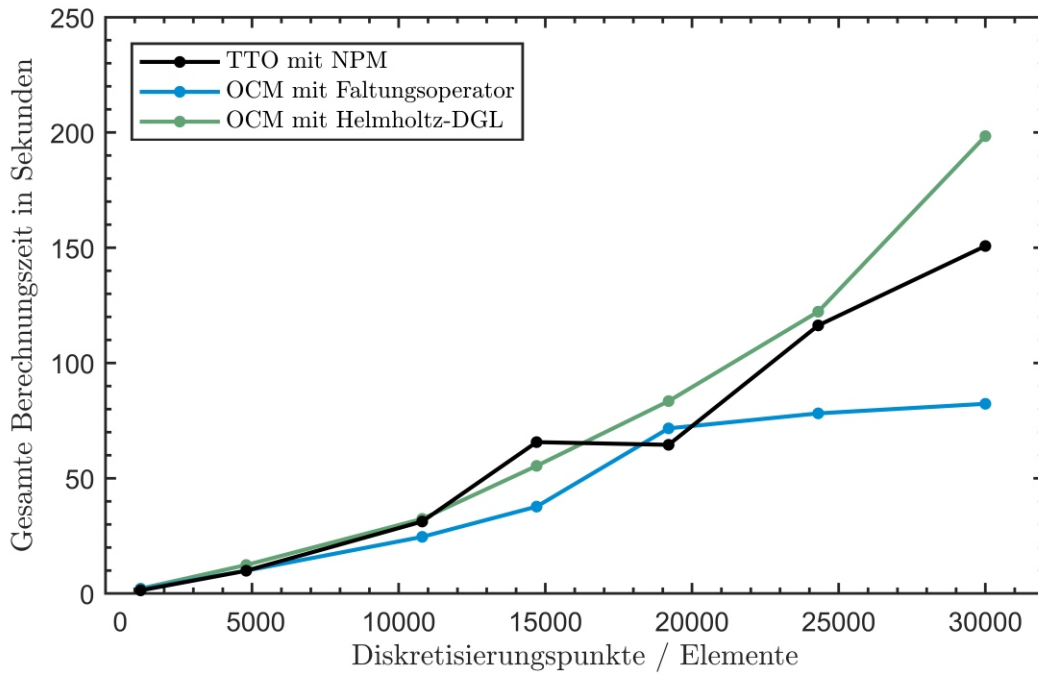


Abbildung 5.3.21.: Gesamte Berechnungszeit inklusive FEM bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ für die Berechnungen in Abb. 5.3.19

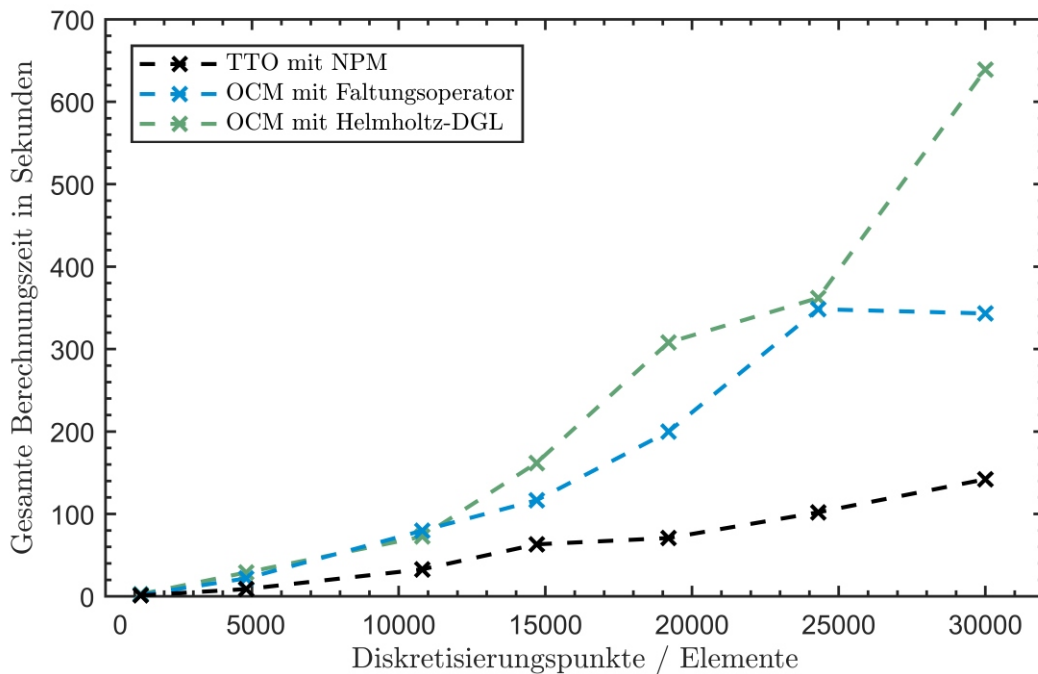


Abbildung 5.3.22.: Gesamte Berechnungszeit inklusive FEM bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums gemäß Gl. (4.1.32) mit $\Delta \chi_{\text{max}}^{\text{tol}} = 10^{-2}$ für die Berechnungen in Abb. 5.3.19

5.3.6. Mehrlastfall

Bei der Optimierung unter Mehrlastfällen soll eine optimale Topologie für unterschiedliche, nicht gleichzeitig eintretende Lastfälle gefunden werden. Folglich ergibt sich ein Kompromiss der Optimalität zwischen verschiedenen Lastkollektiven, welche unabhängig voneinander auf die Struktur wirken. Beim Einzellast Fall wird davon ausgegangen, dass alle Kräfte gleichzeitig auf die Struktur wirken. Die Ergebnisse der TTO für Randwertprobleme, bei welchen zwei Einzelkräfte jeweils als Einzellastfall und als Mehrlastfall definiert werden, sind in den Abbildungen 5.3.23 und 5.3.24 dargestellt³.

Das Beispiel in Abb. 5.3.23 zeigt die Relevanz der Betrachtung von Mehrlastfällen. Hier stehen die beiden Einzelkräfte im Gleichgewicht, sodass bei einem Einzellastfall keine Verbindung zur Lagerung nötig ist, um eine steife Struktur zu erhalten. Offensichtlich ist dies keine sinnvolle Lösung, sobald eine der Einzelkräfte nicht wirkt (bzw. den Betrag ändert): Es würde zu einer Starrkörperbewegung kommen und die Struktur wäre nicht tragfähig.

Für das Beispiel in Abb. 5.3.24 wäre die beim Einlastfall resultierende Struktur auch tragfähig, falls nur eine der Kräfte wirken würde. Beim Mehrlastfall werden im Vergleich zum Einlastfall jedoch zusätzliche Querverstrebungen ausgebildet, um die Struktur gegen eine Verdrehung bzw. Kippen des horizontalen Segmentes zu verstärken, welches bei einem Ungleichgewicht der Kräfte auftreten würde. Bei unterschiedlichen Kraftbeträgen im Mehrlastfall wird der Lastfall, welcher die betragsmäßig größere Kraft aufweist, priorisiert: Der Bogen und die Querverstrebung, welche an dem Kraftangriffspunkt der betragsmäßig größeren Kraft liegen, werden dicker ausgeprägt, während sich an der betragsmäßig schwächeren Kraft zwei dünnere, nicht bis zum gegenüberliegenden Lager durchgezogene Querverstrebungen ausprägen.

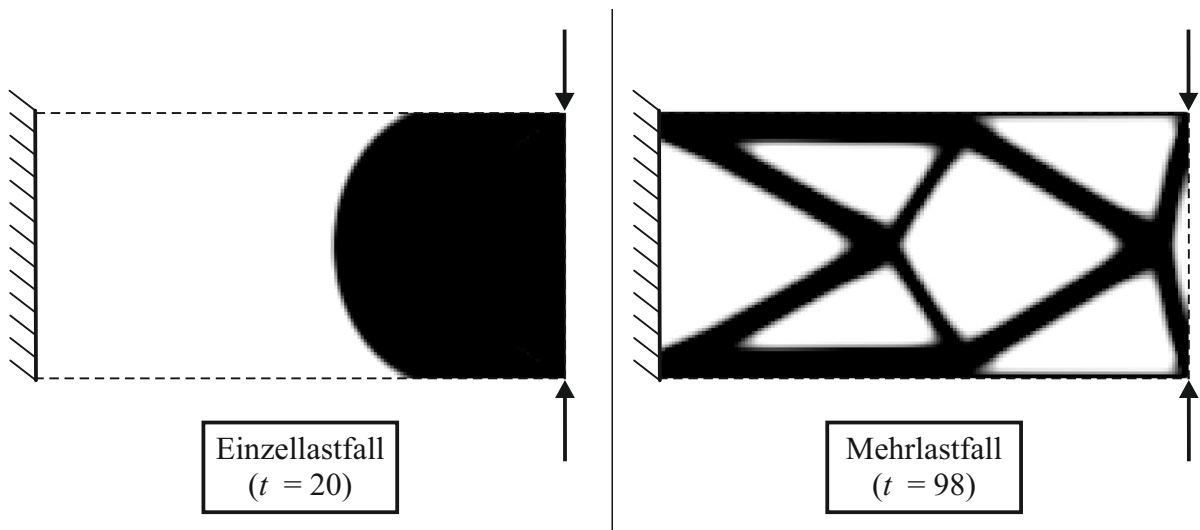


Abbildung 5.3.23.: Biegebalken mit zwei angreifenden Einzellasten für den Einzellastfall und Mehrlastfall für ein Strukturvolumen von $\varrho = 40\%$ und Regularisierungsparameter $\beta^* = 0.3125 \times 10^{-5}$ mit Designraum $\Omega = 2 \times 1$ diskretisiert durch 160×80 Elemente.

³Hierbei wird angenommen, dass je eine Einzelkraft immer einzeln wirkt, sodass sich zwei Lastfälle ergeben. Der zusätzliche mögliche Lastfall, bei welchem beide Kräfte gleichzeitig angreifen, wurde nicht betrachtet.

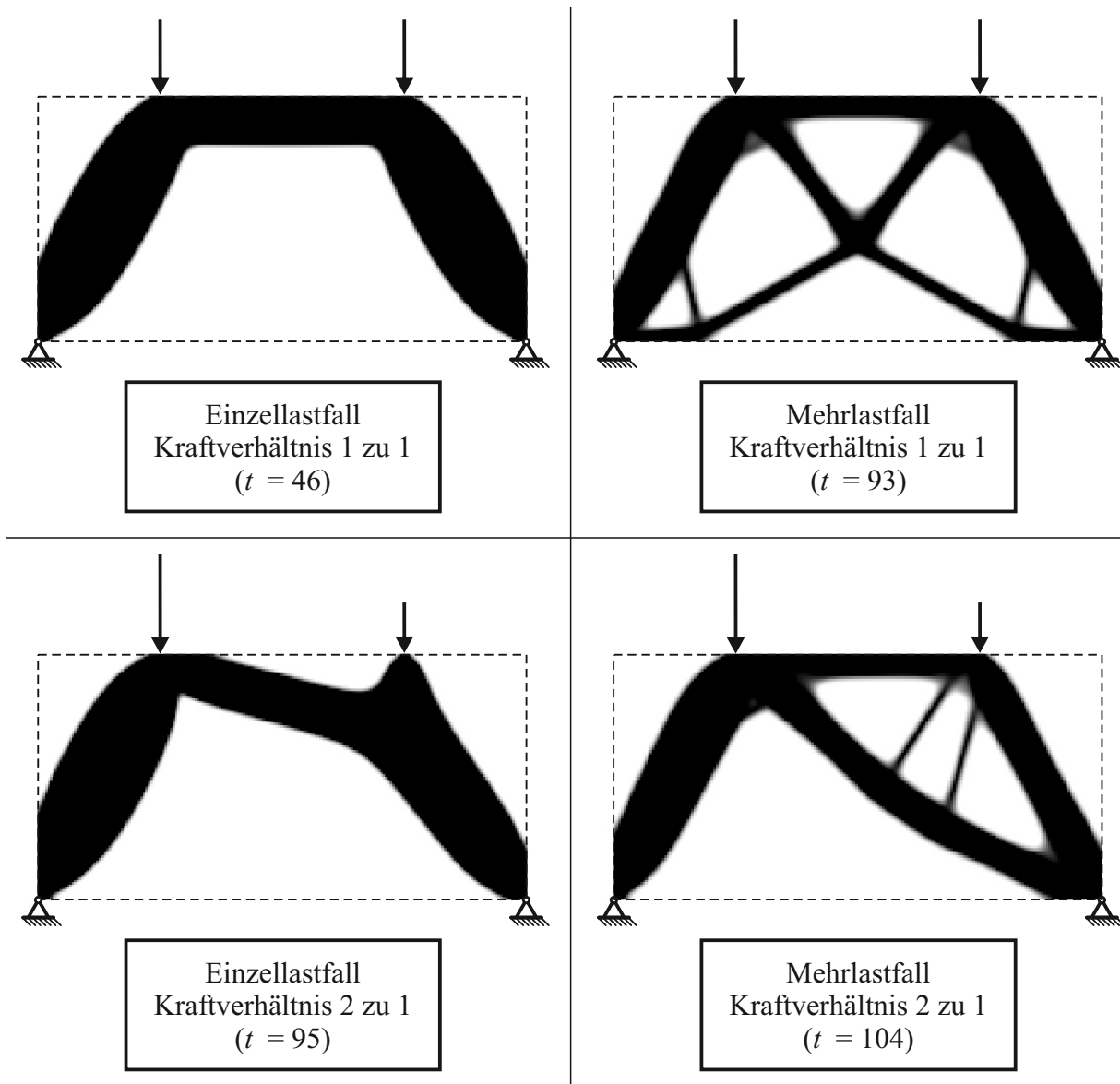


Abbildung 5.3.24.: Beispiel für einen Einzellastfall und Mehrlastfall mit Einfluss der Gewichtung der Lastfälle durch unterschiedliche Kraftverhältnisse. Sämtliche Parameter sind identisch zum Beispiel in Abb. 5.3.23 gewählt und nur die Randbedingungen (d.h. Belastung und Lagerbedingungen) wurden verändert.

5.3.7. Dreidimensionaler Fall

Die Abbildungen 5.3.25 und 5.3.26 zeigen die resultierenden Topologien (Isofläche für $\chi = 0.5$) für die dreidimensionalen Beispiele gemäß Abb. 5.1.5 aus verschiedenen Perspektiven. Für das Biegeproblem in Abb. 5.3.26 wurden zwei unterschiedliche Diskretisierungen verwendet: Die Vernetzungen basieren auf einem strukturierten und einem unstrukturierten zweidimensionalen Netz, welche jeweils in die dritte Raumrichtung extrudiert wurden.

Wie im zweidimensionalen Fall ergeben sich Tragwerke, welche den Spannungstrajektorien folgen. Die Anzahl an benötigten Iterationsschritten sind für die gezeigten Beispiele vergleichbar mit dem zweidimensionalen Fall. Die Verwendung unterschiedlicher Diskretisierungen des Biegeproblems in Abb. 5.3.26 führt zu vergleichbaren Ergebnissen, sodass die Netzunabhängigkeit des Modells auch für den dreidimensionalen Fall empirisch gezeigt werden kann.

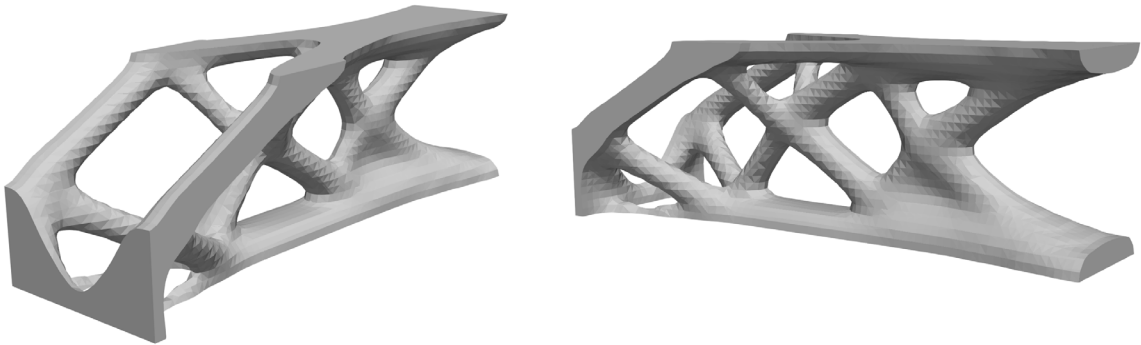


Abbildung 5.3.25.: Ergebnisse für den dreidimensionalen Biegebalken (Abb. 5.1.5) nach $t = 129$ Iterationsschritten für ein Strukturvolumen von $\varrho = 15\%$, Regularisierungsparameter $\beta^* = 350 \times 10^{-5}$ und Netz mit $72 \times 24 \times 24$ Elementen.

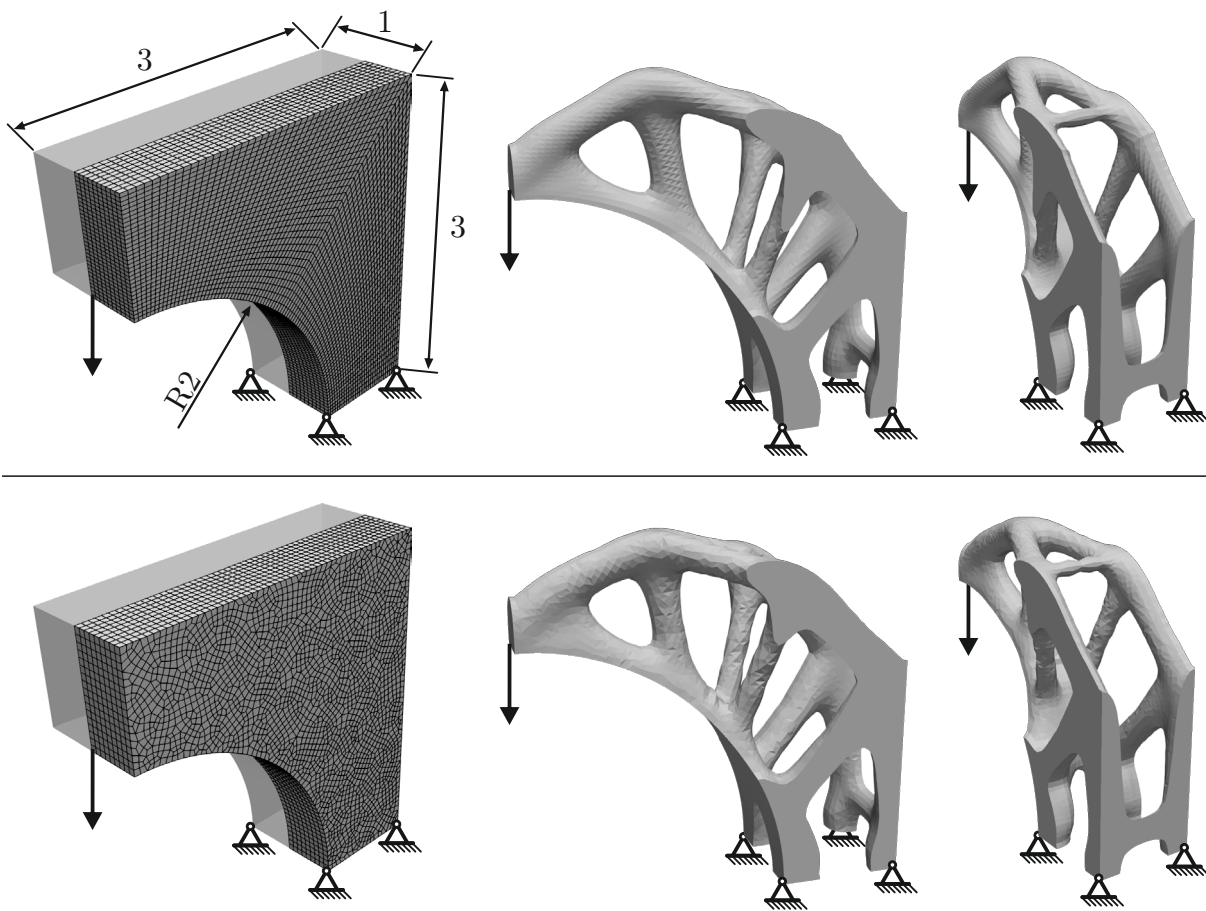


Abbildung 5.3.26.: Ergebnisse für das dreidimensionale Biegeproblem (Abb. 5.1.5) für zwei unterschiedliche Vernetzungen nach $t = 155$ Iterationsschritten. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 13\%$ und der Regularisierungsparameter beträgt $\beta^* = 1500 \times 10^{-5}$ in beiden Fällen.

5.3.8. Realitätsbezogene Beispiele

Abbildung 5.3.27 zeigt die Randbedingungen sowie das Ergebnis der Topologieoptimierung ein simples Brückenrandwertproblem. Für die Fahrbahnplatte ist für den gesamten Optimierungsprozess Vollmaterial $\chi = 1$ vorgegeben. Die Belastung ist durch eine verteilte, senkrecht nach unten wirkende Flächenlast, welche auf die gesamte Fahrbahnplatte wirkt, gegeben. Die Lagerung ist durch ein Festlager (Freiheitsgrade in alle Raumrichtungen sind gesperrt) an der Unterseite des Designraumes und durch die Symmetriebedingungen gegeben.

Die optimierte Struktur besitzt oberhalb der Fahrbahnplatte einen über die gesamte Länge der Brücke reichender Bogen mit vier Querstreben, was einer klassischen Bogenbrücke mit unterliegender Fahrbahnplatte entspricht. Unterhalb der Fahrbahnplatte bilden sich Säulen mit Verästlungen vom Lager zur Fahrbahnplatte hin aus, welche leichte Ähnlichkeit zu Baumstrukturen aufweisen.

Ein weiteres realitätsbezogenes Beispiel ist in Abb. 5.3.28 gegeben, welches ein mögliches Randwertproblem für das rechte Schwenklager bzw. Radlager einer gelenkten Vorderachse eines Kraftfahrzeuges darstellt (Fahrtrichtung in positive x -Achsenrichtung). Die Lagerungsbedingungen sind definiert durch die beiden Aufnahmen der Querlenker sowie der Lagerung durch die Spurstange. Der Basislastfall ist gegeben durch das Sturzmoment um die negative x -Achse, welches aus dem Fahrzeuggewicht resultiert, sowie durch die beiden Bremskräfte, welche sich bei einem Bremsvorgang durch den an das Schwenklager angebrachten Bremsklotz ergeben. Zusätzlich wird ein Spurmoment um die positive sowie die negative y -Achse aufgebracht, wobei hiervon jeweils eine Drehrichtung in Kombination mit dem Basislastfall einen Lastfall ergeben. Damit ergeben sich zwei Lastfälle, welche die Belastung des Schwenklagers bei einer Links- bzw. Rechtskurvenfahrt simulieren. Die Momente werden über verteilte Knotenkräfte auf die Radaufnahme aufgebracht. Für die Radaufnahme ist für den gesamten Optimierungsprozess Vollmaterial $\chi = 1$ vorgegeben.

Das Ergebnis der Optimierung ist in Abb. 5.3.29 gegeben. Trotz verhältnismäßig komplexer Randbedingungen ergibt sich ein plausibles Ergebnis: Alle Lager- und Krafteinleitungspunkte sind miteinander verbunden, wobei sich zur Spurstange hin tragwerksähnliche Strukturen ergeben. An den Krafteinleitungspunkten der Bremskräfte sowie an der unteren Querlenkeraufnahme bilden sich hingegen massivere Strukturen aus, deren Oberflächen glatt, d.h. mit schwacher Krümmung, in die restliche Struktur übergehen.

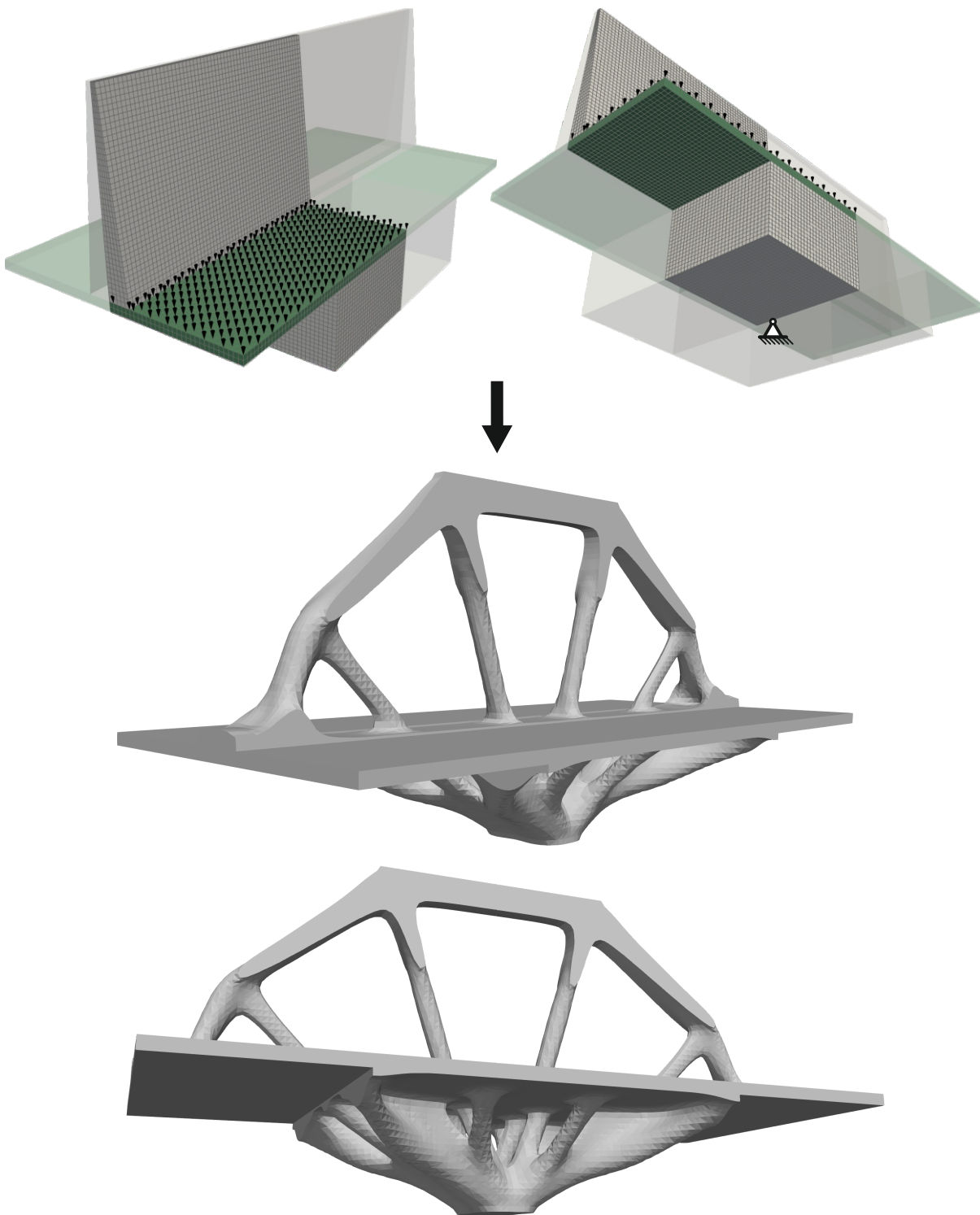


Abbildung 5.3.27.: Randbedingungen für ein simples Brückenrandwertproblem sowie das Ergebnis der Optimierung aus verschiedenen Perspektiven für ein Zielvolumen von $\varrho = 25\%$ (inklusive Fahrbahnplatte) nach $t = 160$ Iterationsschritten. Die Fahrbahnplatte ist in grün markiert und ist als Vollmaterialkomponente der Struktur vordefiniert.

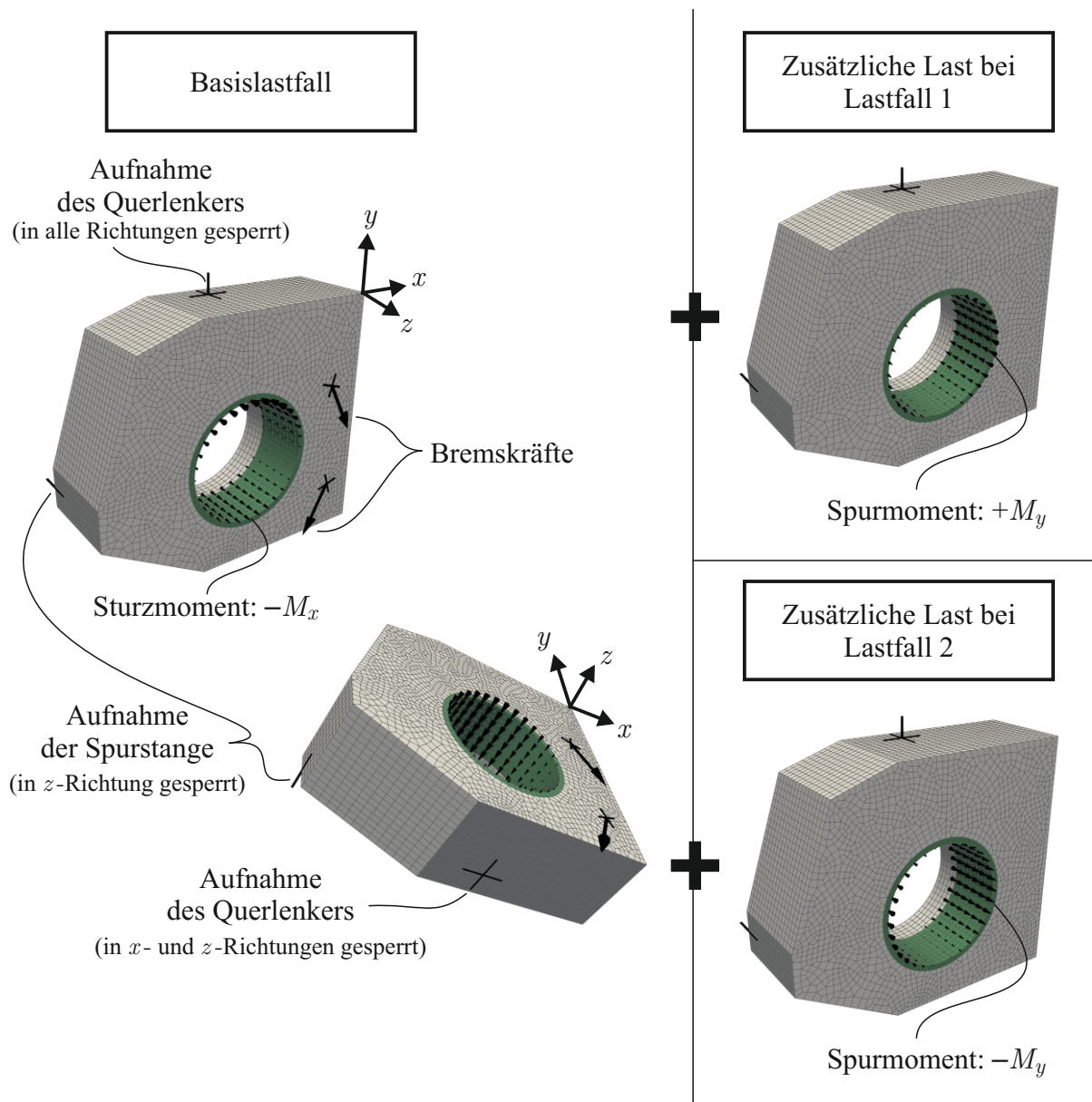


Abbildung 5.3.28.: Randbedingungen für ein simples Schwenklager. Die Radaufnahme ist in grün markiert und ist als Vollmaterialkomponente der Struktur vordefiniert.

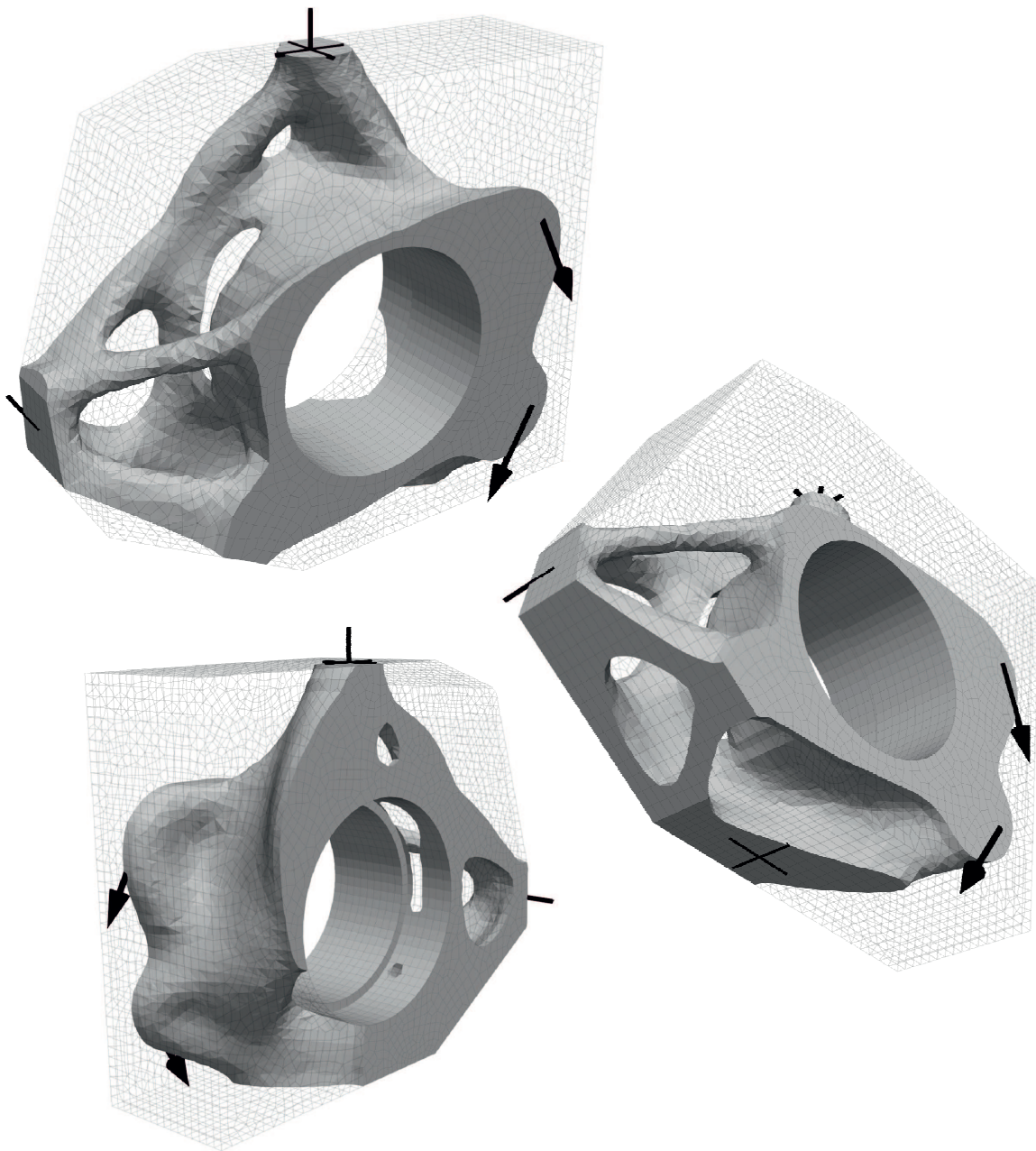


Abbildung 5.3.29.: Ergebnis der Optimierung für das Randwertproblem gemäß Abb. 5.3.28 aus verschiedenen Perspektiven für ein Strukturvolumen von $\varrho = 27.5\%$ (inklusive Radaufnahme) nach $t = 63$ Iterationsschritten. Die Bremskräfte sowie Lagerungsbedingungen sind zur besseren Orientierung dargestellt.

5.3.9. Zusammenfassung

Die Anwendung der NPM auf die TTO basierend auf dem Hamilton-Prinzip für die Nachgiebigkeitsminimierung unter Volumenbeschränkung führt zu netzunabhängigen Ergebnissen und zeigt ein stabiles Konvergenzverhalten. Die Eignung des Verfahrens für den zwei- und dreidimensionalen Fall, für Einzell- und Mehrlastfälle sowie bei Anwendung von strukturierten und unstrukturierten Netzen wurde an unterschiedlichen, teilweise realitätsbezogenen, Beispielen gezeigt. Mit der Definition für den Regularisierungsparameter gemäß Gl. (4.2.41) ergibt sich ein Mindeststrukturabmaß mit Radius von etwa $\sqrt{\beta^*}$. Damit lässt sich das Mindeststrukturabmaß (und damit indirekt die Strukturkomplexität) a priori ohne Parameterstudien für die Regularisierung unabhängig vom Randwertproblem einstellen.

Die numerische Effizienz der NPM in Kombination mit der TTO wurde im Vergleich zu etablierten Optimierungsansätzen gezeigt: Die Rechenzeit pro Iterationsschritt ist geringer als bei der Anwendung der OCM mit einem Dichtefilter und ist geringer als bei der Anwendung eines Filters basierend auf der Lösung einer Helmholtz-DGL, falls das Mindeststrukturabmaß nicht größer als das zwanzigfache der Netzweite ist. Die Anzahl an benötigten Iterationsschritten (d.h. Anzahl an FEM-Auswertungen) ist vergleichbar mit der OCM, jedoch sind weitere umfangreiche Parameter- und Randwertproblemstudien nötig, um klare Aussagen bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit der unterschiedlichen Verfahren im Vergleich zueinander treffen zu können.

5.4. Vergleich der Verfahren

In den Abschnitten 5.2 und 5.3 wurden zwei- sowie dreidimensionale Ergebnisse für das Modell basierend auf Wachstumsprozessen mit diskontinuierlichem Galerkin-Ansatz und für das Modell mit konstantem Strukturvolumen und der NPM präsentiert. Das Konvergenzverhalten sowie die Netzunabhängigkeit beider Modelle wurde gezeigt. Bei beiden Modellen erfolgt die Analyse des mechanischen Problems mit Hilfe der FEM und die jeweiligen Evolutionsgleichungen ergeben sich aus der Stationaritätsbedingung (3.7.18). Die Unterschiede zwischen den beiden Modellen sind in Tabelle 5.4.1 gegenübergestellt

	Modell gemäß Abschnitt 5.2	Modell gemäß Abschnitt 5.3
Strukturvolumen	Wachstumsansatz gemäß Gl. (4.4.3)	konstant
Lagrange-Multiplikator	analytisch gemäß Gl. (4.4.10)	Bisektion gemäß Algorithmus 4.1
Materialinterpolation	quadratische Mischung der Nachgiebigkeiten gemäß Gl. (3.7.5)	Potenzgesetz gemäß Gl. (3.7.3)
Differentialgleichung	schwache Form gemäß Gl. (3.7.25)	starke Form gemäß Gl. (3.7.30)
Diskretisierung	$\tilde{\chi}$ in Integrationspunkten	$\bar{\chi}$ elementweise
Regularisierung	diskontinuierlicher Galerkin-Ansatz gemäß Abschnitt 4.2.2	NPM gemäß Abschnitt 4.2.4

Tabelle 5.4.1.: Vergleichende Übersicht der Unterschiede der beiden gezeigten Modelle.

Ein direkter Vergleich der Modelle ist nicht trivial: Die Materialinterpolation $\rho(\chi)$ beider Modelle sowie die Steifigkeit des „Leermaterials“ ist jeweils unterschiedlich. Dementsprechend ergeben sich unterschiedliche Materialsteifigkeit für alle $\chi \neq 1$, wodurch ein direkter Vergleich der Struktursteifigkeit, welche auf den gesamten Designraum bezogen ist, verhindert wird. Zudem ist die Volumen Nebenbedingung $f(\chi)$ unterschiedlich definiert, sodass das Strukturvolumen ϱ in beiden Modellen eine physikalisch unterschiedliche Bedeutungen hat.

Die Rechenzeit der reinen Optimierung ist für beide Modelle gegenüber dem Rechenaufwand der FEM pro Iterationsschritt vernachlässigbar. Dementsprechend ist der Wachstumsansatz (welcher bei Anwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz obligatorisch ist, um netzunabhängige Ergebnisse zu erhalten) bezüglich der gesamten Rechenzeit klar im Nachteil: Die Struktur wächst allmählich ausgehend von einem nicht vorhandenen Strukturvolumen

$\varrho \rightarrow 0$, sodass je nach Zielvolumen eine unterschiedliche große Anzahl an Iterationen nötig ist, um selbiges zu erreichen. In den hier gezeigten Beispielen waren je nach Zielvolumen und Randwertproblem zwischen 400 und 1500 Iterationsschritte nötig. Das Modell mit konstantem Strukturvolumen und NPM benötigt zwischen 100 und 200 Iterationsschritte, im Extremfall bis zu 500, falls sich sehr feine Struktursegmente ausbilden. Zwar steigt bei der NPM der Rechenaufwand der Optimierung mit größerem Regularisierungsparameter β^* , jedoch ist dies im Vergleich zu der weitaus höheren Anzahl an Iterationsschritten bei Anwendung des Wachstumsansatzes vernachlässigbar.

Bei Anwendung der NPM ist es möglich das Mindeststrukturabmaß mit Hilfe des Regularisierungsparameters β^* einzustellen. Bei Anwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes führt eine übermäßige Erhöhung des Regularisierungsparameters β^* zu einer Homogenisierung der DichtevARIABLE $\tilde{\chi}$ innerhalb der finiten Elemente, d.h. es ergibt sich eine elementweise konstante Dichte trotz Diskretisierung selbiger in den Integrationspunkten des FE-Netzes.

Bei Anwendung des diskontinuierlichen Galerkin-Ansatzes wird die DichtevARIABLE in den Integrationspunkten diskretisiert, wodurch sich eine höhere Auflösung der Topologie im Vergleich zu der elementweise diskretisierten Dichte bei Anwendung der NPM bei gleichem FE-Netz ergibt. Zudem werden die Triebkräfte mit einer höheren (numerischen) Genauigkeit innerhalb der Integrationspunkte berechnet. Da die NPM unabhängig von der Art der Diskretisierung der Datenpunkte ist, ist es grundsätzlich möglich den Laplace-Operator für in den Integrationspunkten diskretisierte DichtevARIABLEN zu berechnen. Allerdings müssten hierfür geeignete Verfahren zur Bestimmung der Nachbarschaftsbeziehungen sowie den Neumann-Randbedingungen entwickelt werden. Um die Herleitung der Nachbarschaftsbeziehungen zu vereinfachen, könnte die WLS-Methode (siehe Abschnitt 4.2.4) mit geeigneten Wichtungsfunktionen angewandt werden. Die korrekte Umsetzung der Neumann-Randbedingungen bleibt dennoch eine Herausforderung, da die Diskretisierung in den Integrationspunkten keine Datenpunkte auf dem Rand des Designraumes liefern. In jedem Fall ist die Implementierung der NPM mit einem höheren Aufwand verbunden als der diskontinuierliche Galerkin-Ansatz, bei welchem, abgesehen von den speziellen Ansatzfunktionen, nur übliche FEM-Formulierungen Verwendung finden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Modell gemäß Abschnitt 5.3 basierend auf der NPM aufgrund der schnelleren Konvergenz bzw. geringeren Anzahl an Iterationsschritten sowie der Möglichkeit das Mindeststrukturabmaß einstellen zu können besser für industrielle Produktentwicklung geeignet ist. Das Wachstumsmodell gemäß 5.2 könnte mit entsprechenden Modifikationen für die Modellierung von biologischem Wachstum bzw. biomechanischen Problemstellungen von Interesse sein.

6. Erweiterungsmöglichkeiten des Modells

Das Hamilton-Prinzip gemäß Gl. (3.5.8) kann für eine beliebige Anzahl an Designvariablen, welche im Vektor $\boldsymbol{v}$ gesammelt werden, zur Modellierung einer thermodynamischen Optimierung (TDO) angewandt werden. Designvariablen $\boldsymbol{v}$, welche Einfluss auf die (lokalen) Materialeigenschaften haben, werden entsprechend in den Tensor der Materialsteifigkeit $\mathbb{E}$ für linear-elastische Materialien bzw. in die Helmholtz-Energie Ψ eingebunden. Ein Beispiel hierfür ist das Modell für die TDO der Materialorientierung von anisotropen Materialien in Abschnitt 7. Um eine Nachgiebigkeitsminimierung zu erhalten, muss die Helmholtz-Energie Ψ gemäß Gl. (3.6.1) in den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und Materialnachgiebigkeit $\mathbb{E}^{-1}$ definiert werden. Alternativ kann das Prinzip der virtuellen Arbeit als eine von der eigentlichen Optimierung entkoppelte Nebenbedingung aufgefasst werden, sodass die Verschiebungen keine zu bestimmenden Unbekannten innerhalb der Optimierung sind. In diesem Fall kann die Helmholtz-Energie Ψ innerhalb des Hamilton-Prinzips in den Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und Materialsteifigkeit $\mathbb{E}$ geschrieben werden, wobei die Dehnungen als abhängig von den Designvariablen definiert werden müssen (siehe Anhang A.1).

Allgemeinere Einflüsse der Designvariablen $\boldsymbol{v}$ auf das mechanische System, beispielsweise Einflüsse auf die Arbeit der äußeren Kräfte wie Volumen- bzw. Gewichtskräfte, können in der Gibbs-Energie $\mathcal{G}$ bzw. in das Prinzip der virtuellen Arbeit eingebunden werden. Prinzipiell können durch andere Definitionen bzw. Erweiterungen der Gibbs-Energie $\mathcal{G}$ andere physikalische Effekte (beispielsweise thermische oder elektro-magnetische Effekte) inklusive Einführung entsprechender Designvariablen modelliert bzw. mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit gekoppelt werden. Des Weiteren kann die TDO auf Zielfunktionen angewandt bzw. um diese erweitert werden, welche nicht mechanisch bzw. physikalisch motiviert sind, indem entsprechende Variationsprinzipien formuliert werden. Ein Beispiel hierfür ist das Modell für die Zug-Druck-Anisotropie in Abschnitt 8.

Für jede interne Variable bzw. jede Menge aus voneinander abhängigen Designvariablen muss eine Dissipationsfunktion Φ inklusive entsprechender Parameter wie Fließgrenzen und Viskositäten definiert werden (siehe Abschnitt 3.7.3), um Evolutionsgleichungen für die jeweiligen Designvariablen herleiten zu können. Bei dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Modelle haben sich rein viskose Ansätze durchgesetzt: Die Viskositäten der jeweiligen Designvariablen steuern jeweils die Schrittweite und dienen der numerischen Dämpfung, um Oszillationen der Lösung zwischen Iterationsschritten zu unterbinden.

Die Stationaritätsbedingung gemäß Gl. (3.5.8) wird ausgewertet, indem die Variation in Abhängigkeit jeder Designvariable durchgeführt wird. Dies führt zu Differentialgleichungen bzw. Evolutionsgleichungen für jede interne Variable bzw. jede Menge aus voneinander abhängigen Designvariablen. Die Evolutionsgleichungen können dann mittels einer expliziten Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (4.1.33) gelöst werden und dienen als Update-Schema bzw. Optimierungsalgorithmus für die jeweiligen Designvariablen. Durch eine explizite Zeitdiskretisierung kann der Optimierungsschritt der jeweiligen Designvariablen entkoppelt voneinander und simultan ausgeführt werden: Das Update der Designvariablen hängt nur von Zuständen aller Designvariablen des letzten Iterationsschrittes ab, welche bekannt sind, sodass alle Evolutionsgleichun-

gen simultan in jedem Iterationsschritt ausgewertet werden können. Dadurch ist es möglich die Lösung der Evolutionsgleichungen mittels expliziter Zeitdiskretisierung mit anderen Optimierungsansätzen, wie beispielsweise generalisierte mathematische Optimierungsalgorithmen (SLP, SQP, MMA), zu kombinieren [Jantos u. a. (2019b)].

In dem nun folgenden Kapitel 7 wird ein TDO-Verfahren für eine *continuous fiber angle optimization* (CFAO) zur simultanen Optimierung der Topologie und der lokalen Materialorientierung von anisotropen Materialien inklusive einer Filtertechnik zur Kontrolle der Faserkrümmung vorgestellt. Im darauf folgenden Kapitel 8 wird ein Modell für die TDO von Materialien mit einer Zug-Druck-Anisotropie gezeigt: Die elastischen Konstanten können für Zug- und Druckbelastung unabhängig voneinander gewählt werden. Dadurch kann beispielsweise die Optimierung eines Stahl-Beton-Systems modelliert werden, wobei Beton nur unter Druck und Stahl nur unter Zug belastet wird.

7. Optimierung der Materialorientierung

7.1. Einleitung

Moderne Hochleistungsmaterialien, wie beispielsweise Lamine oder Faserverbundwerkstoffe, sind anisotrop. Viele additive Fertigungsverfahren ergeben Strukturen mit anisotropen Eigenschaften, wie zum Beispiel beim selektiven Laserschmelzen oder Filamentdruck. Auch Naturmaterialien wie Holz oder Knochen weisen anisotrope Eigenschaften auf. Dementsprechend ist es aus technischer Sicht sinnvoll die Orientierung anisotroper Materialien zu optimieren bzw. diese für natürliche (Wachstums-)Prozesse zu modellieren. Eine Übersicht der bestehenden Ansätze in der Literatur wurde bereits in Abschnitt 2.7 gegeben.

Im vorliegenden Abschnitt werden die Modelle nach Jantos u. a. (2018) und Jantos u. a. (2019b), welche beide auf einer TDO mittels des Hamilton-Prinzips basieren, im Detail diskutiert. Beide Modelle basieren auf der Beschreibung der Materialorientierung nach Junker (2014b), worin ein Modell zur effizienten Beschreibung der Orientierung der Mikrostruktur von polykristallinen Formgedächtnislegierungen gegeben ist. Die lokale Materialorientierung eines vordefinierten anisotropen Materials wird hierbei durch eine Rotation im dreidimensionalen Raum beschrieben, welche durch drei kontinuierliche Euler-Winkel parametrisiert ist. Alternativ können andere Rotationsparameter bzw. Rotationsvariablen wie Rodrigues-Parameter oder Quaternionen angewandt werden. Je nach Art der Parameter werden im dreidimensionalen Fall drei bis sechs unabhängige skalare Parameter benötigt, um die Rotation vollständig beschreiben zu können [Stuelpnagel (1964)]. Die Beschreibung mittels Euler-Winkel ist intuitiv nachvollziehbar und besitzt die geringst mögliche Anzahl an unabhängigen skalaren Parametern. Dementsprechend wird im Rahmen dieser Arbeit nur die Formulierung mittels Euler-Winkel präsentiert, da andere Parametrisierungen keine offensichtlichen Vorteile mit sich bringen.

Durch die Anwendung von kontinuierlichen Euler-Winkeln können die hier gezeigten Modelle zur Optimierung der Materialorientierung der *continuous fiber angle optimization* (CFAO) zugeordnet werden. Mit solch einer Modellformulierung kann beispielsweise die lokale Ausrichtung der Fasern eines definierten Faserverbundwerkstoffes optimiert werden. In den folgenden Abschnitten werden zwei Ansätze zur simultanen TDO der Topologie und der lokalen Materialorientierung diskutiert, welche sich in der angewandten Topologieoptimierung unterscheiden: Ein Wachstumsansatz nach Jantos u. a. (2018) gemäß Abschnitt 5.2 und ein SIMP-Ansatz inklusive einer Filtertechnik zur Kontrolle der Faserkrümmung, wobei hierbei im Gegensatz zu Jantos u. a. (2019b) nicht die OCM zur Optimierung der Topologie genutzt wird, sondern die TTO basierend auf der starken Form der Evolutionsgleichung (3.7.31) gemäß Jantos u. a. (2019a).

7.2. Hamilton-Prinzip

7.2.1. Materialgesetz

Parametrisierung der Rotation

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte TDO für eine CFAO basiert auf der Rotation eines vorgegebenen anisotropen Vollmaterials, welches durch den (konstanten) Materialtensor $\mathbb{E}_0$ gegeben ist. Allgemein kann eine Rotation mit Hilfe einer orthonormalen 3×3 Rotationsmatrix $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ beschrieben werden. Wie bereits in Abschnitt 7.1 beschrieben, wird im Rahmen dieser Arbeit die Rotation $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\alpha)$ über drei Euler-Winkel $\alpha = \alpha_k \mathbf{e}_k = (\phi \ \nu \ \omega)^T$ parametrisiert. Die Euler-Winkel $\alpha = \alpha(\mathbf{x}) \ \forall \ \mathbf{x} \in \Omega$ werden als Designvariablen deklariert, sodass die lokale Materialorientierung einer Optimierung unterliegt. Aufgrund der Periodizität der Parametrisierung mittels Euler-Winkel müssen keine Intervallbegrenzungen für selbige in die Optimierung eingebunden werden. Dementsprechend führen beliebige Werte der Euler-Winkel α immer zu einer korrekten Rotation, da die Rotationsmatrix $\mathbf{Q}(\alpha)$ ohne weitere Nebenbedingungen stets orthogonal ist

Eine Rotation mit Euler-Winkeln ist durch eine Verknüpfung von drei sukzessiven Einzelrotationen um ausgewählte Achsen (meist Basisachsen) definiert. Dabei sind unterschiedliche Möglichkeiten für die Wahl und Reihenfolge der Rotationsachsen möglich. In Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine x_3 - x'_1 - x''_3 -Rotation eingeführt, welche in Abb. 7.2.1 dargestellt ist. Die Rotation eines Körpers ist in diesem Fall wie folgt aufgebaut:

1. Rotation um ω um die x_3 -Achse
2. Rotation um ν um die rotierte x'_1 -Achse
3. Rotation um ϕ um die rotierte x''_3 -Achse mit finaler Orientierung $(x'''_1 \ x'''_2 \ x'''_3)^T$

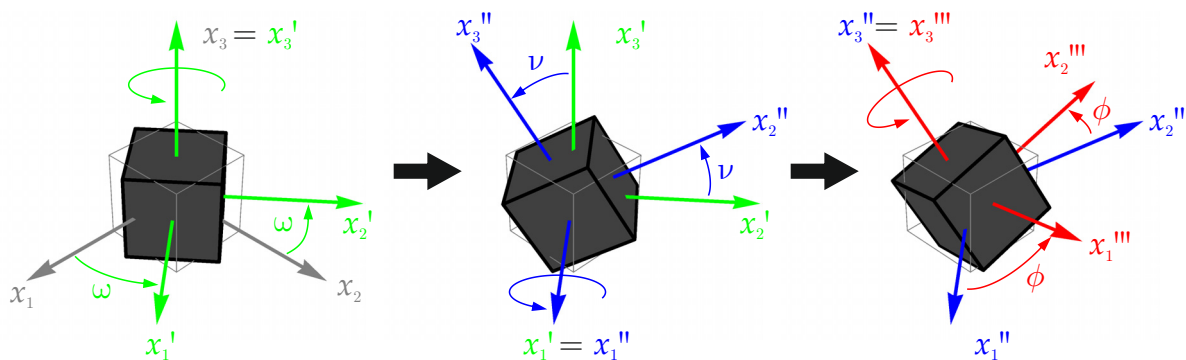


Abbildung 7.2.1.: Beschreibung der Rotation eines Einheitswürfel mit Hilfe von Euler-Winkeln.

Damit ergibt sich für die Rotationsmatrix

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Q}(\phi, \nu, \omega) \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um } x_3\text{-Achse}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \nu & 0 & \sin \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \nu & 0 & \cos \nu \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um } x_1\text{-Achse}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um } x_3\text{-Achse}} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \omega - \sin \phi \cos \nu \sin \omega & -\sin \phi \cos \nu \cos \omega & \sin \phi \sin \nu \\ \sin \phi \cos \omega + \cos \phi \cos \nu \sin \omega & \cos \phi \cos \nu \cos \omega - \sin \phi \sin \omega & -\cos \phi \sin \nu \\ \sin \nu \sin \omega & \sin \nu \cos \omega & \cos \nu \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Die Rotation eines dreidimensionalen Materialtensors vierter Stufe $\mathbb{E}$ ist in Indexnotation definiert als

$$(\mathbb{E}_R)_{ijkl} = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} Q_{k\gamma} Q_{l\delta} (\mathbb{E})_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{7.2.2}$$

Da eine solche Formulierung vor allem bei der Implementation umständlich ist, wird nun die *Cowin-Mehrabadi*-Notation nach Mehrabadi u. Cowin (1990) eingeführt. Wie auch bei der Voigt-Notation werden bei der Cowin-Mehrabadi-Notation die Symmetrieeigenschaften des Materialtensors $\mathbb{E}$ und des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ ausgenutzt, um diese jeweils durch sechsdimensionale Tensoren mit reduzierter Stufe abzubilden. Im Unterschied zur Voigt-Notation basiert die Cowin-Mehrabadi-Notation auf einer Basistransformation, sodass bei der Rotation die Tensoreigenschaften erhalten bleiben. Die Umrechnung von Tensoren vierter und zweiter Stufe in ihre Voigt- und Cowin-Mehrabadi-Notation sind in Anhang A.2 gegeben. Mit Hilfe der Cowin-Mehrabadi-Notation lässt sich die Rotation aus Gl. (7.2.2) schreiben als

$$\mathbb{E}_R^6(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}), \tag{7.2.3}$$

wobei $\mathbb{E}_0^6$ den sechsdimensionalen Steifigkeitstensor zweiter Stufe des zu optimierenden anisotropen Materials in seiner Cowin-Mehrabadi-Notation repräsentiert. Die insgesamt vier 3×3 Rotationsmatrizen $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha})$ werden durch zwei orthogonale 6×6 Rotationsmatrizen $\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})$ in der Cowin-Mehrabadi-Notation ersetzt (siehe Anhang A.2). Aufgrund der Orthogonalität

$$[\mathbf{Q}^6]^T = [\mathbf{Q}^6]^{-1} \quad \text{bzw.} \quad [\mathbf{Q}^6]^{-T} = \mathbf{Q}^6, \tag{7.2.4}$$

sind die Rotation des Steifigkeitstensors $\mathbb{E}_0^6$ und des Nachgiebigkeitstensors $[\mathbb{E}_0^6]^{-1}$ äquivalent:

$$[\mathbb{E}_R^6(\boldsymbol{\alpha})]^{-1} = \left[[\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}) \right]^{-1} = [\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot [\mathbb{E}_0^6]^{-1} \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}). \tag{7.2.5}$$

Steifigkeitstensor für Wachstumsansatz

Für den Wachstumsansatz bei simultaner Optimierung der Topologie und Materialorientierung nach Jantos u. a. (2018) wird der Materialtensor analog zu Gl. (3.7.4) gewählt und gemäß Gl. (7.2.5) rotiert, sodass sich der (effektive) Materialtensor in Cowin-Mehrabadi-Notation

$$\mathbb{E}^6(\chi, \boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \left[(1 - \chi)^2 [\mathbb{E}_{\text{Leer}}^6]^{-1} + [1 - (1 - \chi)^2] [\mathbb{E}_0^6]^{-1} \right] \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}) \tag{7.2.6}$$

ergibt. Der Steifigkeitstensor für „Leermaterial“ $\mathbb{E}_{\text{Leer}}^6$ kann prinzipiell unabhängig vom Vollmaterialtensor $\mathbb{E}_0^6$ gewählt werden, solange das „Leermaterial“ eine vergleichsweise sehr kleine, aber nicht verschwindende Steifigkeit besitzt. Bei dem hier beabsichtigten Wachstumsansatz beginnt das Modell mit einem vollständig leeren Design Raum $\chi^0 = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ wird für das „Leermaterial“ $\mathbb{E}_{\text{Leer}}^6$ ein isotropes Material

$$[\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_{\text{Leer}}^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbb{E}_{\text{Leer}}^6 \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \quad (7.2.7)$$

angenommen, sodass die Anfangsbedingungen für die Materialorientierung gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}^0$ keinen Einfluss auf das Ergebnis der Optimierung haben. Dementsprechend kann Gl. (7.2.6) umgeschrieben werden zu

$$[\mathbb{E}^6(\chi, \boldsymbol{\alpha})]^{-1} = (1 - \chi)^2 \underbrace{[\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot [\mathbb{E}_0^6]^{-1} \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})}_{[\mathbb{E}_R^6(\boldsymbol{\alpha})]^{-1}} + [1 - (1 - \chi)^2] [\mathbb{E}_{\text{Leer}}^6]^{-1} \quad (7.2.8)$$

Zur Bestimmung der Triebkräfte, welche später in Abschnitt 7.2.3 diskutiert werden, wird die Ableitung des Nachgiebigkeitstensors $[\mathbb{E}^6]^{-1}$ nach den Designvariablen χ und $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_k \mathbf{e}_k = (\phi \ \nu \ \omega)^T$ benötigt, welche gegeben sind durch

$$\frac{\partial}{\partial \chi} [\mathbb{E}^6]^{-1} = 2(1 - \chi) \left([\mathbb{E}_R^6]^{-1} - [\mathbb{E}_{\text{Leer}}^6]^{-1} \right) \quad (7.2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} [\mathbb{E}^6]^{-1} &= (1 - \chi)^2 \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left([\mathbb{E}_R^6]^{-1} \right) \\ &= (1 - \chi)^2 \left(\left[\frac{\partial \mathbf{Q}^6}{\partial \alpha_k} \right]^T \cdot [\mathbb{E}_0^6]^{-1} \cdot \mathbf{Q}^6 + [\mathbf{Q}^6]^T \cdot [\mathbb{E}_0^6]^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}^6}{\partial \alpha_k} \right) \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Steifigkeitstensor für SIMP-Ansatz

Beim CFAO-Ansatz basierend auf der SIMP-Formulierung nach Jantos u. a. (2019b) ergibt sich der (effektive) Steifigkeitstensor aus der Rotation des Tensors aus Gl. (3.7.2) zu

$$\mathbb{E}^6(\chi, \boldsymbol{\alpha}) = \rho(\chi) \underbrace{[\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})}_{\mathbb{E}_R^6(\boldsymbol{\alpha})} \quad (7.2.11)$$

Hierbei ist kein separater Materialtensor für „Leermaterial“ gegeben, obwohl dies prinzipiell möglich ist [Sigmund (2007)]. Damit ist die Definition eines isotropen „Leermaterials“ wie bei dem Wachstumsansatz im vorherigen Abschnitt nicht möglich. Für den hier gezeigten Ansatz basierend auf einem durchgehend konstant gehaltenem Strukturvolumen ist ein isotropes „Leermaterial“ jedoch nicht sinnvoll bzw. bringt keine Vorteile: Aufgrund der homogenen Anfangsbedingung $\chi^0 = \varrho \forall \mathbf{x} \in \Omega$ ist zu Beginn der Optimierung kein „Leermaterial“ im gesamten Designraum vorhanden. Im Simulationsverlauf entstehen zwar große Bereiche mit „Leermaterial“, diese sind aber weitestgehend irrelevant da hier die Steifigkeit sehr gering ist, sodass hier der Einfluss der Orientierung des Materials vernachlässigbar ist. Zudem ist die optimale Materialorientierung in Bereichen mit „Leermaterial“ ohnehin nicht von Interesse für technische Anwendungen.

Die Ableitung des Steifigkeitstensors $\mathbb{E}^6$ nach den Designvariablen χ und $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_k \mathbf{e}_k =$

$(\phi \ \nu \ \omega)^T$, welche später für die Auswertung der Triebkräfte benötigt werden, ergeben sich mit dem Potenzgesetz $\rho(\chi) = \chi^p$ gemäß Gl. (3.7.3) zu

$$\frac{\partial \mathbb{E}^6}{\partial \chi} = \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \mathbb{E}_R^6 = p \chi^{p-1} [\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}) \quad (7.2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}^6}{\partial \alpha_k} = \rho \frac{\partial \mathbb{E}_R^6}{\partial \alpha_k} = \chi^p \left(\left[\frac{\partial \mathbf{Q}^6}{\partial \alpha_k} \right]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6 + [\mathbf{Q}^6]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}^6}{\partial \alpha_k} \right). \quad (7.2.13)$$

7.2.2. Dissipationsfunktion

Für die Euler-Winkel werden keine zusätzlichen Nebenbedingungen für die Optimierung benötigt und zudem wird kein Funktional zwecks Regularisierung selbiger eingeführt. Damit ist die Dissipationsfunktion die einzige Größe, welche neben der Helmholtz-Energie zur Anwendung des Hamilton-Prinzips definiert werden muss. Die Helmholtz-Energie ergibt sich gemäß Gl. (3.6.1) mit den Materialtensoren aus den beiden vorherigen Abschnitten. Die Dissipationsfunktion ergibt sich aus der Addition der zwei Terme

$$\Phi = \Phi_\chi + \Phi_\alpha. \quad (7.2.14)$$

Hierbei ist Φ_χ der Anteil der Dissipation für die DichtevARIABLE χ gemäß Gl. (3.7.15)

$$\Phi_\chi = \frac{1}{2} \eta_\chi \dot{\chi}^2 \quad (7.2.15)$$

und der Anteil für die Euler-Winkel ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= \frac{1}{2} \frac{\eta_\alpha}{\rho^*} \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2}{1 - \cos^2 \nu} \left\| \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \right\| \\ &= \frac{\eta_\alpha}{\rho^*} \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2}{1 - \cos^2 \nu} \left(\dot{\phi}^2 + \dot{\nu}^2 + \dot{\omega}^2 + 2 \dot{\phi} \dot{\omega} \cos \nu \right). \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

Hierbei beschreibt η_α die Viskosität, welche unabhängig von der Viskosität für die DichtevARIABLE η_χ zwecks numerischer Dämpfung bzw. Schrittweitenkontrolle definiert wird. Die Norm der Spannungen $\|\boldsymbol{\sigma}^2\|$ führt dazu, dass die Evolution der Euler-Winkel weniger von dem Betrag der lokalen Spannungen als durch deren Ausrichtung beeinflusst wird. Dadurch kann die Viskosität η_α unabhängig vom Randwertproblem als konstant definiert werden. Der Faktor ρ^* wird in Abhängigkeit der anisotropen Eigenschaften des „Leermaterials“ definiert als

$$\rho^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbb{E}(\chi = \chi_{\min}, \boldsymbol{\alpha}) \text{ isotrop (Gl. (7.2.8))} \\ \rho(\chi) & \text{falls } \mathbb{E}(\chi = \chi_{\min}, \boldsymbol{\alpha}) \text{ anisotrop (Gl. (7.2.11))} \end{cases} \quad (7.2.17)$$

Für anisotropes „Leermaterial“ nimmt dementsprechend die Dissipation mit abnehmender Materialdichte zu, sodass die Evolution der Euler-Winkel in „Leermaterial“ gebremst bzw. gestoppt wird. Dadurch werden unnötige Änderungen und damit mögliche Oszillationen der Materialorientierung in Bereichen, die kein Teil der Struktur sind, reduziert. Bei isotropen „Leermaterial“ ist dieser Effekt automatisch gegeben, sodass $\rho^* = 1$ angewandt wird. Der Term $1 - \cos^2 \nu$ in Gl. (7.2.16) verhindert eine Division durch null in der später gezeigten Evolutionsgleichung für $\cos \nu = \pm 1$.

Die Dissipation wird in Abhängigkeit des Winkelgeschwindigkeitstensors $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ zwecks Objektivität (englisch *frame independence*) definiert [Jantos u. a. (2019a)]: Die Änderung der Beträge der Euler-Winkel, um einen Körper in eine gegebene Lage zu rotieren, hängen von der relativen Lage des Körpers zum gegebenen Koordinatensystem ab, da die Euler-Winkel selber über die Basis-Achsen des Koordinatensystems definiert sind. Der Winkelgeschwindigkeitstensor ist unabhängig von dem ausgehenden Koordinatensystem: Gegeben sei eine Rotation $\mathbf{Q}(t)$, welche von einem beliebigen Koordinatensystem ausgeht, welches durch die Rotation $\mathbf{Q}_0$ des Basissystems definiert ist. Die verknüpfte Rotation ist dann durch $\mathbf{Q}_1(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}_0$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi \left(\dot{\mathbf{Q}}_1(t) \cdot [\mathbf{Q}_1(t)]^{-1} \right) &= \Phi \left(\left[\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \right] \cdot \left[\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \right]^{-1} \right) \\ &= \Phi \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^{-1} \cdot [\mathbf{Q}(t)]^{-1} \right) \\ &= \Phi \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot [\mathbf{Q}(t)]^{-1} \right). \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Folglich ist die Dissipation und damit die (zeitliche) Evolution der Materialorientierung unabhängig von der zeitinvarianten Basisorientierung $\mathbf{Q}_0$.

7.2.3. Stationaritätsbedingung

Für die simultane TDO der Topologie und der lokalen Materialorientierung ergibt sich die Stationaritätsbedingung des Hamilton-Prinzips zu

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{G}(\mathbf{u}, \chi, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (7.2.19)$$

$$\delta_{\mathbf{v}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{v}} \mathcal{G} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \cdot \delta \mathbf{v} \right) dV + \delta_{\mathbf{v}} \mathcal{C} + \delta_{\mathbf{v}} \mathcal{R} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{v} = \{\delta \chi, \delta \boldsymbol{\alpha}\}, \quad (7.2.20)$$

wobei die Funktionale für die Nebenbedingungen $\mathcal{C}$ sowie für die Regularisierung $\mathcal{R}$ unabhängig von den Euler-Winkeln $\boldsymbol{\alpha}$ sind. Die Variation in Abhängigkeit der Verschiebungen führt analog zu Gl. (3.7.17) zum Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^6 \cdot \mathbb{E}^6(\chi, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^6 dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \quad (7.2.21)$$

wobei nun der entsprechende anisotrope Materialtensor $\mathbb{E}^6(\chi, \boldsymbol{\alpha})$ gemäß Gl. (7.2.8) bzw. Gl. (7.2.11) in der Cowin-Mehrabadi-Notation eingesetzt wird. Wie zuvor auch, kann Gl. (7.2.21) mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode zur Bestimmung der Verschiebungen $\mathbf{u}$ angewandt werden.

Die Variation in Abhängigkeit der DichtevARIABLE χ führt zu den bereits bekannten Evolutionsgleichungen (4.2.17) bzw. (3.7.31), wobei hier nun die Triebkräfte in der Cowin-Mehrabadi-Notation berechnet werden als

$$\tau_{\chi} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^6 \cdot \frac{\partial}{\partial \chi} [\mathbb{E}^6]^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^6 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^6 \cdot \frac{\partial \mathbb{E}^6}{\partial \chi} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^6, \quad (7.2.22)$$

wobei die Ableitungen der Materialtensoren in Gl. (7.2.9) bzw. Gl. (7.2.12) gegeben sind.

Die Variation in Abhängig der Euler-Winkel α ergibt

$$\int_{\Omega} \left[-\tau_{\phi} + 2 \frac{\eta_{\alpha}}{\rho^*} \frac{\|\sigma\|^2}{1 - \cos^2 \nu} \left(\dot{\phi} + \dot{\omega} \cos \nu \right) \right] \delta \phi \, dV = 0 \quad \forall \delta \phi \quad (7.2.23)$$

$$\int_{\Omega} \left[-\tau_{\nu} + 2 \frac{\eta_{\alpha}}{\rho^*} \frac{\|\sigma\|^2}{1 - \cos^2 \nu} \dot{\nu} \right] \delta \nu \, dV = 0 \quad \forall \delta \nu \quad (7.2.24)$$

$$\int_{\Omega} \left[-\tau_{\omega} + 2 \frac{\eta_{\alpha}}{\rho^*} \frac{\|\sigma\|^2}{1 - \cos^2 \nu} \left(\dot{\omega} + \dot{\phi} \cos \nu \right) \right] \delta \omega \, dV = 0 \quad \forall \delta \omega \quad (7.2.25)$$

mit den Triebkräften

$$\tau_k = -\frac{1}{2} \sigma^6 \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_k} [\mathbb{E}^6]^{-1} \cdot \sigma^6 = \frac{1}{2} \epsilon^6 \cdot \frac{\partial \mathbb{E}^6}{\partial \alpha_k} \cdot \epsilon^6 \quad \text{mit } k \in \{\phi, \nu, \omega\}, \quad (7.2.26)$$

wobei die Ableitungen der Materialtensoren in Gl. (7.2.10) bzw. Gl. (7.2.13) gegeben sind. Die Variationen (7.2.23) bis (7.2.25) ergeben ein Gleichungssystem, aus welchem die Evolutionsgleichungen für die Euler-Winkel

$$\dot{\alpha} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \frac{\rho^*}{\sqrt{2} \eta_{\alpha} \|\sigma\|^2} \begin{pmatrix} \tau_{\phi} - \tau_{\omega} \cos \nu \\ \tau_{\nu} (1 - \cos^2 \nu) \\ \tau_{\omega} - \tau_{\phi} \cos \nu \end{pmatrix} \quad (7.2.27)$$

folgen.

7.2.4. Numerische Lösung

Für ein Optimierungsschritt der Euler-Winkel können die Evolutionsgleichungen (7.2.27) mit Hilfe der expliziten Zeitdiskretisierung

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + \underbrace{N_j \Delta t}_{=1} \dot{\alpha}(\epsilon^i, \chi^i, \alpha^i) \quad (7.2.28)$$

simultan zum Optimierungsschritt für die DichtevARIABLE χ ausgewertet werden (siehe Abb. 7.2.2). Hierbei sind keine inneren Iterationsschritte nötig, d.h. das Update in den Euler-Winkeln erfolgt bei Anwendung der starken Form der Evolutionsgleichung (3.7.31) einmalig pro Schleifendurchlauf über N_j gemäß Abb. 4.3.2. Dementsprechend gilt $N_j \Delta t = 1$. Die Auswertung der Evolutionsgleichung (7.2.27) bzw. das Update der Euler-Winkel gemäß Gl. (7.2.28) kann lokal ausgeführt werden, d.h. in jedem Diskretisierungspunkt separat.

Die Diskretisierung der Euler-Winkel erfolgt für den Wachstumsansatz analog zu Gl. (4.2.1) in den Integrationspunkten des FE-Netzes [Jantos u. a. (2019a)]. Für den SIMP-Ansatz werden die Euler-Winkel elementweise diskretisiert, sodass sich die die Triebkräfte τ_k analog zu Gl. (4.2.3) ergeben als [Jantos u. a. (2019b)]

$$\bar{\tau}_k = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \tau_k \, dV \quad \text{mit } k \in \{\phi, \nu, \omega\}. \quad (7.2.29)$$

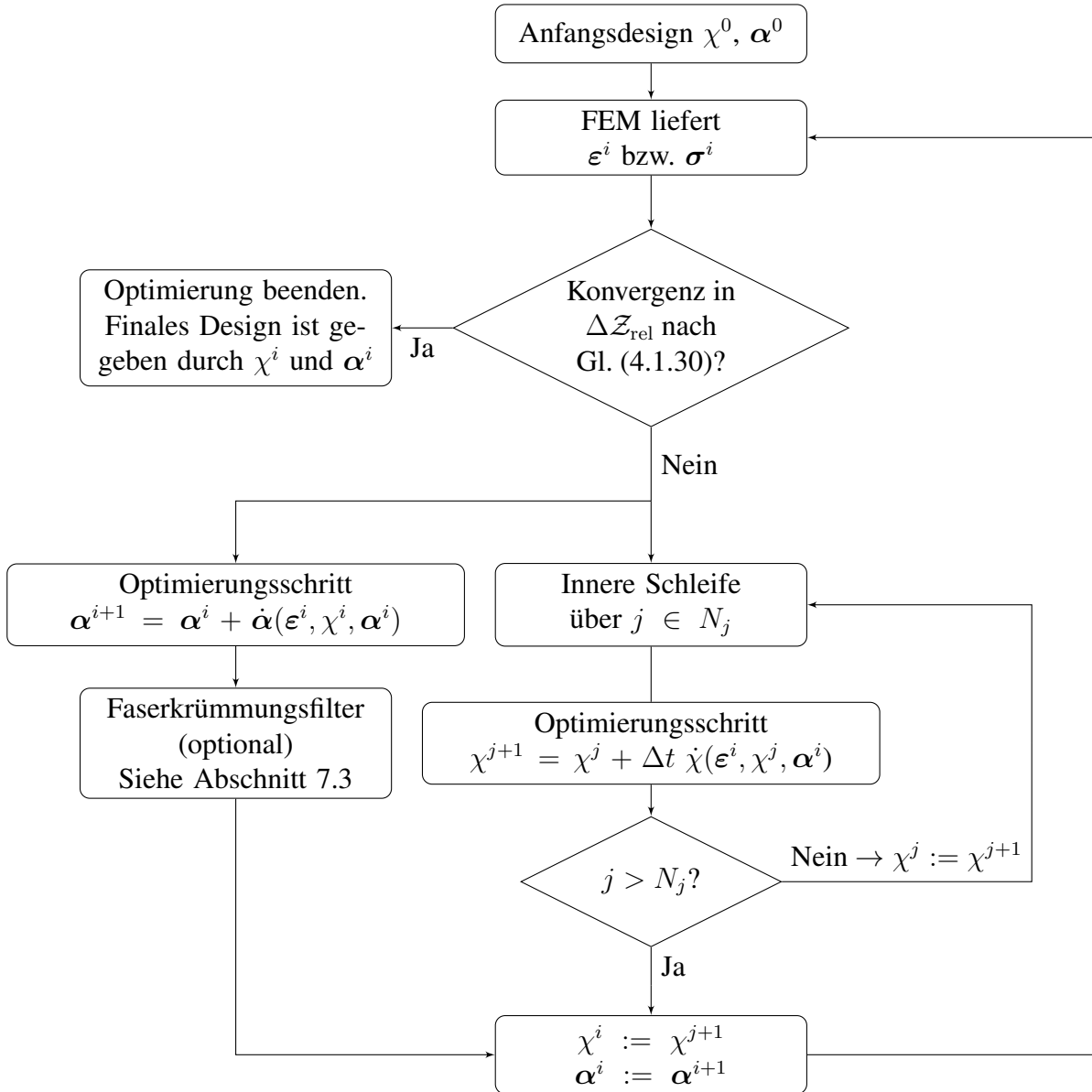


Abbildung 7.2.2.: Allgemeiner Programmablaufplan für die simultane Optimierung der Topologie χ und lokalen Materialorientierung α .

Analog wird auch $\|\sigma\|^2$ in Gl. (7.2.27) durch

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \|\sigma\|^2 dV \quad (7.2.30)$$

ersetzt. Im folgenden Abschnitt wird eine Filtertechnik zur Kontrolle der Faserkrümmung diskutiert. Der Faserkrümmungsfiler ist optional und wird (falls angewandt) einmalig nach jedem Update der Euler-Winkel ausgeführt.

7.3. FaserkrümmungsfILTER

Aus Sicht der Fertigung von langfaserigen Verbundwerkstoffen sind beliebig scharfe Krümmungen der Fasern ungünstig bzw. nicht umsetzbar. Zudem kann es bei der simultanen Optimierung der Topologie und Materialorientierung zu Netzabhängigkeit trotz Regularisierung der Topologieoptimierung kommen [Hoglund u. Smith (2016); Jiang u. a. (2019)], sodass im Allgemeinen eine Regularisierung der Materialorientierung nötig ist. Die direkte Regularisierung bzw. Filterung von üblichen Rotationsparametern bzw. Rotationsvariablen, wie beispielsweise Euler-Winkel, ist aufgrund der bidirektionalen Symmetrieeigenschaften des Materialtensors, d.h. die Steifigkeit sei bei Druck- und Zugbelastung identisch, sodass eine Faser keine Richtung (Vorzeichen des Richtungsvektors) sondern nur eine Orientierung hat, nicht möglich.

Beispielsweise ergibt im zweidimensionalen Fall die Mittlung der zwei Winkel $\alpha = \{0, \pi\}$ den Wert $\pi/2$. Aus mechanischer Sicht wäre jedoch ein sinnvolles Ergebnis einer Filterung bzw. Glättung $\alpha^* = \{0, \pi\}$, da beide Winkel $\alpha = \{0, \pi\}$ das selbe mechanische Ergebnis für den rotierten Materialtensor $\mathbb{E}_R$ liefern. Abbildung 7.3.1 illustriert das Problem für einen allgemeinen Fall. Für den zweidimensionalen Fall mit nur einer Rotationsvariablen existieren Lösungsansätze [Nomura u. a. (2015); Kiyono u. a. (2017)], jedoch ist der allgemeine dreidimensionale Fall mit drei oder mehr Rotationsvariablen weitaus herausfordernder.

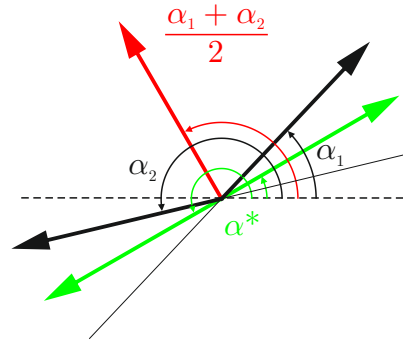


Abbildung 7.3.1.: Die Mittlung der beiden Winkel α_1 und α_2 ist in rot gekennzeichnet. Eine sinnvolle Filtertechnik würde die in grün gekennzeichnete Orientierung α^* ergeben.

Der im folgenden diskutierte Filter nach Jantos u. a. (2019b) ermöglicht die (indirekte) Steuerung der Glattheit des Verlaufs der Materialorientierung bzw. des Faserverlaufes im dreidimensionalen Fall für beliebige, orthotrope Materialien $\mathbb{E}_0$. Der Filter basiert hierbei auf einem Faltungsoperator gemäß Gl. (3.5.1), welcher durch ein Faltungsintegral definiert ist. Dementsprechend wird die lokale Materialorientierung durch eine gewichtete Mittlung der Eigenschaften im näheren Umfeld ersetzt und somit homogenisiert bzw. „geglättet“. Ein solcher Filter fungiert zusätzlich als Regularisierung, wodurch im allgemeinen, d.h. für beliebige Optimierungsalgorithmen, netzunabhängige Ergebnisse garantiert werden¹. Da die direkte Anwendung eines Faltungsintegrals auf die Euler-Winkel zu den genannten Problemen aufgrund der bidirektionalen Symmetrieeigenschaften des Materialtensors führen würde, wird nach Jantos u. a. (2019b) stattdessen der Faltungsoperator auf den (effektiven) Steifigkeitstensor $\mathbb{E}^6(\chi, \alpha)$ angewandt, um damit den gefilterten (effektiven) Steifigkeitstensor $\mathbb{E}^6$ zu erhalten. Anschließend müssen die Rotationsvariablen aus dem gefilterten (effektiven) Steifigkeitstensor $\mathbb{E}^6$ extrahiert werden.

¹In Jantos u. a. (2018) und Jantos u. a. (2019b) werden keine bzw. nur nahezu vernachlässigbare Netzabhängigkeiten berichtet, was (vermutlich) an der Relaxation durch den viskosen Ansatz für die Evolutionsgleichungen liegt. Nichtsdestotrotz ist die primäre Aufgabe des Faserkrümmungsfilters die Glättung des Faserverlaufes zwecks der Produzierbarkeit der Ergebnisse.

Der Filter ist damit in folgende Schritte unterteilt:

$$\alpha \xrightarrow[\text{Filter}]{\substack{\text{effektives} \\ \text{Material}}} \mathbb{E}^6 \xrightarrow[\text{Faltungs-}]{\text{operator}} \overset{\nabla}{\mathbb{E}}^6 \xrightarrow[\text{Paramterextraktion}]{\substack{\text{Dimension} \\ \text{reduzieren}}} \overset{\nabla}{\mathbb{E}}^3 \xrightarrow[\text{Spektral-}]{\text{analyse}} \overset{\nabla}{Q} \xrightarrow[\text{Rotations-}]{\text{parameter}} \overset{\nabla}{\alpha} \quad (7.3.1)$$

wobei gefilterte Größen durch $\overset{\nabla}{\cdot}$ gekennzeichnet sind. Zunächst wird das effektive Material $\mathbb{E}^6(\chi, \alpha)$ in jedem Diskretisierungspunkt bestimmt und dann darauf ein Faltungsoperator angewandt. Damit geht die lokale Dichte χ des Materials in die Filterung der Orientierung ein, auch wenn die DichtevARIABLE χ nicht vom Faserkrümmungsfiler beeinflusst wird. Die Einbeziehung der lokalen Dichte χ ist insofern sinnvoll, als dass die Orientierung in Bereichen, welche kein Teil der Struktur sind, keinen bzw. weniger Einfluss auf die Materialorientierung innerhalb der Struktur haben. Der gefilterte Steifigkeitstensor ist durch Anwendung eines Faltungsoperators gegeben durch

$$\overset{\nabla}{\mathbb{E}}^6(\mathbf{x}_c) = \frac{\int_{\Omega} w_{\alpha}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_f) \mathbb{E}^6(\mathbf{x}_f) dV}{\int_{\Omega} w_{\alpha}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_f) dV} \quad (7.3.2)$$

und nach Jantos u. a. (2019b) für eine elementweise Diskretisierung des Steifigkeitstensors für das jeweilige Element c mit Mittelpunkt $\mathbf{x}_c$ gegeben durch

$$\overset{\nabla}{\mathbb{E}}_c^6 = \frac{\sum_f^{N_e} \left(w_{\alpha}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_f) \bar{\mathbb{E}}_f^6 \Omega_f \right)}{\sum_f^{N_e} \left(w_{\alpha}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_f) \Omega_f \right)} \quad (7.3.3)$$

mit der linearen Abstandswichtung gemäß Gl. (3.5.2)

$$w_{\alpha}(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_f) = \begin{cases} 1 - \frac{\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_f\|}{r_{\alpha}} & \text{falls } \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_f\| \leq r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Hierbei stellt r_{α} den Filterradius dar, welcher den Einflussbereich der Filterung bzw. Homogenisierung definiert und mit welchem sich die Krümmung des Faserverlaufes (indirekt) steuern lässt.

Für den weiteren Simulationsverlauf, d.h. die folgenden Iterationsschritte, werden die Werte der gefilterten Rotationsvariablen $\overset{\nabla}{\alpha}$ benötigt. Die Operation $\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ ist im allgemeinen nicht bijektiv, d.h. $\mathbb{E} \rightarrow \alpha$ hat keine eindeutige Lösung. Für die hier gezeigten Verfahren ist dies aber nicht weiter relevant, da jedes beliebige $\overset{\nabla}{\alpha}$, welches den gefilterten Steifigkeitstensor $\overset{\nabla}{\mathbb{E}}^6$ ergibt, für den weiteren Simulationsverlauf anwendbar ist: Es ist durchaus möglich, dass die Werte der einzelnen Rotationsvariablen zwischen den Iterationen stark oszillieren, obwohl die eigentliche Rotation kleinschrittig, d.h. mit moderater Winkelgeschwindigkeit $\dot{Q} \cdot Q^{-1}$, erfolgt. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{Q} \cdot Q^{-1}$ wird durch den viskosen Ansatz gemäß Gl. (7.2.16) gedämpft und damit einhergehend die Rotation der lokalen Steifigkeitstensoren, sodass die effektiven Materialeigenschaften innerhalb der FE-Analyse zwischen einzelnen Iterationen nicht oszillieren. Folglich ist eine Oszillation der Werte der Rotationsvariablen zwischen Iterations-

schritten für die FE-Analyse unkritisch, sofern die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ durch eine geeignete Wahl der Dissipationsfunktion hinreichend gedämpft wird. Der Filter wird erst nach einem vollständigen Optimierungsschritt aller Rotationsvariablen im Designraum ausgeführt und hat dementsprechend keinen Einfluss auf die Auswertung der Evolutionsgleichungen innerhalb eines Iterationsschrittes. Da die Evolutionsgleichungen nur von dem Design des vorherigen Iterationsschrittes abhängen, nicht aber von der Entwicklungshistorie der Designvariablen über mehrere Iterationsschritte, sind Oszillation der Werte der Rotationsvariablen zwischen Iterationsschritten auch für den Optimierungsprozess unkritisch.

Um einen Satz an Rotationsvariablen $\bar{\alpha}$ zu finden, welche den gefilterten Steifigkeitstensor $\bar{\mathbb{E}}^6$ beschreiben, wird nach Cowin u. Mehrabadi (1987) zunächst die Spektralanalyse des symmetrischen dreidimensionalen Tensors zweiter Stufe

$$\bar{\mathbb{E}}^3 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{E}}_{11}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{12}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{13}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{16}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{26}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{36}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{15}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{25}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{35}^6 \\ \bar{\mathbb{E}}_{16}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{26}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{36}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{12}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{22}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{23}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{14}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{24}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{34}^6 \\ \bar{\mathbb{E}}_{15}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{25}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{35}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{14}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{24}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{34}^6 & \bar{\mathbb{E}}_{13}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{23}^6 + \bar{\mathbb{E}}_{33}^6 \end{pmatrix} \quad (7.3.5)$$

durchgeführt. Damit werden die Symmetrieachsen, d.h. die Hauptachsen bzw. Hauptmaterialrichtungen, des gefilterten Steifigkeitstensor $\bar{\mathbb{E}}^6$ bestimmt, welche mit den Eigenvektoren von $\bar{\mathbb{E}}^3$ übereinstimmen. Die Eigenwerte des Tensors $\bar{\mathbb{E}}^3$ geben die Steifigkeit in Richtung des jeweiligen Eigenvektors an, sodass die Hauptmaterialrichtungen von $\bar{\mathbb{E}}^3$ über die Zuordnung der Elastizitäts-Module des Ausgangsmaterials $\mathbb{E}_0$ zu den Basisachsen eindeutig bestimmt werden können: Gilt beispielsweise für die Elastizitätsmodule entlang der Basishauptachsen des Ausgangsmaterials $\mathbb{E}_0$ die Beziehung $E_3 > E_2 > E_1$, dann ist der erste Eigenvektor (d.h. derjenige, der mit dem größten Eigenwert verknüpft ist) von $\bar{\mathbb{E}}^3$ äquivalent zu der rotierten e_3 -Achse. Dementsprechend ist der zweite Eigenvektor äquivalent zur rotierten e_2 -Achse und der dritte Eigenvektor (d.h. derjenige, der mit dem kleinsten Eigenwert verknüpft ist) zur rotierten e_1 -Achse. Folglich bilden die Eigenvektoren von $\bar{\mathbb{E}}^3$ die rotierte Basis des gefilterten Steifigkeitstensor $\bar{\mathbb{E}}^6$. Für orthotrope Materialien bilden die Eigenvektoren von $\bar{\mathbb{E}}^3$ eine orthogonale Basis, sodass sich hieraus direkt die gefilterte Rotationsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$ ergibt [Cowin u. Mehrabadi (1987)].

Der letzte Schritt der Filtertechnik gemäß (7.3.1) ist die Rückgewinnung der gefilterten Rotationsvariablen $\bar{\alpha}$ aus der gefilterten Rotationsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$. Diese ist abhängig davon, welche Art von Rotationsvariablen bzw. Rotationsparametern gewählt wurden bzw. wie $\mathbf{Q}(\alpha)$ definiert ist. Aus den gleichen Gründen wie für die Operation $\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ muss die Operation $\mathbf{Q} \rightarrow \alpha$ nicht bijektiv bzw. eindeutig sein. Für die Definition der Rotationsmatrix gemäß Gl. (7.2.1) können

die Euler-Winkel $\alpha = (\phi \ \nu \ \omega)^T$ mit der folgenden Operation bestimmt werden

$$|\bar{Q}_{33}| < 1 \rightarrow \begin{cases} \nu = \arccos(\bar{Q}_{33}) \\ \phi = \text{atan2} \left(\frac{\bar{Q}_{13}}{\sin \nu}, -\frac{\bar{Q}_{23}}{\sin \nu} \right) \\ \omega = \text{atan2} \left(\frac{\bar{Q}_{31}}{\sin \nu}, \frac{\bar{Q}_{32}}{\sin \nu} \right) \end{cases} \quad (7.3.6)$$

$$\bar{Q}_{33} = 1 \rightarrow \begin{cases} \nu = 0 \\ \phi + \omega = \text{atan2}(\bar{Q}_{21}, \bar{Q}_{11}) \end{cases} \quad (7.3.7)$$

$$\bar{Q}_{33} = -1 \rightarrow \begin{cases} \nu = \pi \\ \phi - \omega = \text{atan2}(\bar{Q}_{21}, \bar{Q}_{11}) \end{cases} \quad (7.3.8)$$

wobei in den Fällen 7.3.7 und 7.3.8 mit $\nu \in \{0, \pi\}$ die Winkel ϕ oder ω eine Rotation um die selbe Achse definieren, sodass einer der beiden beliebig wählbar ist und der andere Winkel sich aus der gegebenen Beziehung ergibt. Die inverse Tangensfunktion

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{falls } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{falls } x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \wedge y < 0 \end{cases} \quad (7.3.9)$$

ist essentiell, da sie die Quadranteninformationen über die Winkel bewahrt.

7.4. Numerische Ergebnisse

7.4.1. Parameter und Anfangsbedingungen

Materialparameter

Für die numerischen Simulationen wird ein orthotropes Material verwendet, dessen Steifigkeitstensor in der Voigt-Notation gegeben ist durch

$$[\mathbb{E}_0]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \quad (7.4.1)$$

mit den Materialparametern

$$\begin{array}{lll} E_1 = 10 \times 10^3 & \nu_{12} = 0.4 & G_{12} = 10 \times 10^3 \\ E_2 = 50 \times 10^3 & \nu_{13} = 0.3 & G_{13} = 20 \times 10^3 \\ E_3 = 250 \times 10^3 & \nu_{23} = 0.2 & G_{23} = 50 \times 10^3 . \end{array}$$

Folglich gilt $E_3 > E_2 > E_1$. Die Visualisierung der Materialrichtung erfolgt über die Hauptmaterialrichtungen, d.h. die Richtungen entlang der rotierten E_3 -, E_2 - bzw. E_1 -Achsen, welche als Linien dargestellt werden. Die Optimierung gilt (bei Vorgabe eines Zielvolumens ϱ) als konvergiert, sobald das Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ erfüllt ist. Damit gehen automatisch alle Designvariablen des Problems in das Konvergenzkriterium mit ein.

Bei den im Rahmen der vorliegenden Arbeit gezeigten zweidimensionalen Randwertproblemen für die Optimierung der Materialorientierung handelt es sich um *quasi-zweidimensionale* Probleme: Es wird das dreidimensionale Modell für Material und FEM mit Diskretisierung des Designraumes mit einem Element in Richtung der Betrachtungsebene angewandt. Dargestellt wird nur die erste Hauptmaterialrichtung in Form von weißen Strichen. Bei der Optimierung der quasi-zweidimensionalen Randwertproblemen orientiert sich die dritte Hauptmaterialrichtung, welche die geringste Steifigkeit aufweist, in Richtung der Normalen der Betrachtungsebene, da in diese Richtung keine Belastungen gegeben sind [Jantos u. a. (2018)]. Dadurch liegt die zweite Hauptmaterialrichtung des hier angewandten orthogonalen Materials stets in der Betrachtungsebene und ist orthogonal zu der ersten Hauptmaterialrichtung.

Wachstumsansatz

Für die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 7.4.2, welche sich bei Anwendung des Wachstumsansatzes ergeben, werden für die Topologieoptimierung die Beziehungen für die Evolutionsgleichung, Regularisierung, numerische Parameter sowie Anfangsbedingungen gemäß Abschnitt 5.2.1 angewandt. Für die simultane Optimierung der Materialorientierung werden folgende Beziehungen verwendet:

- Materialinterpolation gemäß Gl. (7.2.8)
- Dissipationsfunktion gemäß Gl. (7.2.16) mit $\rho^* = 1$
- Diskretisierung der Euler-Winkel in den Integrationspunkten
- Triebkräfte der DichtevARIABLE gemäß Gl. (7.2.22) mit Gl. (7.2.9)
- Triebkräfte für die Euler-Winkel gemäß Gl. (7.2.26) mit Gl. (7.2.10)
- Evolutionsgleichung für die Euler-Winkel gemäß Gl. (7.2.27)
- explizite Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (7.2.28) (mit $N_j = \Delta t = 1$)
- der FaserkrümmungsfILTER gemäß Abschnitt 7.3 wird nicht angewandt

Für die Viskosität der Euler-Winkel wird der Wert $\eta_\alpha = 10^{-4}$ verwendet. Die Euler-Winkel und damit die Materialorientierung werden analog zur DichtevARIABLE in den Integrationspunkten diskretisiert. Für die Visualisierung in *ParaView* werden die Ergebnisse der Designvariablen $\tilde{\chi}$ und $\tilde{\alpha}$ auf die Knoten des FE-Netzes extrapoliert [Jantos u. a. (2018)]. Aufgrund des Wachstumsansatzes mit isotropen „Leermaterials“ ist die Lösung unabhängig von den Anfangsbedingungen für die Euler-Winkel [Jantos u. a. (2018)]. Dementsprechend können die Anfangsbedingungen für Euler-Winkel α^0 zufällig gewählt werden als

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \nu^0 \\ \omega^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \psi_1 \\ \arccos(2\psi_2 - 1) \\ 2\pi \psi_3 \end{pmatrix}, \quad (7.4.2)$$

wobei $\psi_k \in [0, 1] = \text{konstant} \ \forall \ x \in \Omega$ zufällig generierte Zahlen sind.

SIMP-Ansatz mit konstantem Strukturvolumen

Für die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 7.4.3, welche sich bei Anwendung des SIMP-Ansatzes ergeben, werden für die Topologieoptimierung die Beziehungen, numerischen Parameter sowie Anfangsbedingungen gemäß Abschnitt 5.3.1 angewandt. Für die simultane Optimierung der Materialorientierung werden folgende Beziehungen verwendet:

- Materialinterpolation gemäß Gl. (7.2.11)
- Dissipationsfunktion gemäß Gl. (7.2.16) mit $\rho^* = \rho(\chi) = \chi^p$
- elementweise Diskretisierung der Euler-Winkel
- Triebkräfte der DichtevARIABLE gemäß Gl. (7.2.22) mit Gl. (7.2.12)

- Triebkräfte für die Euler-Winkel gemäß Gl. (7.2.29) und Gl. (7.2.30) mit Gl. (7.2.26) und Gl. (7.2.13)
- Evolutionsgleichung für die Euler-Winkel gemäß Gl. (7.2.27)
- explizite Zeitdiskretisierung gemäß Gl. (7.2.28) (mit $N_j = \Delta t = 1$)

Für die Viskosität der Euler-Winkel wird der Wert

$$\frac{1}{\eta_\alpha} = 0.2 \frac{\pi}{4} ||\mathbb{E}_0|| \approx 2.2584 \times 10^{-5} \quad (7.4.3)$$

verwendet. Die Euler-Winkel und damit die Materialorientierung werden analog zur DichtevARIABLE elementweise diskretisiert. Dementsprechend werden die Homogenisierungen gemäß Gl. (7.2.29) und (7.2.30) angewandt. Es werden Ergebnisse mit verschiedenen Werten für den Filterradius r_α des Faserkrümmungsfilters gemäß Abschnitt 7.3 gezeigt.

Die Anfangsbedingungen der Euler-Winkel α^0 kann einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis der Topologieoptimierung, welche vor allem zu Beginn des Optimierungsprozesses in lokale Minima „fallen“ kann. Um eine möglichst optimale Anfangsausrichtung des Materials zu erhalten, werden die Hauptmaterialrichtungen im ersten Schritt den Hauptspannungsrichtungen zugeordnet, welche sich aus der Aufbringung der gegebenen mechanischen Randbedingung auf ein isotropes Material mit homogener Dichteverteilung ergeben. Gemäß der Annahme $E_3 > E_2 > E_1$ wird die „steifste“ Materialrichtung mit dem Elastizitätsmodul E_3 in Richtung der betragsmäßig größten Hauptspannung und somit der größten Belastung zugeordnet. Die Materialrichtung mit dem „schwächsten“ Elastizitätsmodul E_1 wird entsprechend der Richtung der betragsmäßig kleinsten Hauptspannung zugeordnet. Dies entspricht der Lösung des Optimierungsproblems für scherschwache Materialien ohne Restriktion der Materialorientierung [Bendsøe u. Sigmund (1999, 2003); Gea u. Luo (2004)]. Hierfür werden zunächst die Hauptspannungsrichtungen in jedem diskretisierten Punkt mit Hilfe der FEM für den Fall des isotropen Materials bestimmt, welche sich aus dem Maß nach Haar [Hackl (1999)]

$$\mathbb{E}_{\text{iso}}^6 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\nu=0}^{\pi} \int_{\omega=0}^{2\pi} [\mathbf{Q}^6(\alpha)]^T \cdot \mathbb{E}^6(\chi = \varrho, \alpha) \cdot \mathbf{Q}^6(\alpha) \sin \nu \, d\omega \, d\nu \, d\phi \quad (7.4.4)$$

mit $\chi = \chi^0 = \varrho \, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ ergeben. Für das oben gegebene Material ergibt sich damit der Elastizitätsmodul zu $E_{\text{iso}} \approx 82.4123 \, \varrho^p \times 10^3$ und die Querkontraktionszahl zu $\nu_{\text{iso}} \approx 0.1529$. Bei der Anwendung eines elementweise diskretisierten Materials $\bar{\mathbb{E}}^6$ wird für die Spannungen die Homogenisierung

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \sigma \, dV \quad (7.4.5)$$

für das jeweilige finite Element c angewandt.

Für die Bestimmung der Anfangsbedingungen der Euler-Winkel α^0 aus den Hauptspannungsrichtungen können die Methoden für den Faserkrümmungsfiler genutzt werden: Der Tensor $\mathbb{E}^3$ wird hierfür durch den Spannungstensor σ bzw. $\bar{\sigma}$ zweiter Stufe ersetzt, welcher sich aus der mechanischen Analyse mit dem isotropen Material mit homogener Dichte $\mathbb{E}_{\text{iso}}^6$ ergibt: Die Eigenvektoren des (lokalen) Spannungstensors ergeben dann die Materialhaupttrichtungen wobei der Eigenvektor korrespondierend zur betragsmäßig größten Eigenspannung die erste Hauptmaterialrichtung festlegt und der Eigenvektor korrespondierend zur betragsmäßig kleins-

ten Hauptspannung die dritte Hauptmaterialrichtung festlegt. Mit Hilfe der Spektralanalyse des Spannungstensors lässt sich folglich die Rotationsmatrix Q^0 der Anfangsbedingung bestimmen, woraus sich gemäß Gl. (7.3.6) bis (7.3.8) die Anfangsbedingungen für die Euler-Winkel α^0 bestimmen lassen. Die entsprechenden Anfangsbedingungen der gezeigten Randwertprobleme sind in Abschnitt 5.1 illustriert.

7.4.2. Ergebnisse mit Wachstum

Evolution der Struktur

Die Entwicklung der Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ sowie des Strukturvolumens ϱ für den abgewinkelten Biegebalken (Abb. 5.1.1) sind in Abb. 7.4.1 gegeben. Die entsprechende Entwicklung der Topologie ist in Abb. 7.4.2 gegeben.

Das Wachstum der Topologie ist sehr ähnlich zum Wachstum mit isotropem Material. Die Materialorientierung passt sich der wachsenden Struktur an, wobei sich die Fasern i.d.R. entlang der Balkensegmente bzw. Spannungstrajektoren orientieren. An der Singularität (die Ecke) sind die Fasern radial angeordnet, wobei sich am äußeren Rand dieses Bereiches ein Band bzw. Hülle mit tangential angeordneten Fasern ausprägt, welches sich mit steigendem Strukturvolumen von der Singularität weiter entfernt. Die Entwicklung der Materialorientierung ist im Vergleich zum Strukturwachstum hinreichend schnell, sodass die Materialorientierung in jedem Zeitpunkt bzw. Iterationsschritt plausibel sind.

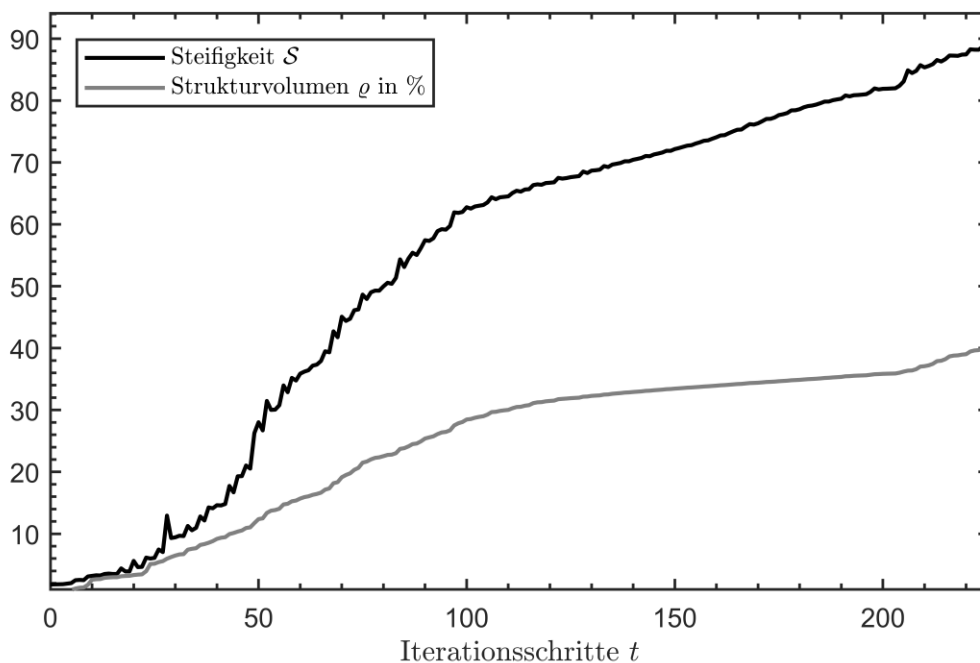


Abbildung 7.4.1.: Entwicklung der Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ und des Strukturvolumens ϱ während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 7.4.2.

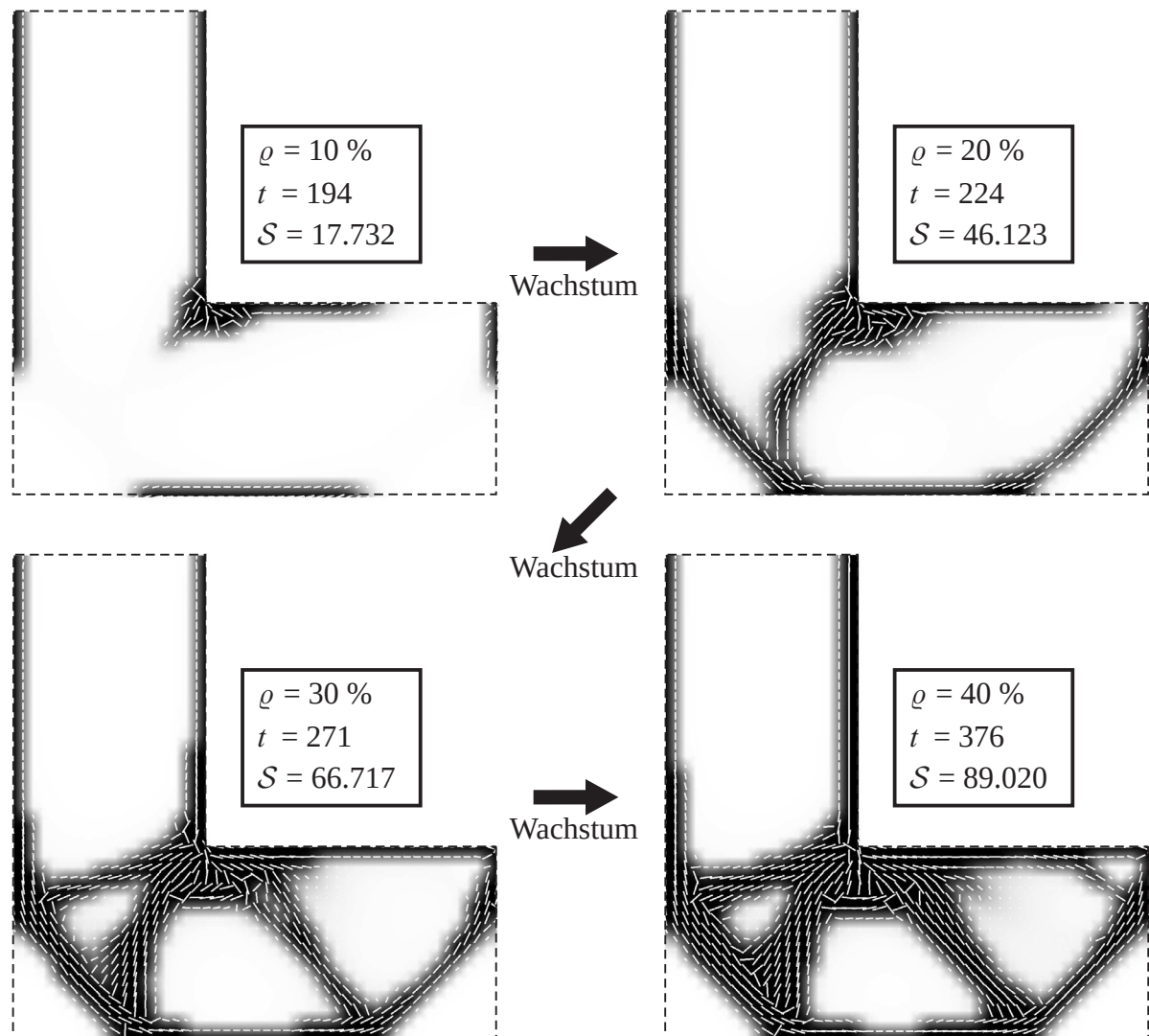


Abbildung 7.4.2.: Evolution der Struktur für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1, 1463 Elemente).

Netzunabhängigkeit

In den Abbildungen 7.4.3 und 7.4.4 sind die konvergierten Topologien für ein Zielvolumen von $\varrho = 50\%$ für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) sowie den Biegebalken (Abb. 5.1.2 $L = 2$) für unterschiedlich feine Diskretisierungen dargestellt. Die entsprechenden Entwicklungen der Struktursteifigkeiten $\mathcal{S}$ über dem Strukturvolumen ϱ sind in den Abbildungen 7.4.5 und 7.4.6 gegeben.

Es zeigt sich ein ähnlich Verhalten der Ergebnisse wie für das isotrope Material in Abschnitt 5.2: Die Kurvenverläufe weisen leichte Schwankungen auf, liegen jedoch prinzipiell nahe beisammen. Die Topologien weisen kaum Unterschiede auf, ausgenommen die des Biegebalkens mit der größten Diskretisierung mit 60×30 Elementen: Hier ist Auflösung nicht hoch genug, um feine Details der Struktur abbilden zu können.

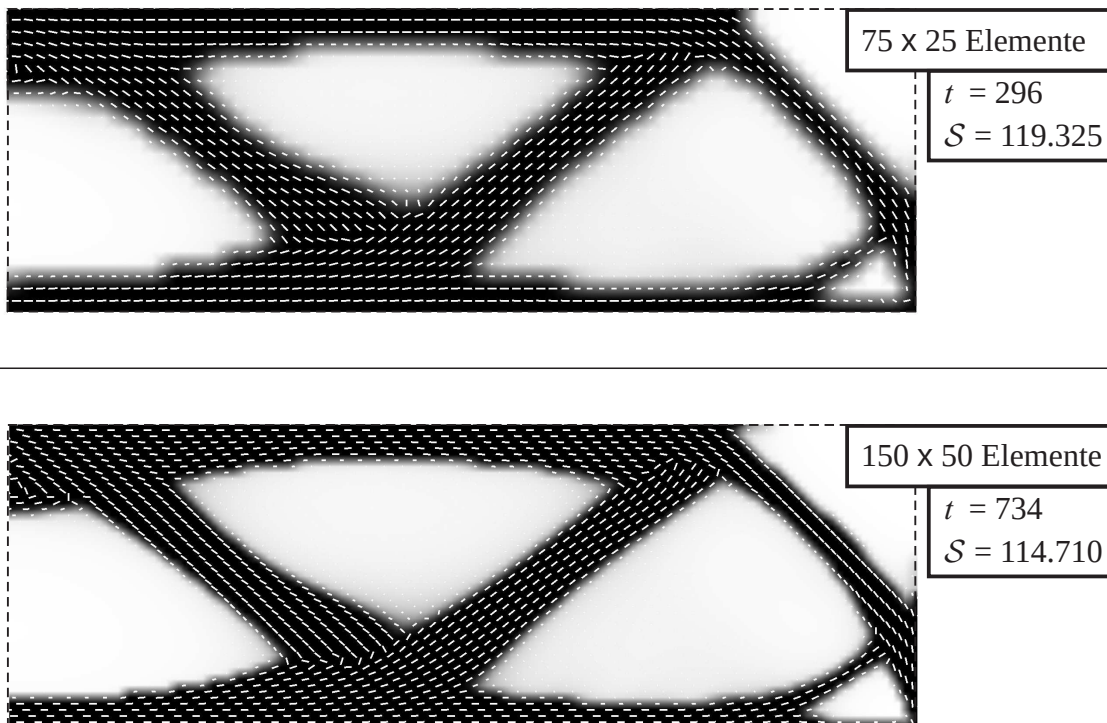


Abbildung 7.4.3.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedlich feine Netze für ein Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$. Für das Netz mit 75×25 Elementen ist die Materialorientierungen eines jeden Elementes dargestellt, für das Netz mit 150×50 Elementen die jedes dritten Elementes.

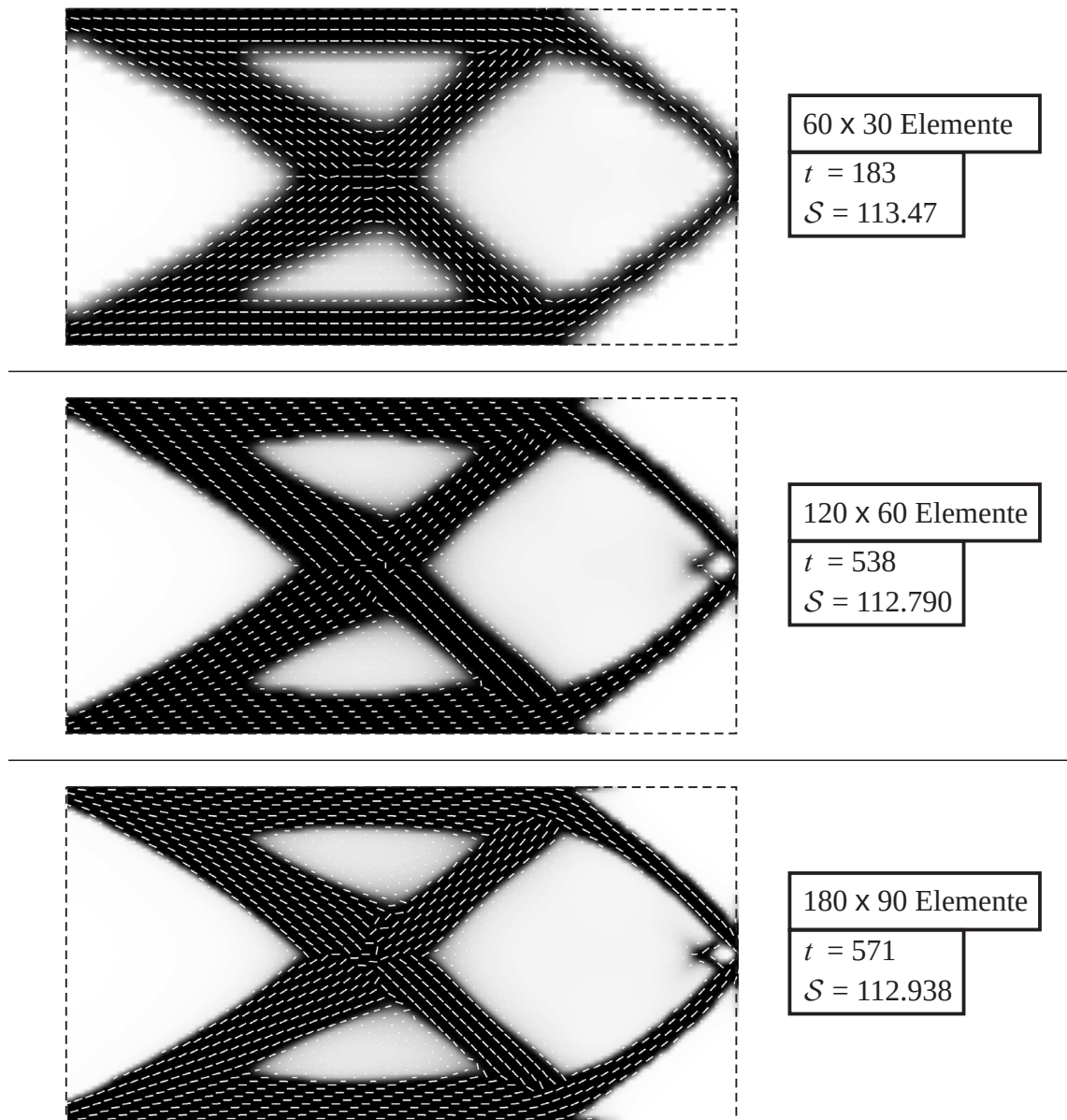


Abbildung 7.4.4.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) für unterschiedlich feine Netze für ein Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$. Für das Netz mit 60×30 Elementen ist die Materialorientierungen eines jeden Elementes dargestellt, für das Netz mit 120×60 Elementen die jedes vierten und für das Netz mit 180×90 Elementen die jedes achten Elementes.

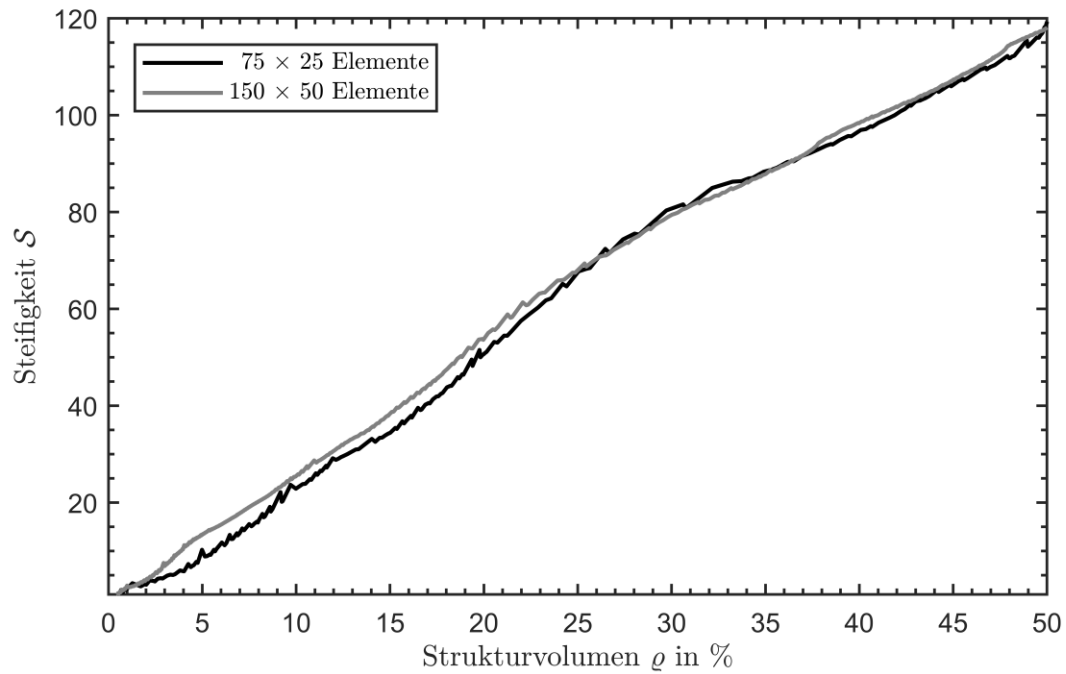


Abbildung 7.4.5.: Struktursteifigkeit S in Abhängigkeit des Strukturvolumens ϱ für den MBB-Balken in Abb. 7.4.3 für unterschiedlich feine Netze.

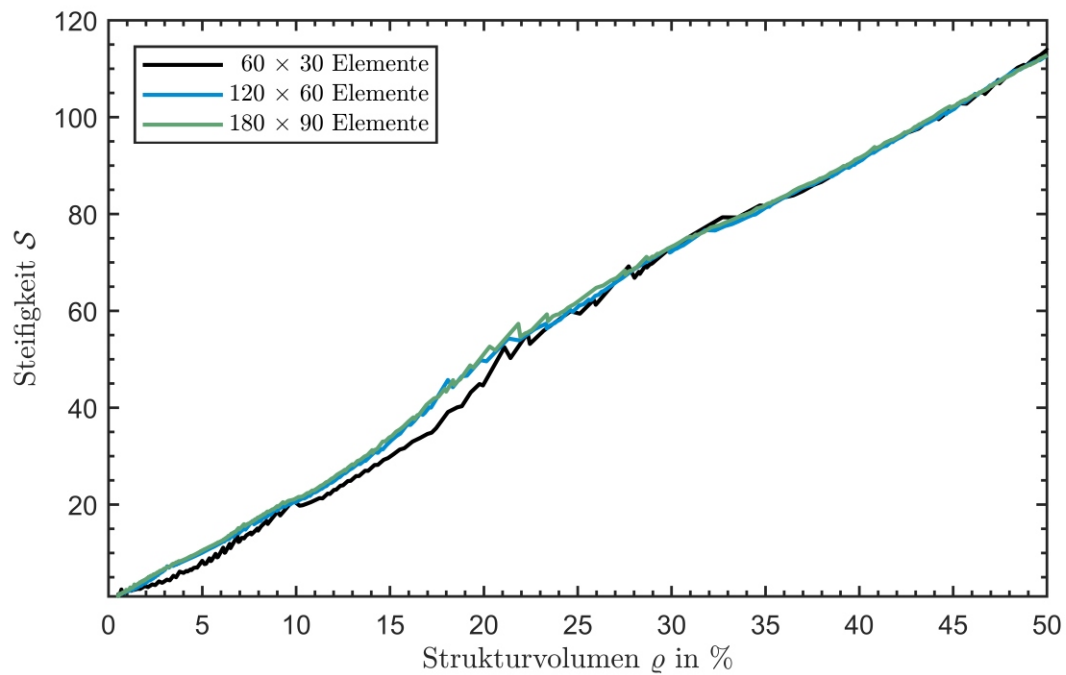


Abbildung 7.4.6.: Struktursteifigkeit S in Abhängigkeit des Strukturvolumens ϱ für den Biegebalken in Abb. 7.4.4, $L = 2$ für unterschiedlich feine Netze.

7.4.3. Ergebnisse mit SIMP und Faserkrümmungsfilter

Evolution der Struktur

Abbildung Abb. 7.4.7 zeigt die Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Biegebalken gemäß Abb. 5.1.1 ohne und mit Anwendung der Faserkrümmungsfilters. Die Struktursteifigkeit S ist jeweils auf den Wert der Struktursteifigkeit normiert, welcher sich durch die Anfangsbedingungen mit homogener Dichteverteilung und isotropen Material gemäß Gl. (7.4.4) ergibt. Die Entwicklung der Topologien ist in Abb. 7.4.8 und die konvergierten Ergebnisse in Abb. 7.4.9 gegeben.

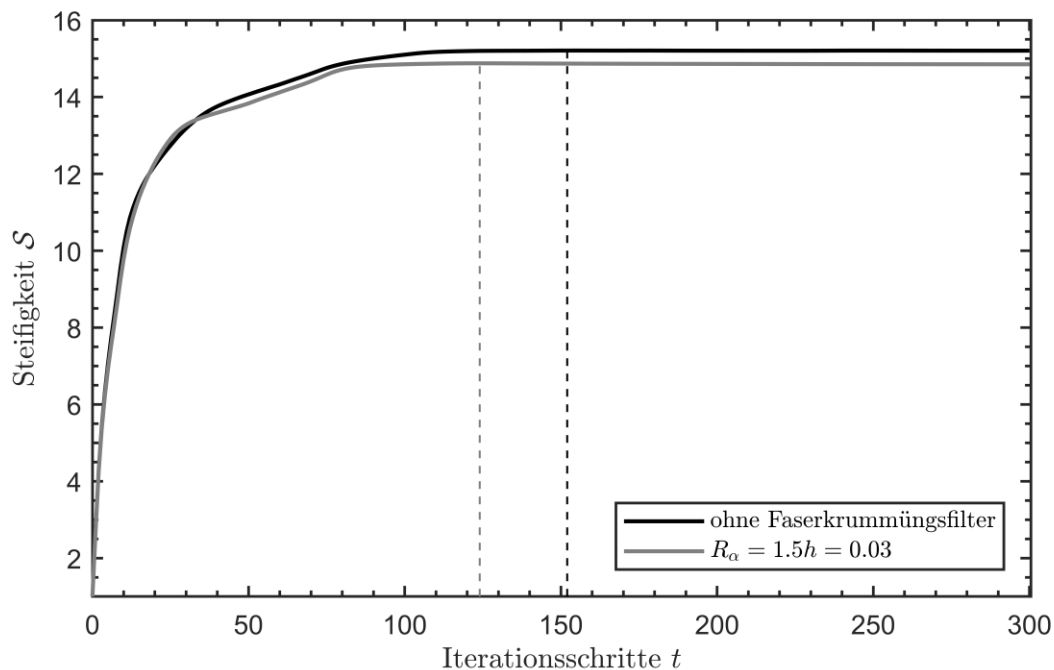


Abbildung 7.4.7.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 7.4.8 und 7.4.9 für den Fall ohne Faserkrümmungsfilter und mit Faserkrümmungsfilter mit $r_\alpha = 1.5h = 0.03$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

Die Entwicklung der Topologie ist sehr ähnlich zur Optimierung mit isotropem Material. Die Materialorientierung stellt sich hinreichend schnell ein, sodass die Faserrichtung in jedem Zeitpunkt bzw. Iterationsschritt plausibel ist und sich an den Spannungstrajektoren orientiert. Dies ist auch der Fall für nicht voll ausgeprägte Strukturen in Bereichen mit „grauen“ Zwischendichten. Sobald sich Balkensegmente ausprägen richten sich die Fasern entsprechend der Balkenrichtung aus. Das Konvergenzverhalten ist sehr ähnlich zur Optimierung mit isotropem Material und es ergibt sich nur eine Abweichung von weniger als 20 Iterationsschritten bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums.

Bei Anwendung des Faserkrümmungsfilters ergibt sich eine geringere Steifigkeit der Struktur. Dies führt zu einer Schlussfolgerung analog zur gradientenbasierten Regularisierung der DichtevARIABLE: Je größer die charakteristische Länge bzw. der Filterradius r_α umso mehr wird das Set um mögliche Lösungen nahe einer Mikrostruktur reduziert. Durch die Reduktion der Faser-

krümmung ist die relative Orientierung des Materials zwischen Datenpunkten eingeschränkt, sodass sich theoretisch ergebene Lamine nicht beliebig orientieren können. Dafür konvergieren die Ergebnisse bei Anwendung des Faserkrümmungsfilters schneller bzw. das Konvergenzkriterium wird früher erreicht, da minimale Änderungen der Materialorientierung durch den Filter unterdrückt werden. Das schnellere Konvergenzverhalten bei Anwendung des Faserkrümmungsfilters wird im folgenden Abschnitt durch weitere Beispiele bestätigt.

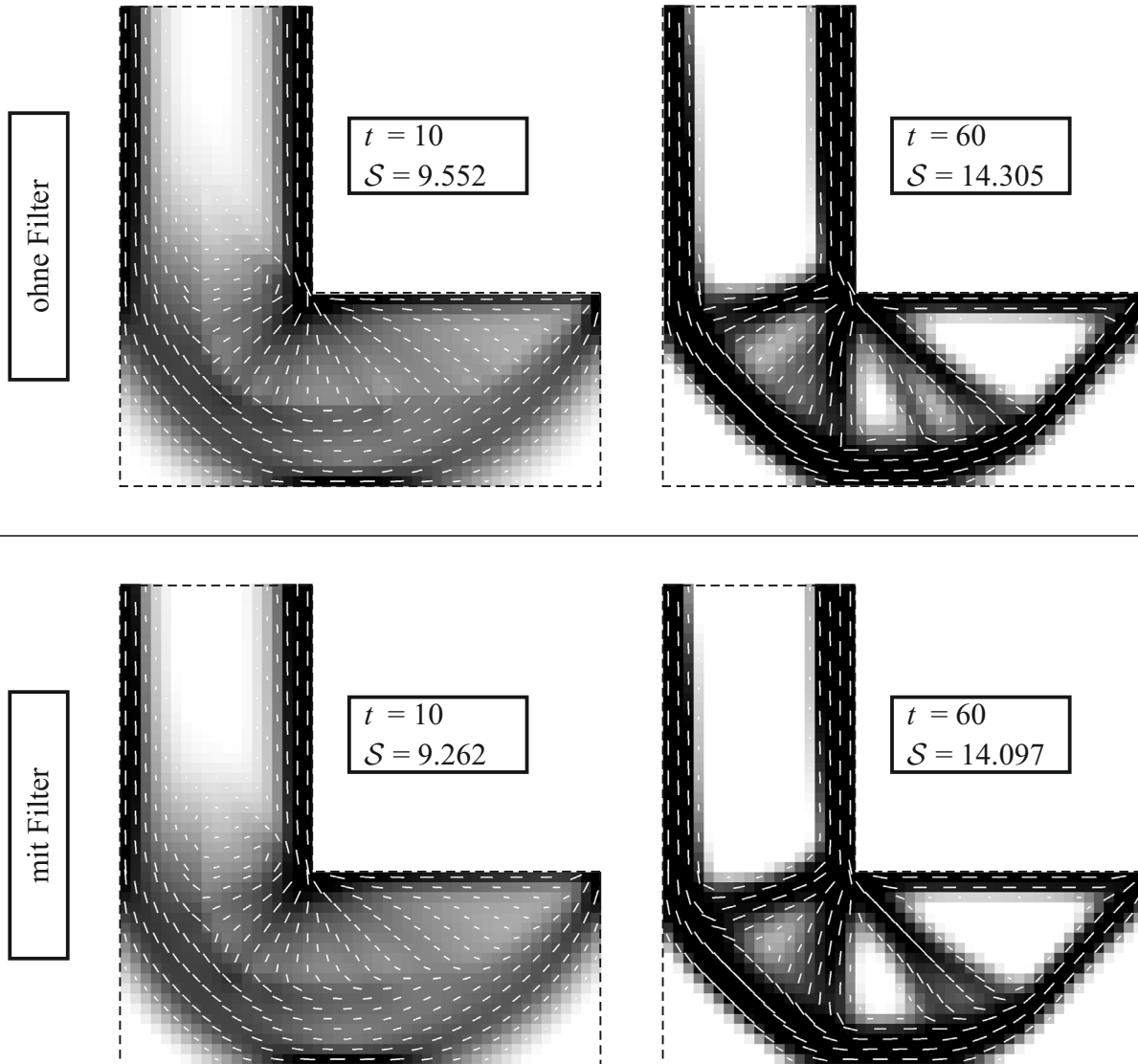


Abbildung 7.4.8.: Evolution der Struktur für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1, 1463 Elemente) bei einem konstanten Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$. Regularisierung der DichtevARIABLE mit $\beta^* = 2h^2 = 80 \times 10^{-5}$. Ergebnisse ohne Anwendung des Faserkrümmungsfilters und mit Faserkrümmungsfilter mit $r_\alpha = 1.5h = 0.03$. Die Materialorientierung jedes dritten Elementes wird dargestellt.

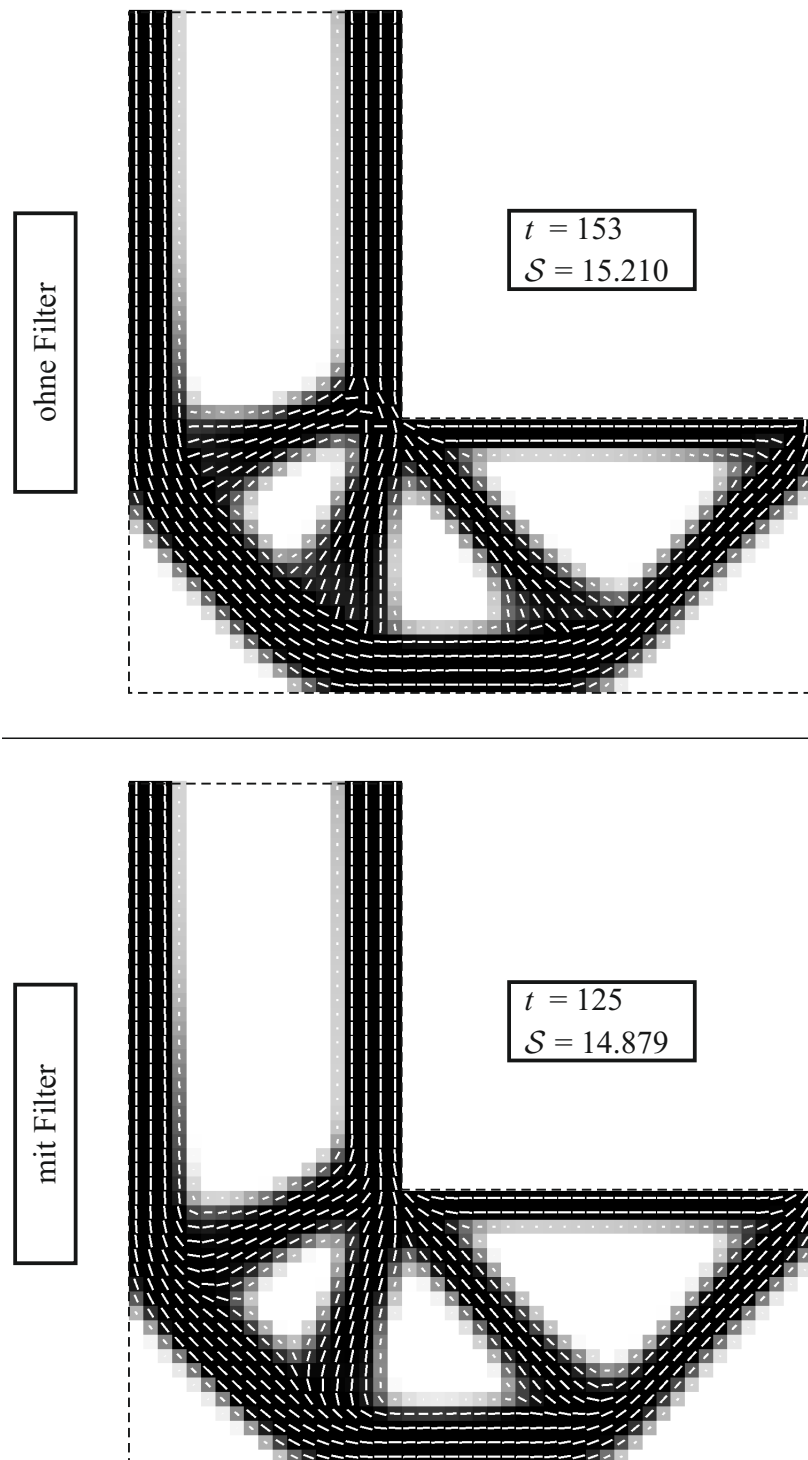


Abbildung 7.4.9.: Konvergierte Ergebnisse aus der Evolution gemäß Abb. 7.4.8. Die Materialorientierung eines jeden Elementes wird dargestellt.

Netzunabhängigkeit

Die Abbildungen 7.4.10 und 7.4.11 zeigen die Entwicklung der Struktursteifigkeit S für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) ohne und mit Anwendung des Faserkrümmungsfilters mit fixiertem Wert des Filterradius r_α für unterschiedlich feine Diskretisierungen bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums. Die Struktursteifigkeit S ist wie zuvor auf den Wert der Struktursteifigkeit normiert, welcher sich durch die Anfangsbedingungen gemäß Gl. (7.4.4) ergibt. Die Regularisierung der DichtevARIABLE wird in beiden Fällen mit identischem Wert des Regularisierungsparameters β^* angewandt. Bei der Vernetzung mit 3460 Elementen ist ein halbseitig strukturiertes und halbseitig unstrukturiertes Netz angewandt worden, analog zu Abb. 5.3.10. Die entsprechenden Topologien der konvergierten Ergebnisse sind in Abb. 7.4.12 und 7.4.13 gegeben. Die Abbildungen 7.4.14 bis 7.4.17 zeigen analog die Ergebnisse für den MBB-Balken gemäß Abb. 5.1.3.

Die Ergebnisse unter Anwendung des Faserkrümmungsfilters zeigen geglättete Übergänge der Fasern zwischen Balkensegmenten, während bei den ungefilterten Ergebnissen die Fasern zwischen zwei benachbarten Elementen orthogonal zueinander ausgerichtet sind. Sowohl die gefilterten wie auch die ungefilterten Ergebnisse weisen keine Netzunabhängigkeit auf. Aus der Literatur ist bekannt, dass bei Anwendung der OCM für die Topologie und/oder Materialorientierung sich (teilweise) netzunabhängige Ergebnisse ergeben [Jiang u. a. (2019); Jantos u. a. (2019b)]. Dementsprechend ist die hier gezeigte TDO der Topologie und Materialorientierung weniger anfällig für numerische Instabilitäten wie beispielsweise Netzunabhängigkeit, welche aufgrund der impliziten Regularisierung durch viskose Effekte reduziert werden [Junker u. a. (2017)].

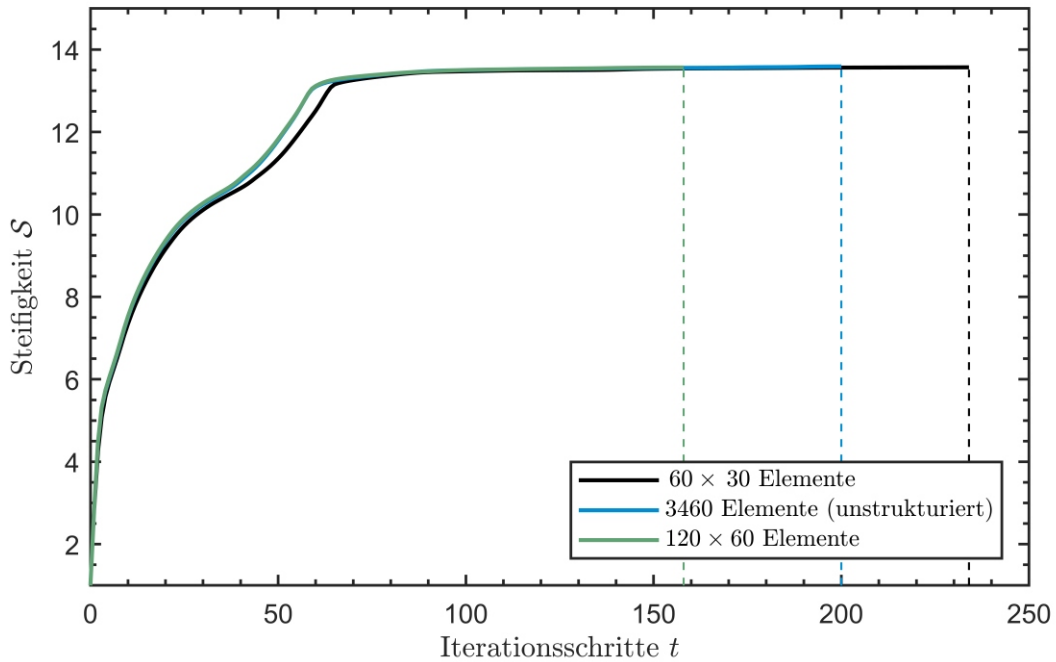


Abbildung 7.4.10.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den Biegebalken in Abb. 7.4.12 für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 222.2 \times 10^{-5}$ ($\sqrt{\beta^*} \approx 0.047$) ohne Anwendung des Faserkrümmungsfilters. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

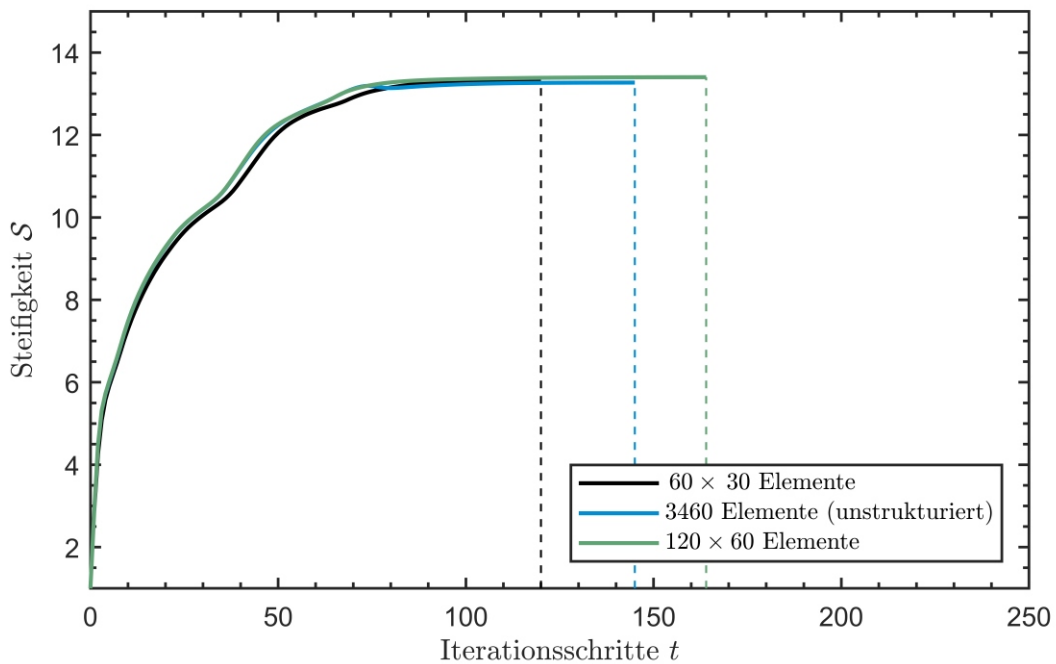


Abbildung 7.4.11.: Ergebnisse für den Biegebalken in Abb. 7.4.13 analog zu Abb. 7.4.10 mit Anwendung des Faserkrümmungsfilters mit $r_{\alpha} = 0.05$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

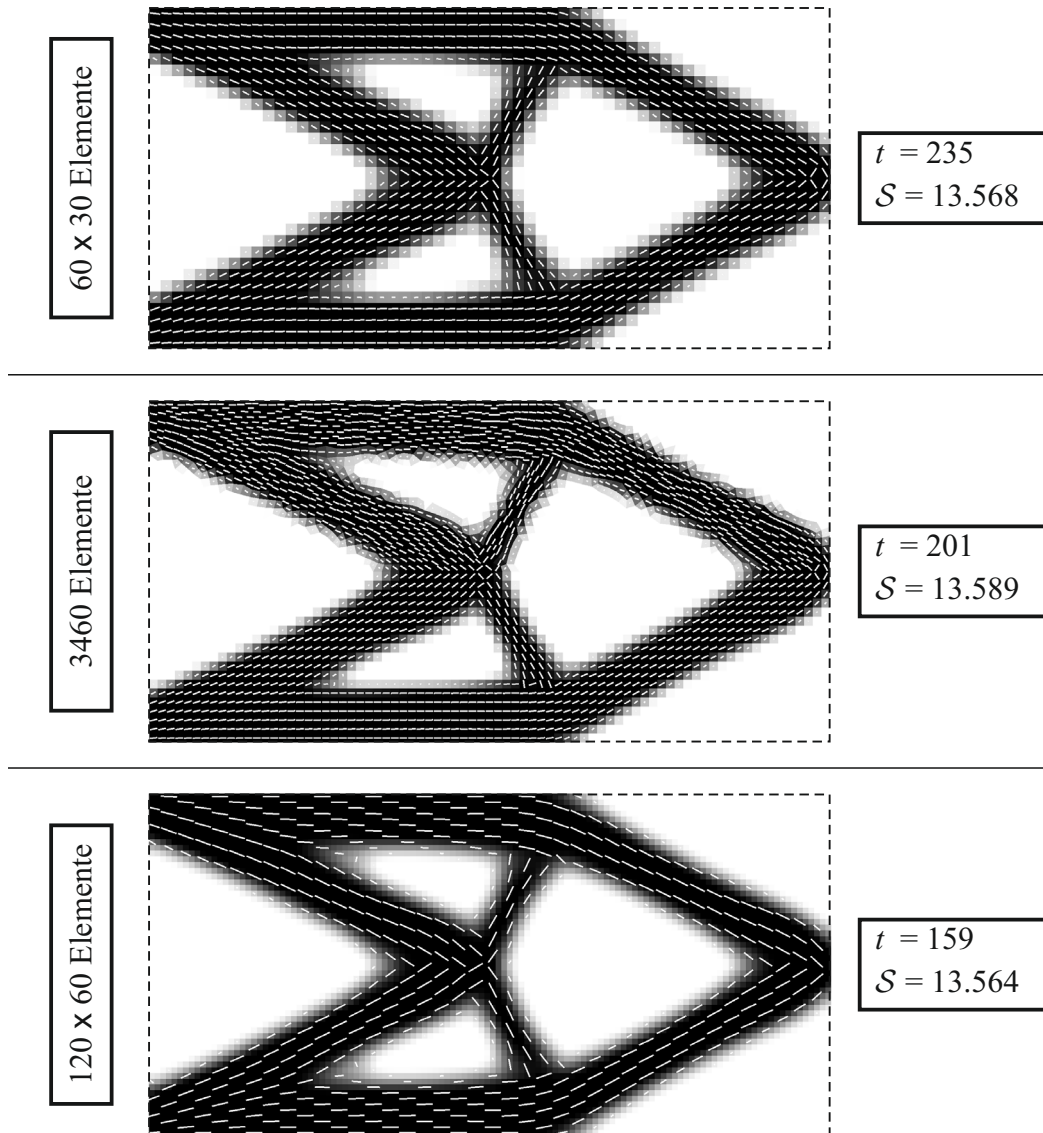


Abbildung 7.4.12.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 2$) für unterschiedliche Netze mit Regularisierungsparameter $\beta^* = 222.2 \times 10^{-5}$ ($\sqrt{\beta^*} \approx 0.047$) und einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ ohne Anwendung des Faserkrümmungsfilters. Für das Netz mit 60×30 Elementen und das halbseitig strukturierte und halbseitig unstrukturierte Netz mit 3640 Elementen sind die Materialorientierungen eines jeden Elementes dargestellt, für das feinere Netz mit 120×60 nur die jedes neunten Elementes.

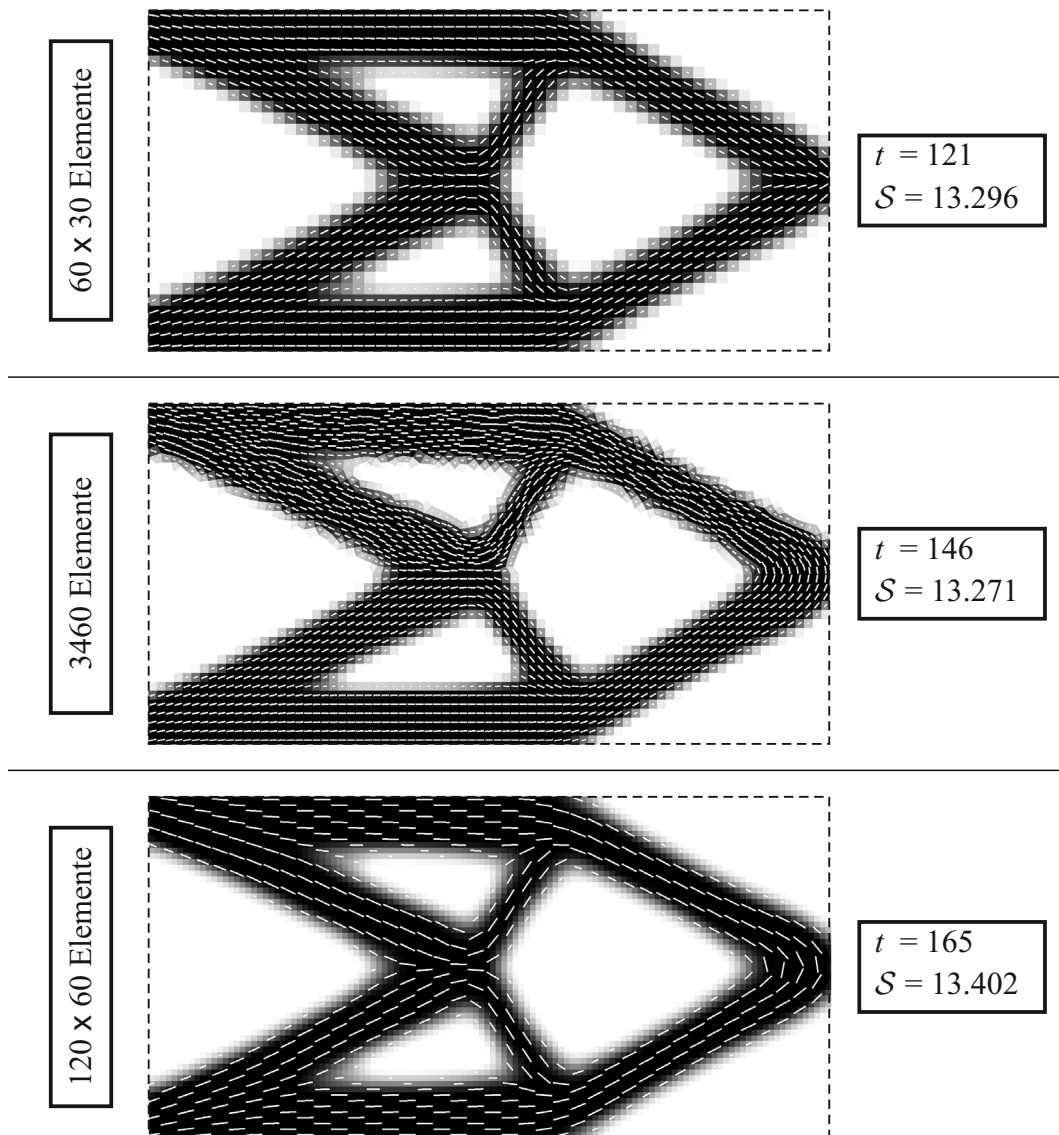


Abbildung 7.4.13.: Ergebnisse analog zu Abb. 7.4.12 mit Anwendung des Faserkrümmungsfilters mit $r_\alpha = 0.05$.

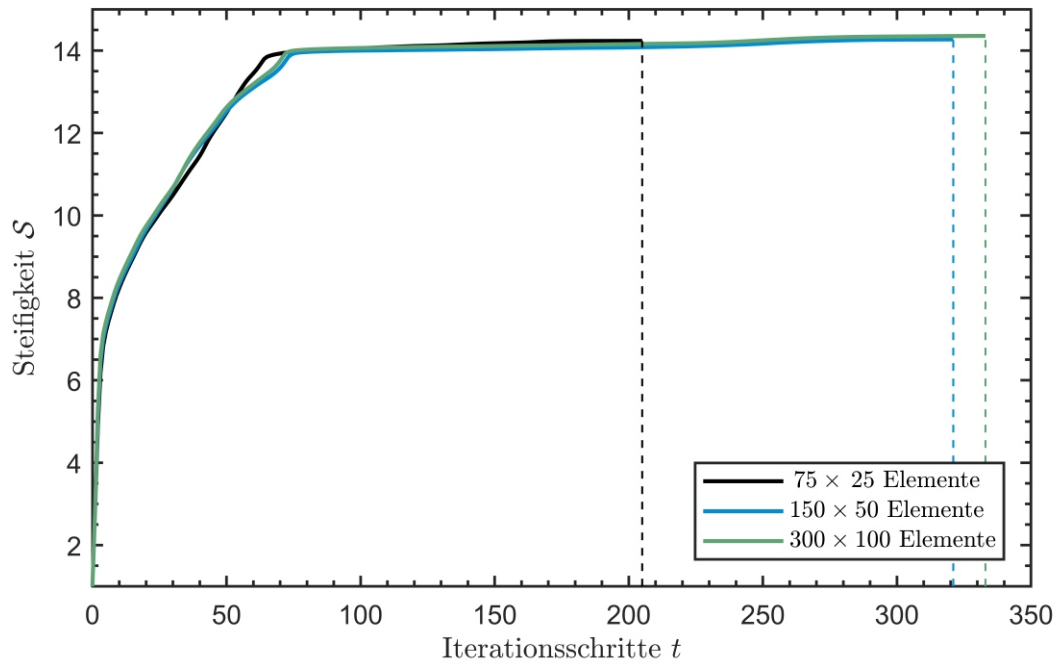


Abbildung 7.4.14.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 7.4.16 für unterschiedlich feine Netze mit $\varrho = 50\%$ und $\beta^* = 500 \times 10^{-5}$ ($\sqrt{\beta^*} \approx 0.071$) ohne Anwendung des Faserkrümmungsfilters.

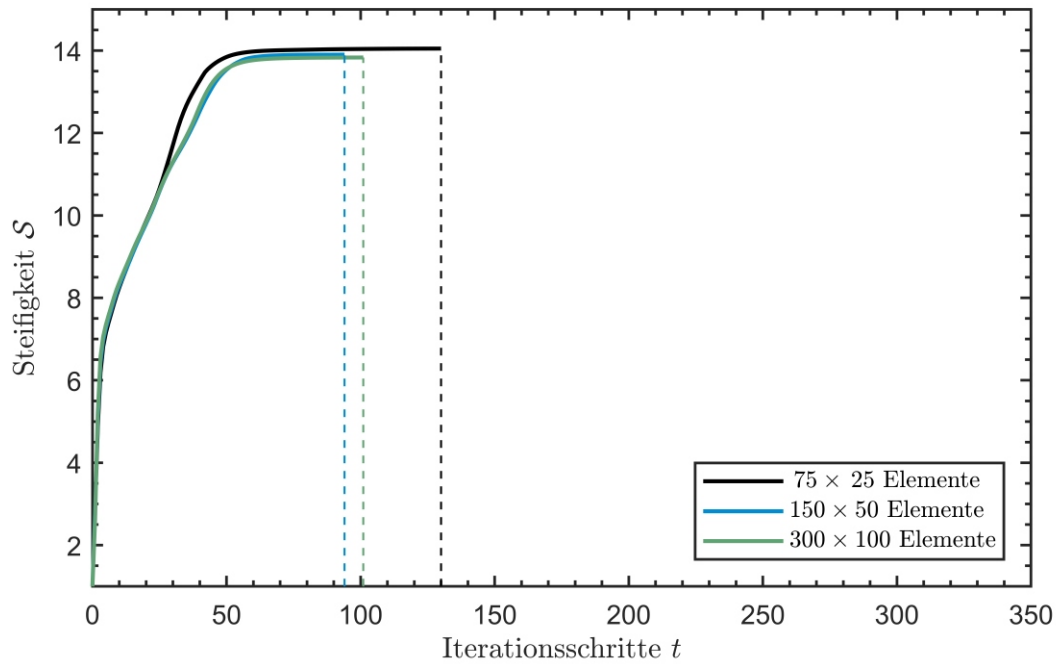


Abbildung 7.4.15.: Ergebnisse für den MBB-Balken in Abb. 7.4.17 analog zu Abb. 7.4.14 mit Anwendung des Faserkrümmungsfilters mit $r_\alpha = 0.075$.

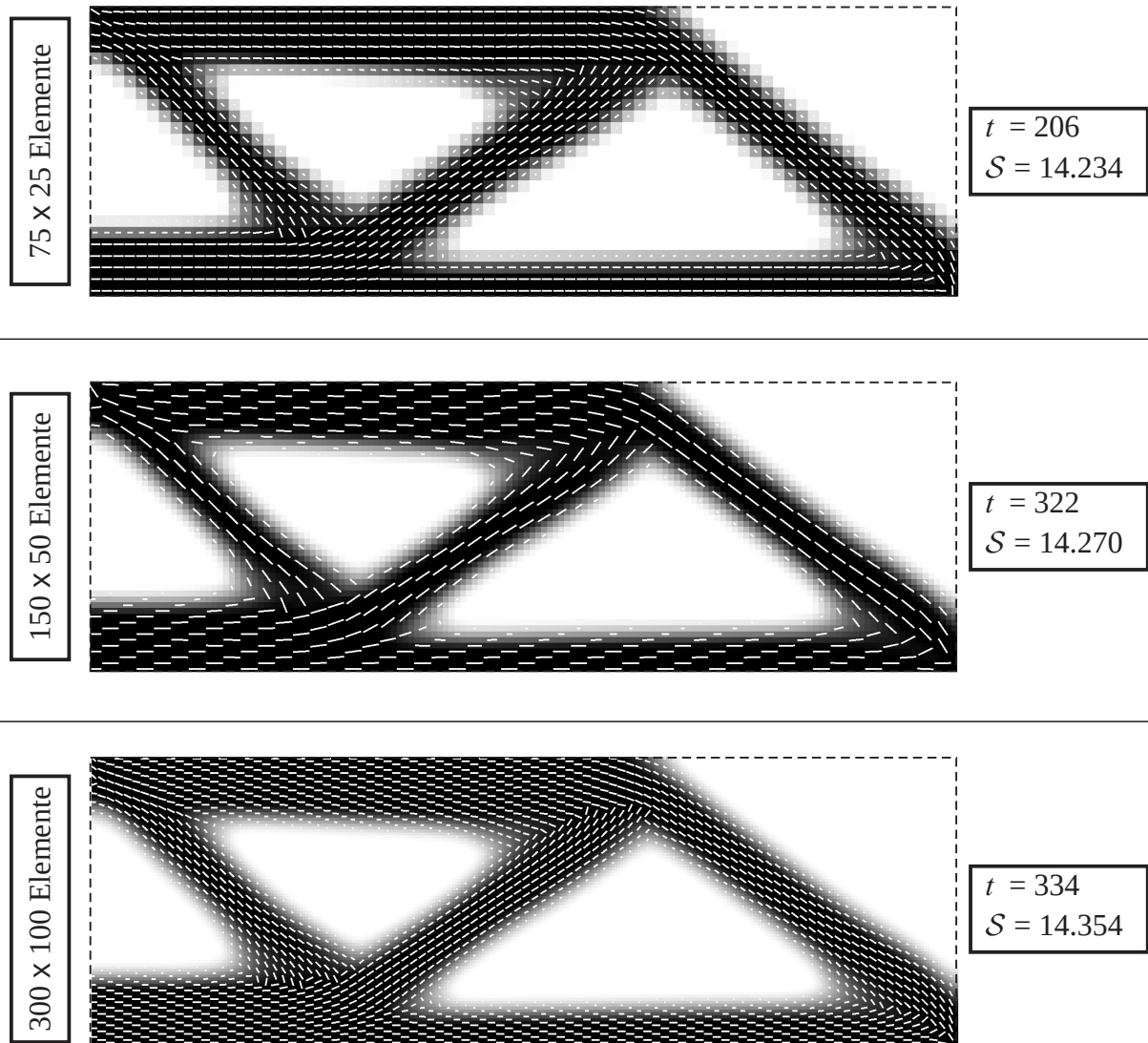


Abbildung 7.4.16.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedlich feine Netze mit Regularisierungsparameter $\beta^* = 500 \times 10^{-5}$ ($\sqrt{\beta^*} \approx 0.071$) und einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ ohne Anwendung des Faserkrümmungsfilters. Für das Netz mit 75×25 Elementen sind die Materialorientierungen eines jeden Elementes dargestellt, für die beiden feineren Netze jeweils nur die jedes neunten Elementes.

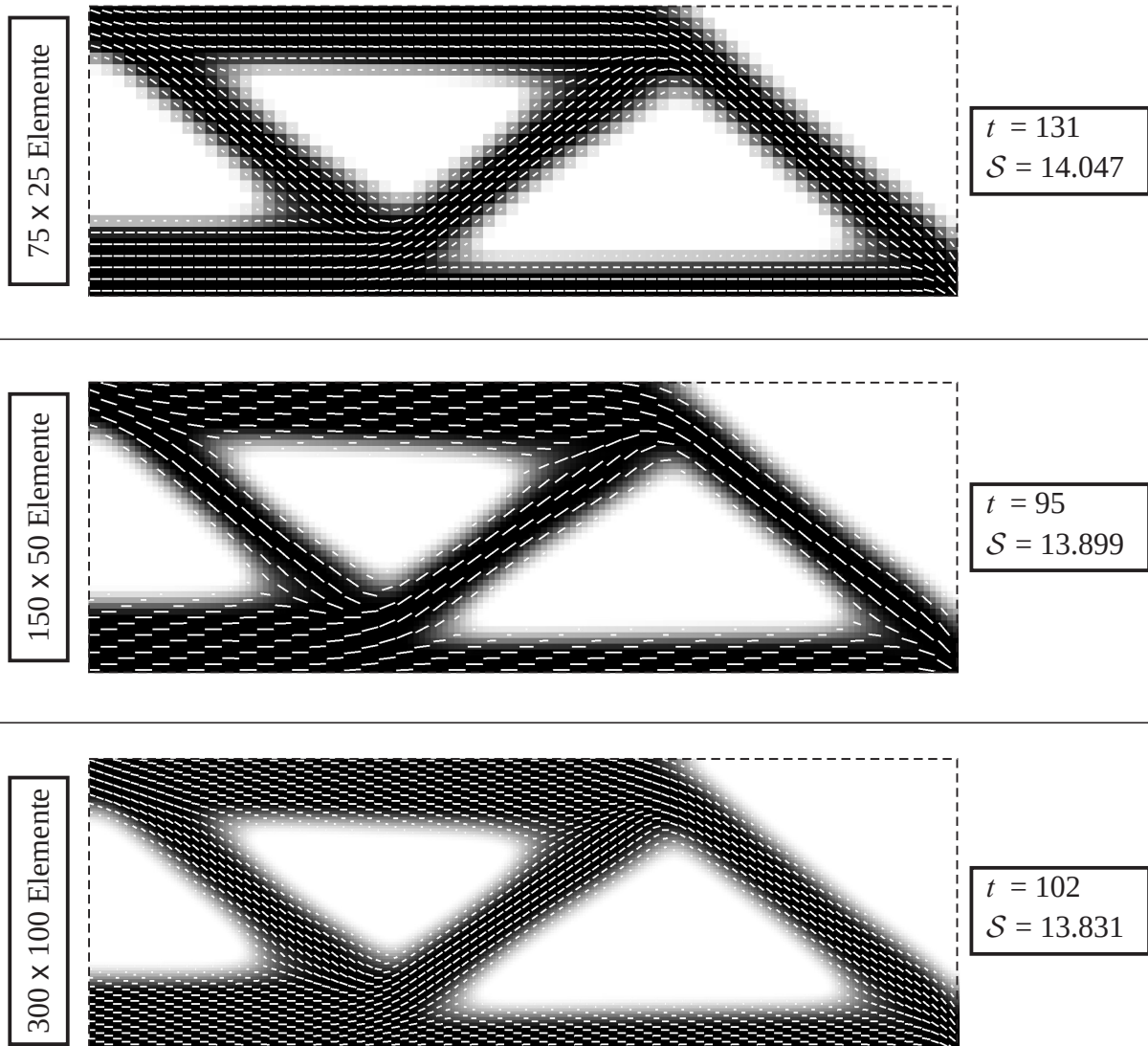


Abbildung 7.4.17.: Ergebnisse analog zu Abb. 7.4.16 mit Anwendung des Faserkrümmungsfilters mit $r_\alpha = 0.075$.

Einfluss des Faserkrümmungsfilters

Die Abbildungen 7.4.18 und 7.4.19 zeigen Beispiele für den Einfluss des Filterradius des Faserkrümmungsfilters r_α . Der Wert des Regularisierungsparameters β^* für die DichtevARIABLE ist jeweils identisch. Zusätzlich sind Viertelkreisbögen gegeben, welche dem jeweils am stärksten gekrümmten Faserverlauf folgen. Die Sekante der Viertelkreisbögen verbindet zwei möglichst nahe beieinander liegende Punkte, zwischen welchen die Änderung der Materialorientierung bzw. der Faserorientierung 90° beträgt.

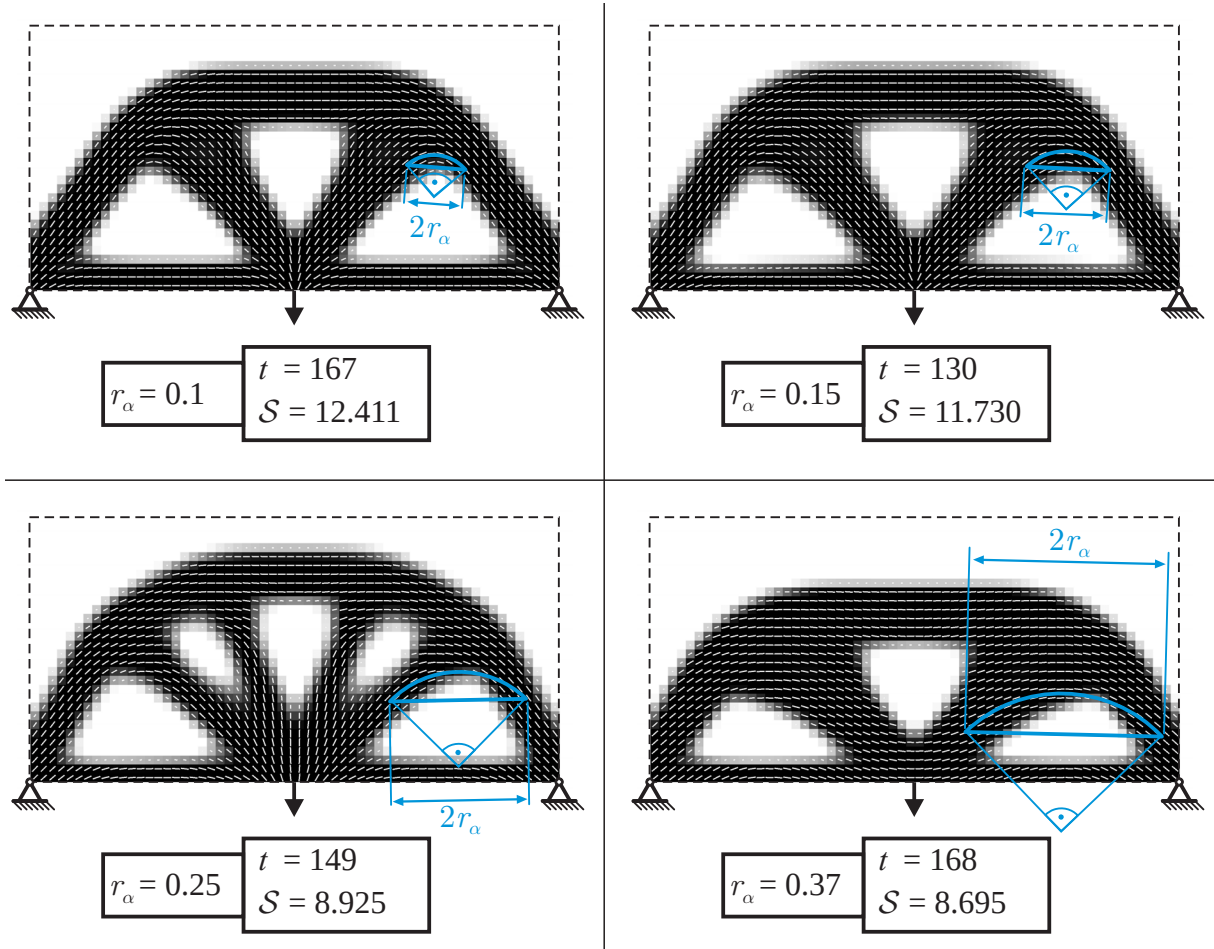


Abbildung 7.4.18.: Beispiel mit variierendem Filterradius r_α für eine Randwertproblem mit Abmaßen $\Omega = 2 \times 1$ diskretisiert durch 60×30 Elemente. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 50\%$ und der Regularisierungsparameter für die DichtevARIABLE ist $\beta^* = 222.2 \times 10^{-5}$.

Die Abbildungen lassen darauf schließen, dass die jeweiligen Sekantenlängen mit dem doppelten Wert des Filterradius r_α übereinstimmen. Folglich lässt sich basierend auf diesem Zusammenhang die Mindestkrümmung der Fasern steuern: Die Sekantenlänge bzw. der doppelte Wert des Filterradius r_α entspricht dem benötigten Mindestabstand für eine 90° -Krümmung der Fasern. Aus trigonometrischen Beziehungen ergibt sich damit, dass der Mindestradius eines Faserbogens $\sqrt{2} r_\alpha$ bzw. dessen maximale Krümmung $1/(\sqrt{2} r_\alpha)$ betragen muss. Dieser Zusammenhang beruht rein auf Beobachtungen und ein mathematischer Nachweis dieses Zusammenhangs steht noch aus. Neben dem Glättungseffekt bezüglich der Faserkrümmung hat die Erhöhung des Filterradius r_α Einfluss auf Form und Topologie der Struktur: Da keine belie-

big großen Faserkrümmungen an den Übergängen zwischen Balkensegmenten mit steigendem Wert für r_α möglich sind und bei einer optimalen Struktur i.d.R. Material- und Balkenorientierung übereinstimmen, werden entsprechend weniger spitze Winkel zwischen Balkensegmenten bevorzugt.

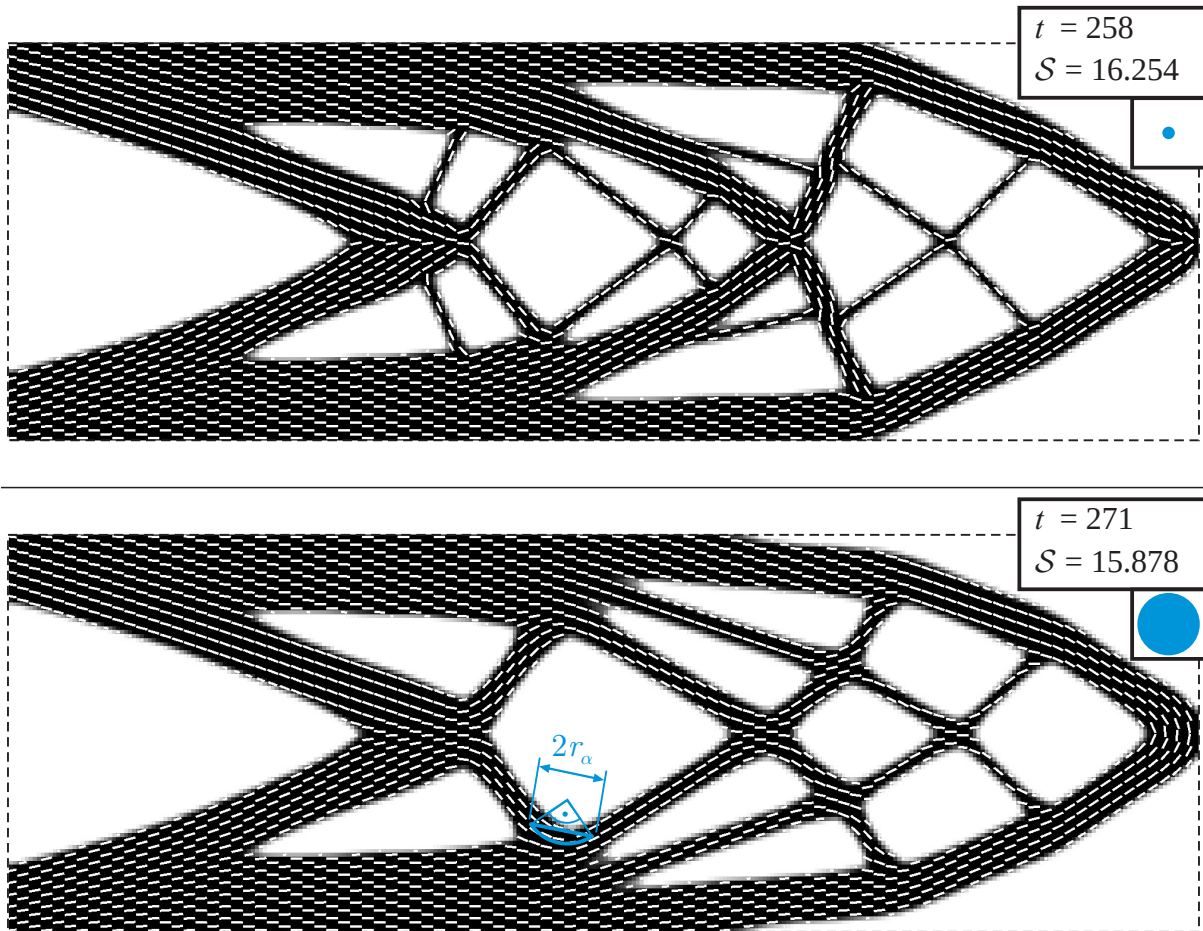


Abbildung 7.4.19.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 3$, 300×100 Elemente) für unterschiedliche Faserkrümmungsfiler $r_\alpha = \{0.015, 0.075\}$, welche durch die Kreise gekennzeichnet sind. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 50\%$ und der Regularisierungsparameter für die DichtevARIABLE ist $\beta^* = 20 \times 10^{-5}$. Darstellung der Materialorientierung eines jeden neunten Elementes.

Dreidimensionaler Fall

Die Abbildungen 7.4.20, 7.4.21 und 7.4.22 zeigen die Ergebnisse für die dreidimensionalen Biegeprobleme gemäß Abb. 5.1.5 aus zwei verschiedenen Perspektiven für unterschiedliche Filterradien r_α . In Abb. 7.4.23 ist ein weiteres Beispiel mit variierendem Filterradius r_α gegeben und Abb. 7.4.24 zeigt das Ergebnis für das Brückenrandwertproblem gemäß Abb. 5.3.27. Der Regularisierungsparameter für die Topologieoptimierung β^* wird nicht variiert, sodass sich Topologieänderungen nur aufgrund des veränderten Filterradius r_α ergeben. Beim Biegebalken in Abb. 7.4.20 und Abb. 7.4.21 sind die erste und zweite Hauptmaterialrichtung abgebildet, d.h. die Richtungen, in welche der Elastizitätsmodul am größten bzw. am zweitgrößten ist. Bei allen weiteren Beispielen ist nur die erste Hauptmaterialrichtung abgebildet.

Die erste Hauptmaterialrichtung orientiert sich analog zu den quasi-zweidimensionalen Beispielen entlang der Balkensegmente, um die Biegesteifigkeit zu maximieren. Die zweite Materialhaupttrichtung orientiert sich in den Balkensegmenten in Richtung der angreifenden Last, sodass die Steifigkeit gegen Schereffekte maximiert wird.

Die Veränderung des Filterradius r_α hat neben dem Glättungseffekt auf die Materialorientierung bzw. Faserkrümmung indirekt Einfluss auf die resultierende Topologie: Durch die reduzierte Faserkrümmung können Fasern in kurzen Balkensegmenten nicht mehr entlang des Balkens ausgerichtet werden. Dadurch werden bestimmte Winkel zwischen Balkensegmenten bevorzugt bzw. Balken, welche nicht diesem Winkel entsprechen, werden aus der Topologie entfernt. Damit ergeben sich auch „weichere“ bzw. rundere Formen der Struktur, d.h. weniger stark gekrümmte Oberflächen, besonders an Balkenübergängen. Der weitreichende Einfluss des Faserkrümmungsfilters auf die Topologie wird am Beispiel in Abb. 7.4.23 deutlich: Da die Fasern an der oberen Mitte des Designraumes nicht mehr beliebig spitz zusammen laufen können, ergeben sich trotz doppel-symmetrischem Randwertproblem keine doppel-symmetrischen Strukturen. Im Extremfall wird die Topologie auf eine Platte bzw. Scheibe mit variierender Dicke reduziert. Im Gegensatz zu den quasi-zweidimensionalen Standardbeispielen ergeben sich für den dreidimensionalen Fall auch bei sehr kleinen Werten für Faserkrümmungsfiler Topologien, welche sich sehr von den Ergebnissen mit isotropem Material unterscheiden. Folglich hat die Optimierung der lokalen Materialorientierung simultan zur Topologie einen entscheidenden Einfluss auf die resultierenden Strukturen.

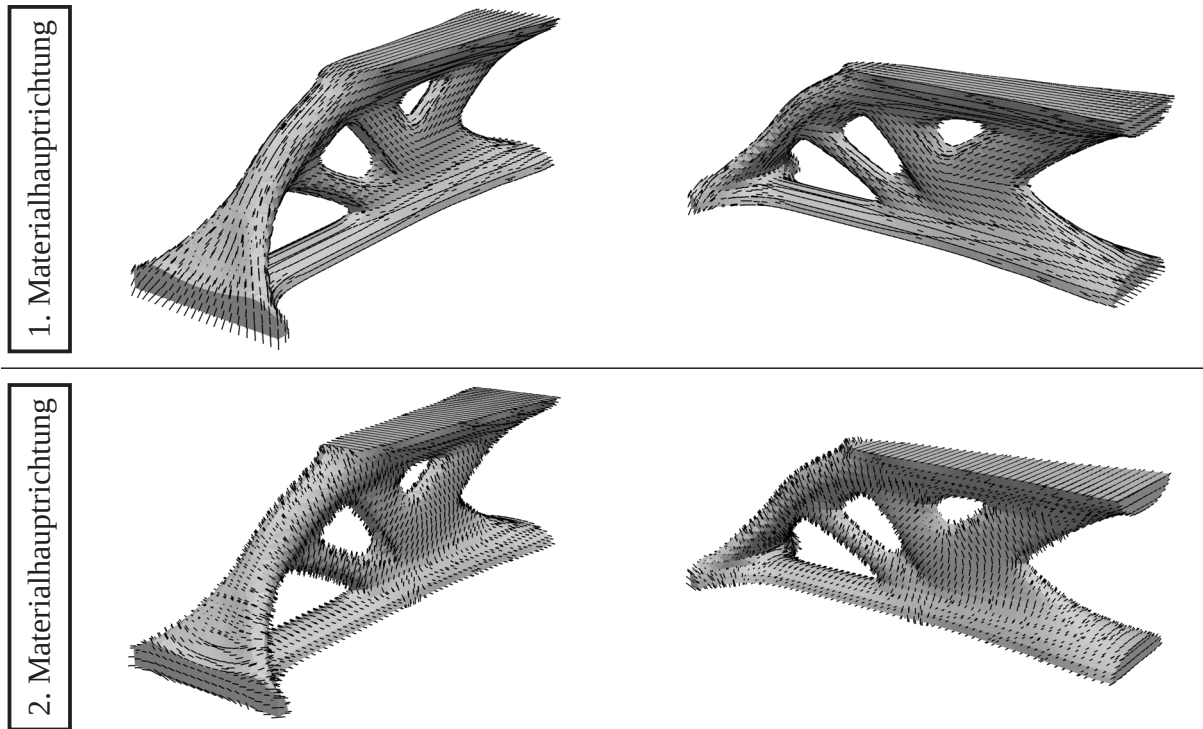


Abbildung 7.4.20.: Ergebnisse für den dreidimensionalen Biegebalken (Abb. 5.1.5) für ein Strukturvolumen von $\varrho = 15\%$, Regularisierungsparameter für die Dichtvariable $\beta^* = 350 \times 10^{-5}$ und Netz mit $72 \times 24 \times 24$ Elementen. Faserkrümmungsfiter mit $r_\alpha = 0.0625$

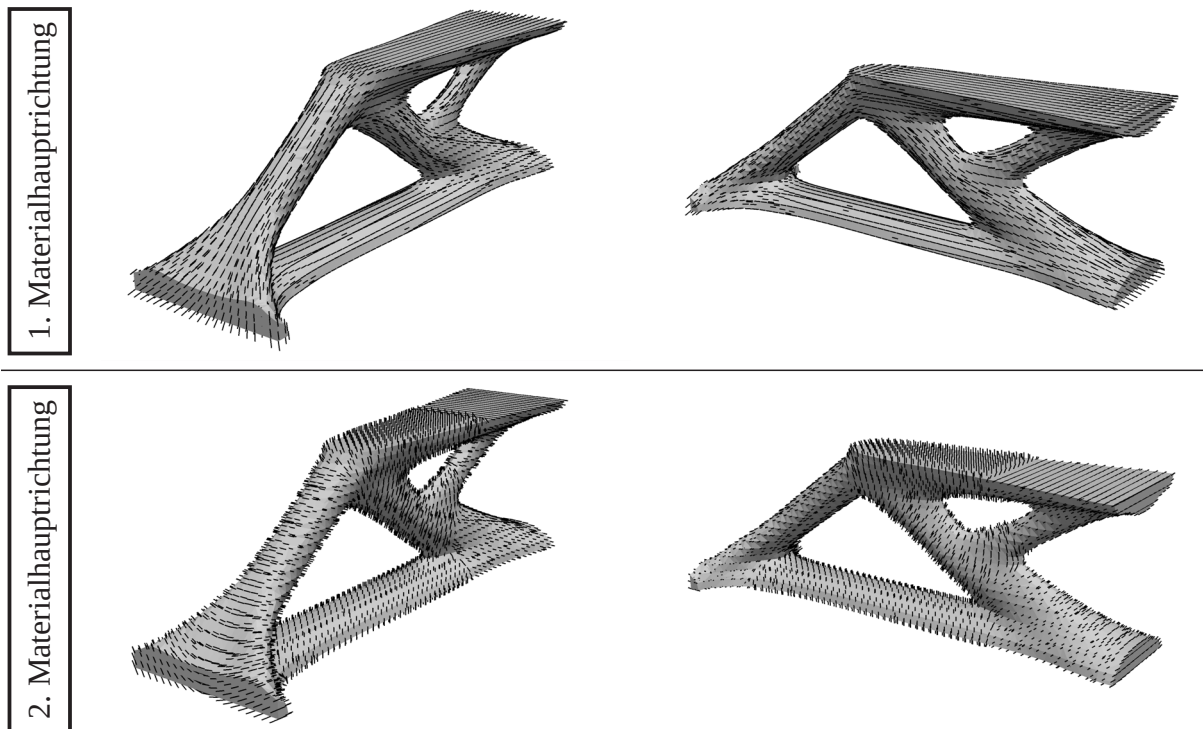


Abbildung 7.4.21.: Ergebnisse für den dreidimensionalen Biegebalken analog zu Abb. 7.4.20 mit verändertem Filterradius $r_\alpha = 0.166$.

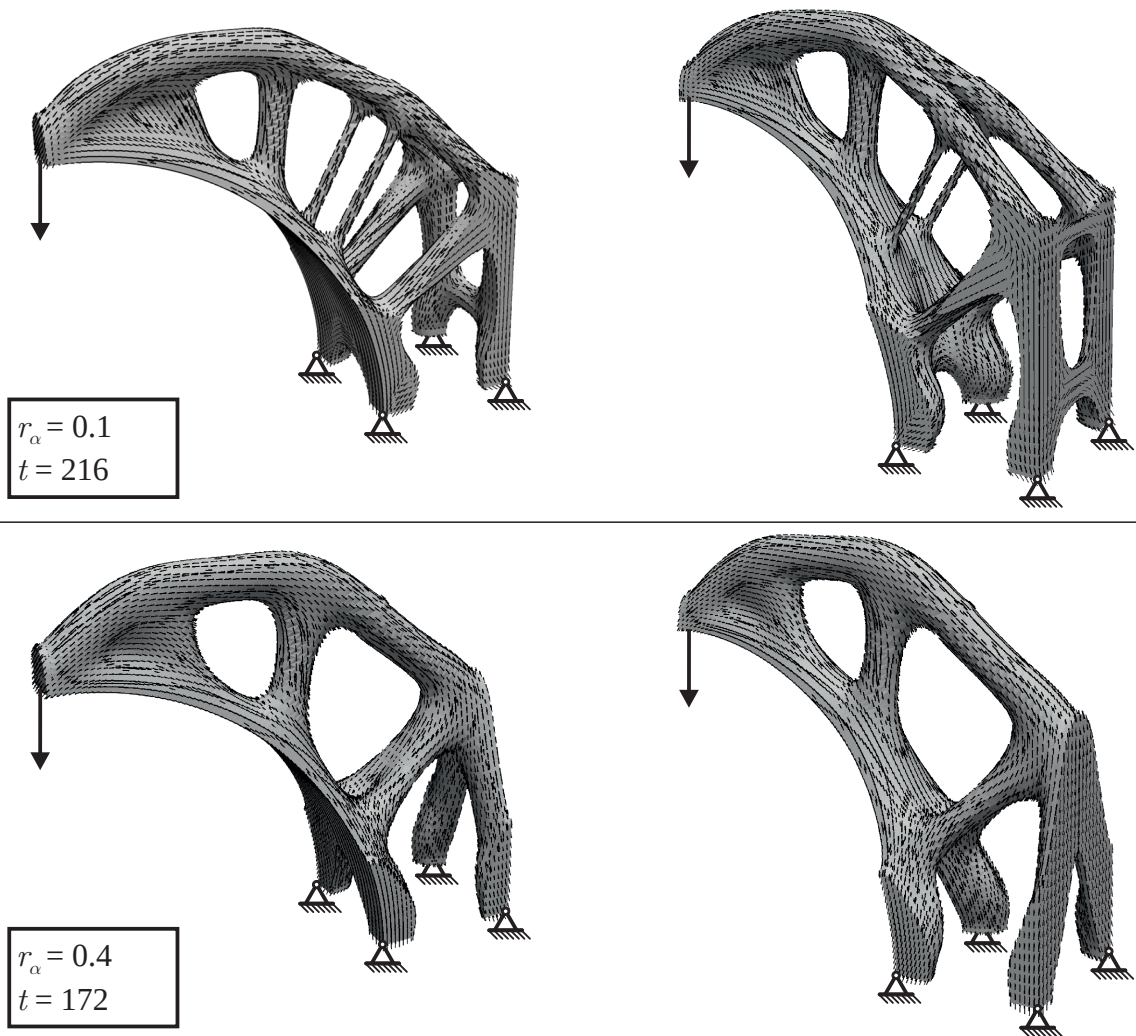


Abbildung 7.4.22.: Ergebnisse für das dreidimensionale Biegeproblem (Abb. 5.1.5) mit variierendem Faserkrümmungsfiltterradius r_α . Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 13\%$ und der Regularisierungsparameter beträgt $\beta^* = 1500 \times 10^{-5}$. Nur die erste Materialhaupttrichtung ist dargestellt.

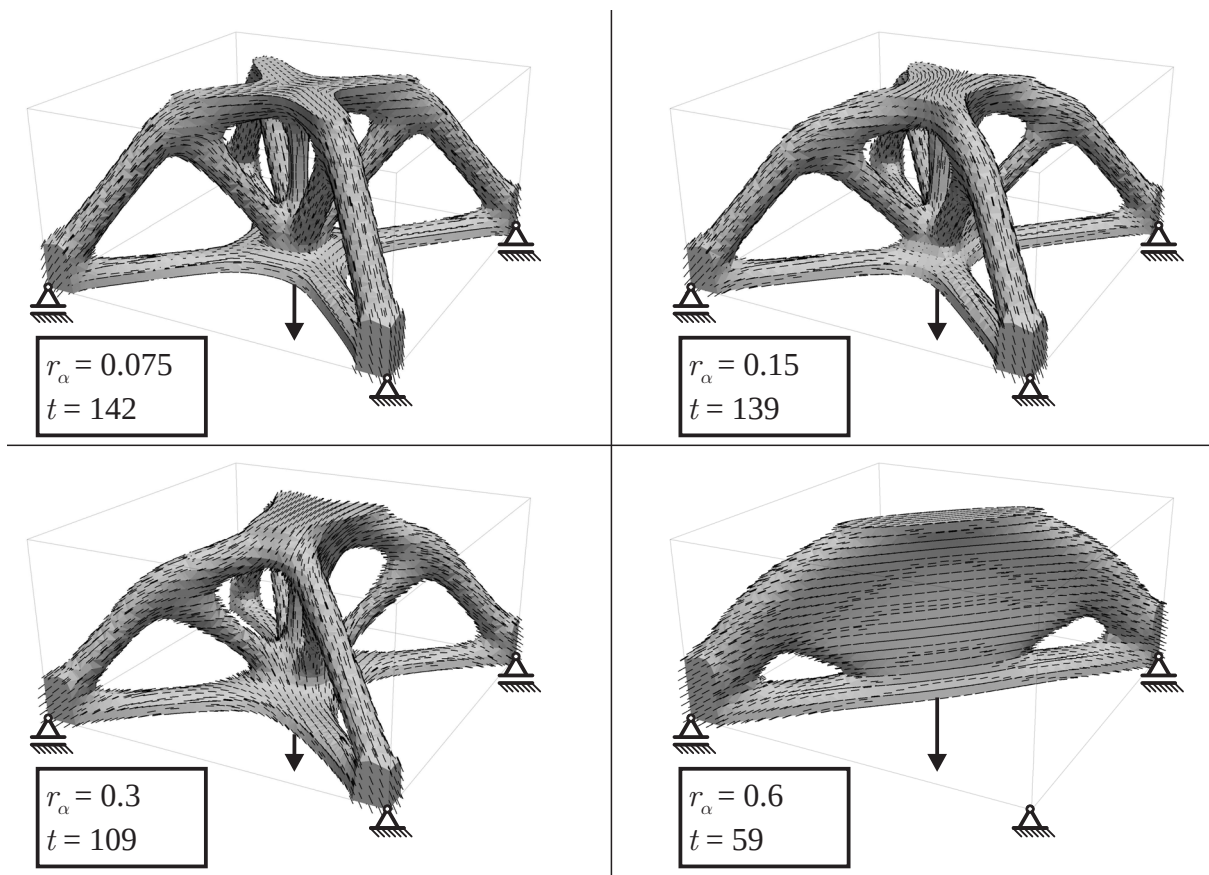


Abbildung 7.4.23.: Dreidimensionales Beispiel mit variierendem Faserkrümmungsfiltrerradius r_α . Der Designraum ist $\Omega = 2 \times 2 \times 1$, welcher durch $40 \times 40 \times 20$ Elemente diskretisiert ist. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 10\%$. Nur die erste Materialhaupttrichtung ist dargestellt.

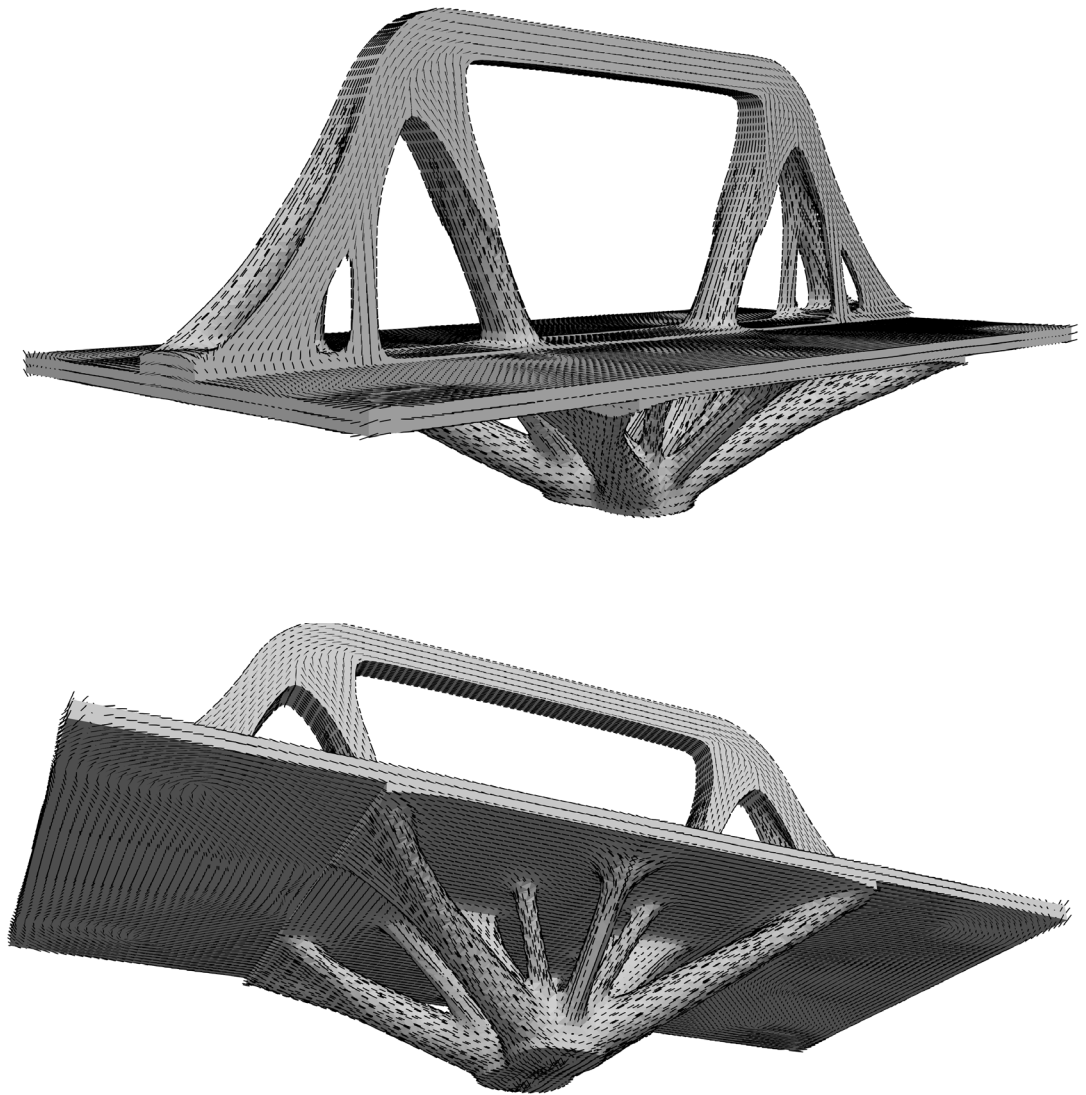


Abbildung 7.4.24.: Ergebnis für das simple Brückenrandwertproblem analog zu Abb. 5.3.27 nach $t = 210$ Iterationsschritten.

7.5. Zusammenfassung

Die hier gezeigte TDO der Materialorientierung erfolgt simultan zur TTO, welche sowohl mit dem Wachstumsansatz gemäß Abschnitt 5.2.1 wie auch dem SIMP-Ansatz gemäß Abschnitt 5.3.1 kombiniert werden kann. Im Gegensatz zu den hier gezeigten TTO basierend auf dem Hamilton-Prinzip, wurde in Jantos u. a. (2019b) die TDO der Materialorientierung mit der etablierten OCM für die Topologieoptimierung kombiniert.

Für beide Modellansätze konnte netzunabhängiges Verhalten ohne zusätzliche Regularisierung bezüglich der Materialorientierung gezeigt werden. Der Faserkrümmungsfilter kann zwar als Regularisierung dienen, wurde aber in erster Linie zur Steuerung der Faserkrümmung mittels des Parameters r_α zwecks fertigungstechnischer Aspekte eingeführt, beispielsweise bei Anwendung langfasriger Faserverbundwerkstoffe. Numerische Beispiele lassen darauf schließen, dass der minimale Radius eines Faserbogens gleich $\sqrt{2} r_\alpha$ ist bzw. die maximale Faserkrümmung $1/\sqrt{2} r_\alpha$ beträgt. Mit zunehmenden Wert für r_α ergebenen sich entsprechend weniger starke Krümmungen der Fasern und glattere, stromlinienförmige Faserverläufe. Dies hat auch Einfluss auf die Form und Topologie der Struktur: Da normalerweise bei einer optimalen Struktur die Faserrichtung und die Ausrichtung der Balken eines Tragwerkes übereinstimmen, werden durch die Reduzierung der Faserkrümmung auch die Winkel zwischen Balken verändert, wodurch sich wiederum Topologieänderungen ergeben können. Vor allem bei den gezeigten dreidimensionalen Beispielen ergeben sich auch bei kleinen Werten von r_α starke Unterschiede in der Topologie im Vergleich zur Optimierung mit isotropen Material (siehe Abschnitt 5.3), sodass eine simultane Optimierung der Topologie und der lokalen Materialorientierung bei der Auslegung von Strukturen mit anisotropen Materialien äußerst sinnvoll erscheint.

Der Faserkrümmungsfilter ist prinzipiell mit beliebigen Optimierungsverfahren und Rotationsparametern bzw. Rotationsvariablen kombinierbar. Einzige Voraussetzung ist hierfür die Möglichkeit korrespondierende Werte für die Rotationsvariablen α aus einer gegebenen Rotationsmatrix $\mathbf{Q}$ bestimmen zu können. Die Abbildung $\mathbf{Q} \rightarrow \alpha$ muss dabei nicht eindeutig bzw. bijektiv sein.

8. Zug-Druck-Anisotropie

8.1. Einleitung

Die Motivation für das im folgenden vorgestellte Modell stammt aus dem Stahl-Beton-Bau: Beton ist ein günstiges Material, zeigt aber ungenügende Eigenschaften unter Zugbelastung. Daher wird Beton mit Stahl kombiniert, welcher zwar sowohl in Druck- wie auch Zugbelastung geeignete mechanische Eigenschaften aufweist, jedoch weitaus kostenintensiver ist und auch ein höheres Gewicht besitzt. Folglich lautet die Prämisse, Beton überall dort einzusetzen, wo primär Druckbelastungen vorherrschen und Stahl nur dort, wo primär Zugbelastungen vorherrschen.

Eine Möglichkeit der Modellierung eines solchen Verhaltens ist eine Topologieoptimierung mit zwei Materialien, wobei unterschiedliche Spannungsrestriktionen (Nebenbedingungen für maximal zulässige Spannungen) für die Materialien eingeführt werden, welche für Druck und Zug jeweils unterschiedlich sind, beispielsweise basierend auf dem Drucker-Prager-Kriterium [Luo u. Kang (2012); Bruggi u. Duysinx (2012)]. Auch wenn diese Annahme dem realen Problem am nächsten kommt, führt ein solches Modell zu einem enormen Berechnungsaufwand bei der numerischen Lösung.

Cai (2011) entwickelte eine simplere Formulierung: Für die die Lösung des mechanisches Problems mit Hilfe der FEM wird eine Topologieoptimierung mit zwei isotropen, linear-elastischen Materialien angenommen und nur die Sensitivitäten werden mittels einer Gewichtung basierend auf der lokalen Zug- bzw. Druckbelastung modifiziert, sodass sich eine Zug-Druck-Anisotropie nur während der Optimierung ergibt. In Gaganelis u. a. (2019) wurde die Idee der Gewichtung aufgegriffen und zwei Modelle basierend auf zwei unterschiedlichen Optimierungsansätzen wurden entwickelt: Ein klassischer Ansatz für die Optimierung mit Hilfe üblicher Sensitivitätsanalysen in Kombination mit der MMA und ein Ansatz mit der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten TDO basierend auf dem Hamilton-Prinzip. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird nur auf die TDO eingegangen, welche durch eine TTO mit zwei Materialien und einer expliziten, energiebasierten Bestrafung für die Phasenverteilung definiert ist.

8.2. Hamilton-Prinzip

8.2.1. Materialgesetz

Zur Optimierung der Topologie einer Struktur, welche aus einem zug- und einem druckaffinen Material besteht, werden zwei Designvariablen $\chi(\mathbf{x}) \in]0, 1] \forall \mathbf{x} \in \Omega$ und $\varphi(\mathbf{x}) \in [0, 1] \forall \mathbf{x} \in \Omega$ eingeführt. Dabei entspricht χ der üblichen Dichtevariable, welche die Topologie durch Vollmaterial mit $\chi = 1$ oder durch die Abwesenheit von Material mit $\chi \rightarrow 0$ indiziert. Die Phasenvariable φ gibt an, welches der beiden zur Auswahl stehenden Materialien lokal eingesetzt werden soll. Für das Materialgesetz wird eine Reuss-Mischung aus den jeweils isotropen zug-

und druckaffinen Materialien definiert, welche gegeben ist durch

$$\mathbb{E}(\chi, \varphi) = \rho(\chi) \left[(1 - \varphi) [\mathbb{E}_0^-]^{-1} + \varphi [\mathbb{E}_0^+]^{-1} \right]^{-1} \quad (8.2.1)$$

mit dem Potenzgesetz $\rho(\chi) = \chi^p$ und den isotropen Steifigkeitstensoren $\mathbb{E}_0^-$ für das druckaffine (Voll-)Material (beispielsweise Beton) sowie $\mathbb{E}_0^+$ für das zugaffine (Voll-)Material (beispielsweise Stahl). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi = 1 \wedge \varphi = 0 &\rightarrow \text{druckaffines Vollmaterial} \\ \chi = 1 \wedge \varphi = 1 &\rightarrow \text{zugaffines Vollmaterial} \\ \chi = 0 &\rightarrow \text{Abwesenheit von Material} \end{aligned}$$

Prinzipiell handelt es sich hierbei um eine Mischung aus zwei linear-elastischen isotropen Materialien, welche jeweils für sich keinerlei Anisotropie aufweisen. Dadurch kann innerhalb der FEM ein linear-elastisches und isotropes Material für die Lösung des mechanischen Problems ausgewertet werden, sodass keine nicht-lineare FEM benötigt wird. Die Zug-Druck-Anisotropie wird explizit über eine energetische Bestrafung realisiert, welche nur in die Auswertung der Evolutionsgleichung für die Phasenvariable φ eingeht. Diese sorgt auch dafür, dass Zwischenphasen $\varphi \in]0, 1[$ nicht zusätzlich bestraft werden müssen, um diskrete Ergebnisse $\varphi \in \{0, 1\}$ zu erhalten. Die entsprechenden Formulierungen werden im nun folgenden Abschnitt diskutiert.

8.2.2. Zug-Druck-Anisotropie

Die ökonomische Prämisse „Beton nur unter Druck, Stahl nur unter Zug“ widerspricht bei der Anwendung isotroper Materialien ohne Nebenbedingungen der physikalisch bzw. mechanisch optimalen Lösung, welche sich durch die Minimierung der Gibbs-Energie $\mathcal{G}$ in Abhängigkeit der Phasenvariable φ ergeben würde. Hierbei würde immer das steifere Material (i.d.R. Stahl) gewählt werden, da rein mechanisch betrachtet kein Grund besteht, das „schwächere“ Material einzusetzen, sofern beide unbegrenzt vorhanden sind. Daher werden für die Optimierung unter Zug-Druck-Anisotropie unterschiedliche Zielfunktionen bzw. Variationsprinzipien für die DichtevARIABLE χ und die Phasenverteilung φ

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{H} = \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{G}(\mathbf{u}, \chi, \varphi) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (8.2.2)$$

$$\delta_{\chi} \mathcal{H} = \delta_{\chi} \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \chi, \varphi) + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi_{\chi}}{\partial \dot{\chi}} \delta \chi \right) dV + \delta_{\chi} \mathcal{C}_{\chi} + \delta_{\chi} \mathcal{R}_{\chi} = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (8.2.3)$$

$$\delta_{\varphi} \mathcal{H} = \delta_{\varphi} \mathcal{P} + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi_{\varphi}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi \right) dV + \delta_{\varphi} \mathcal{C}_{\varphi} = 0 \quad \forall \delta \varphi \quad (8.2.4)$$

definiert. Gleichung (8.2.2) und (8.2.3) entsprechen dabei der bekannten mechanisch motivierten Topologieoptimierung, wobei nun das Materialgesetz gemäß Gl. (8.2.1) angewandt wird. Die Ableitung für die Triebkräfte der DichtevARIABLE ergeben sich zu

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \mathbb{E}(\chi, \varphi) = \frac{\partial \rho}{\partial \chi} \left[(1 - \varphi) [\mathbb{E}_0^-]^{-1} + \varphi [\mathbb{E}_0^+]^{-1} \right]^{-1}. \quad (8.2.5)$$

Das Variationsprinzip (8.2.4) definiert vollständig die Optimierung der Phasenvariable φ , wobei die Zielfunktion, gegeben durch $\mathcal{P}$, die geforderte ökonomische Prämisse erfüllen soll.

Die Zielfunktion $\mathcal{P}$ ist nach Gaganelis u. a. (2019) gegeben als

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega} ((1 - \varphi) \Pi^+ + \varphi \Pi^-) dV, \quad (8.2.6)$$

wobei Π^+ ein Maß für die (lokale) Zugbelastung und Π^- ein Maß für die (lokale) Druckbelastung ist. Damit werden Bereiche mit zugaffinem Material $\varphi = 1$, welche unter Druckbelastung (repräsentiert durch Π^-) stehen, energetisch bestraft und analog Bereiche mit druckaffinem Material $\varphi = 0$ unter Zugbelastung (repräsentiert durch Π^+). Durch die Energieminimierung, welche durch die Variationsprinzipien gegeben ist, wird folglich ein Zustand angestrebt, in dem zugaffines Material unter Zugbelastung und druckaffines Material unter Druckbelastung steht, sodass die Energie $\mathcal{P}$ minimiert wird bzw. gegen null geht. Als Maß für die lokale Ausprägung der Zug- bzw. Druckbelastung werden

$$\Pi^+ := \frac{\Psi^+}{\Psi} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^+}{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8.2.7)$$

für die Zugbelastung und

$$\Pi^- := \frac{\Psi^-}{\Psi} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^- \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^-}{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8.2.8)$$

für die Druckbelastung definiert [Cai (2011)]. Diese basieren auf der spektralen Zerlegung (gegeben für die Voigt-Notation)

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \sum_{i=1}^d \sigma_i \mathbf{e}_i \quad \forall \sigma_i > 0 \quad (8.2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^- = \sum_{i=1}^d \sigma_i \mathbf{e}_i \quad \forall \sigma_i < 0 \quad (8.2.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \mathbf{e}_i \quad \forall \varepsilon_i > 0 \quad (8.2.11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^- = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \mathbf{e}_i \quad \forall \varepsilon_i < 0, \quad (8.2.12)$$

wobei σ_i bzw. ε_i die Eigenwerte der jeweiligen Tensoren repräsentieren. Es gilt somit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^- \quad (8.2.13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-. \quad (8.2.14)$$

Damit ergibt sich die Aufteilung der Helmholtz-Energie

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^+}_{:= \Psi^+} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^-}_{:= \Psi^-} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^- + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^+}_{:= \Psi^\pm = 0}, \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

wobei hier $\Psi^\pm = 0$ aufgrund der Anwendung von isotropen Materialien gilt. Dementsprechend gilt $\Pi^+ + \Pi^- = 1$, sodass Π^+ durch $1 - \Pi^-$ ersetzt werden kann.

8.2.3. Dissipationsfunktion und Nebenbedingungen

Für die Dissipationsfunktion wird ein üblicher viskoser Ansatz mit

$$\Phi_\varphi = \frac{1}{2} \eta_\varphi \dot{\varphi}^2 \quad (8.2.16)$$

angewandt, wobei hier die Viskosität $\eta_\varphi > 0$ wie gehabt einen Parameter zwecks numerischer Dämpfung repräsentiert. Die einzige Nebenbedingung für die Phasenvariable ist die Intervallbegrenzung $\varphi \in [0, 1]$, sodass sich das Funktional $\mathcal{C}_\varphi$ analog zu dem der DichtevARIABLE χ gemäß Abschnitt 3.7.2 ergibt zu

$$\mathcal{C}_\varphi = \int_{\Omega} \gamma_\varphi \varphi \, dV \quad (8.2.17)$$

mit dem Kuhn-Tucker-Paramter

$$\gamma_\varphi = \begin{cases} -\gamma_\varphi^* & \text{falls } \dot{\varphi} < 0 \wedge \varphi = 0 \\ \gamma_\varphi^* & \text{falls } \dot{\varphi} > 0 \wedge \varphi = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.2.18)$$

8.2.4. Stationaritätsbedingung und numerische Lösung

Mit den gegebenen Funktionalen ergibt aus dem Variationsprinzip (8.2.4) die Beziehung

$$\left[\int_{\Omega} (\eta_\varphi \dot{\varphi} + \gamma_\varphi - \Pi^+ + \Pi^-) \, dV \right] \delta\varphi = 0 \quad \forall \delta\varphi \quad (8.2.19)$$

und damit die Evolutionsgleichung für die Phasenvariable

$$\dot{\varphi} = \frac{\Pi^+ - \Pi^- - \gamma_\varphi}{\eta_\varphi}. \quad (8.2.20)$$

Für die numerische Lösung kann diese wiederum mit Hilfe der expliziten Zeitdiskretisierung

$$\varphi^{i+1} = \varphi^i + \underbrace{N_j \Delta t}_{=1} \dot{\varphi}(\epsilon^i, \chi^i, \varphi^i). \quad (8.2.21)$$

ausgewertet werden, analog zur simultanen Optimierung der Topologie und der lokalen Materialorientierung gemäß Abschnitt 7.2.4.

Die Phasenvariable wird, wie die DichtevARIABLE, elementweise diskretisiert, sodass sich für die Phasenvariable eines Elementes c

$$\bar{\varphi}_c^{i+1} = \bar{\varphi}_c^i + \frac{2\bar{\Pi}_c^+ - 1 - \gamma_\varphi|_c}{\eta_\varphi} \quad (8.2.22)$$

mit

$$\bar{\Pi}_c^+ = \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \Pi^+ \, dV \quad (8.2.23)$$

ergibt, wobei hier die Beziehung $\Pi^- = 1 - \Pi^+$ eingesetzt wurde. Der Kuhn-Tucker-Parameter γ_φ kann durch eine min-max-Funktion ersetzt werden, sodass sich letztendlich

$$\bar{\varphi}_c^{i+1} := \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \bar{\varphi}_c^i + \frac{2\bar{\Pi}_c^+ - 1}{\eta_\varphi} \right\} \right\} \quad (8.2.24)$$

für das Update der Phasenvariable φ_c eines jeden finiten Elementes c ergibt. Folglich kann die Auswertung der Evolutionsgleichung bzw. das Update lokal ausgeführt werden, d.h. in jedem Element separat. Der allgemeine Programmablauf für die simultane Optimierung der Topologie und der Phasenverteilung für die Zug-Druck-Anisotropie ist in Abb. 7.2.2 illustriert.

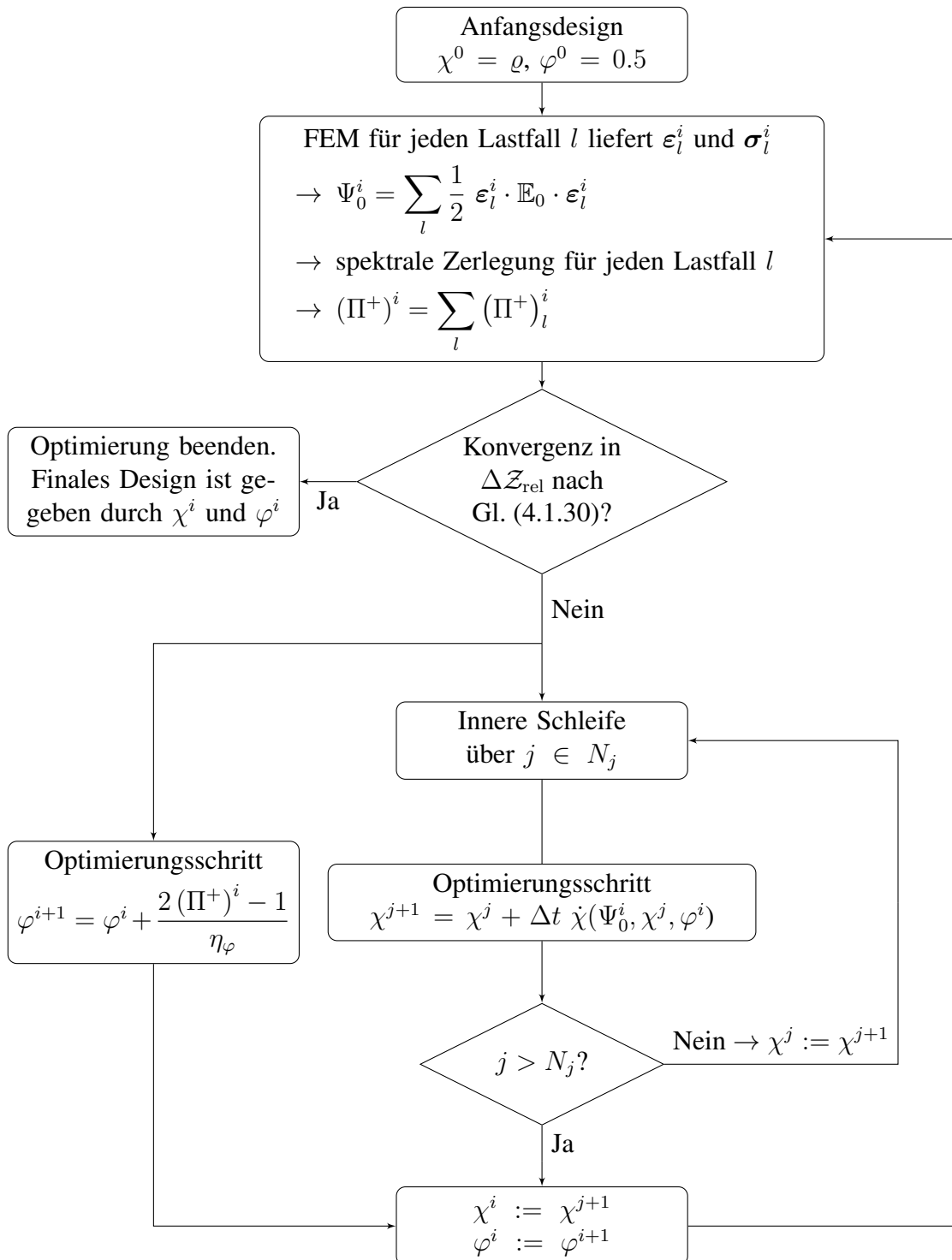


Abbildung 8.2.1.: Allgemeiner Programmablaufplan für die simultane Optimierung der Topologie χ und der Phasenverteilung φ für Materialien mit Zug-Druck-Anisotropie.

8.2.5. Regularisierung

Für die Phasenvariable wird keine Regularisierung eingeführt, obwohl die numerischen Ergebnisse streng genommen netzabhängig sind: Die Phasenverteilung in den Übergangszonen zwischen den Materialien $\varphi \in \{0, 1\}$ im Vollmaterial $\chi = 1$ können je nach Netzfeinheit beliebig feine Adern ausbilden. Diese haben jedoch keinen Einfluss auf die resultierende Topologie der Struktur, d.h. für die Lösung der DichtevARIABLE χ . Die tatsächliche Umsetzung der Phasenverteilung in den Übergangszonen ist durch technische Maßnahmen limitiert, sodass die Optimierung der Übergangszonen zweitrangig ist und auf die Regularisierung der Phasenvariable verzichtet wird [Gaganelis u. a. (2019)].

Falls eine Regularisierung der Phasenvariable gefordert sein sollte, könnte diese analog zu DichtevARIABLE χ umgesetzt werden: Das Funktional $\mathcal{H}_\varphi$ in Gl. (8.2.4) könnte additiv um einen Regularisierungsterm

$$\mathcal{R}_\varphi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \beta_\varphi |\nabla \varphi|^2 \, dV \quad (8.2.25)$$

erweitert werden. Die resultierende Evolutionsgleichung lässt sich dann in die starke Form

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\eta_\varphi} (\Pi^+ - \Pi^- + \beta_\varphi \nabla^2 \varphi - \gamma_\varphi) \quad (8.2.26)$$

überführen, womit sich die Neumann-Randbedingungen $\nabla \varphi = 0 \, \forall \, \mathbf{x} \in \partial\Omega$ ergeben. Die Evolutionsgleichung ließe sich dann analog zur DichtevARIABLE χ lösen, wobei die identischen Operator-matrizen $\mathbf{B}^\nabla$ gemäß Gl. (4.2.37) zur Bestimmung des Laplace-Operators $\nabla^2 \varphi$ verwendet werden können.

8.3. Numerische Ergebnisse

8.3.1. Parameter und Anfangsbedingungen

Für die Optimierung unter Zug-Druck-Anisotropie werden für die Topologieoptimierung der SIMP-Ansatz mit konstantem Strukturvolumen die Beziehungen, numerischen Parameter sowie Anfangsbedingungen gemäß Abschnitt 5.3.1 angewandt. Hierbei wird nur der Steifigkeitstensor sowie seine Ableitung nach der DichtevARIABLE gemäß Gl. (8.2.1) und (8.2.5) ersetzt. Für das zug- und druckaffine Material $\mathbb{E}_0^+$ und $\mathbb{E}_0^-$ werden jeweils linear elastische Materialien (Hooke'sches Gesetz) mit

$$\begin{array}{lll} \text{Elastizitätsmoduli:} & E_0^+ = 4 & E_0^- = 1 \\ \text{Querkontraktionszahlen:} & \nu_0^+ = 0.3 & \nu_0^- = 0.4 \end{array}$$

angenommen. Die Ergebnisse sind nicht abhängig von den Beträgen der Elastizitätsmoduli, sondern nur von dem Verhältnis $E_0^+ : E_0^-$, welches im vorliegenden Fall mit 4 : 1 in etwa einer Stahl-Beton-Konstruktion entspricht. Die Entwicklung der Phasenvariable erfolgt im Vergleich zur DichtevARIABLE wesentlich schneller, d.h. in nur wenigen Iterationsschritten, sodass der Einfluss der Anfangsbedingungen für die Phasenvariable φ^0 vernachlässigbar gering ist [Gaganelis u. a. (2019)]. Daher wird der Einfachheit halber immer $\varphi^0 = 0.5$ angewandt. Die Viskosität der Phasenvariable ist $\eta_\varphi = 1.0$.

Um die Topologie gegeben durch χ sowie die Phasenverteilung gegeben durch φ gleichzeitig darstellen zu können, wird die Funktion

$$\chi_\varphi = \chi \operatorname{sgn}(\varphi - 0.5) \quad (8.3.1)$$

gemäß Abb. 8.3.1 abgebildet. Hierbei ist die *Signum*-Funktion gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(\varphi - 0.5) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi > 0.5 \text{ (zugaffines Material)} \\ -1 & \text{falls } \varphi < 0.5 \text{ (druckaffines Material)} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.3.2)$$

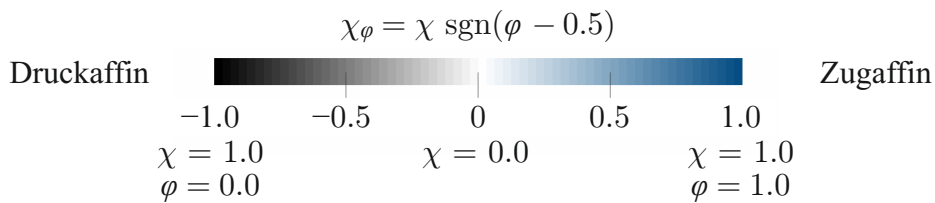


Abbildung 8.3.1.: Kombinierte Darstellung der Topologie χ und Phasenverteilung φ .

Die Menge an zug- bzw. druckaffinem Material ist nicht vorgegeben und ergibt sich aus den jeweiligen Spannungszuständen der Randwertprobleme. Da die Materialsteifigkeiten des zug- und druckaffinen Materials, d.h. die Elastizitätsmoduli E_0^- und E_0^+ , unterschiedlich sind, kann die Menge an zug- bzw. druckaffinem Material signifikanten Einfluss auf die Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ haben. Dementsprechend wird neben der Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ als zusätzliche Größe der

Anteil an druckaffinen Vollmaterial

$$\varrho^- = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \chi (1 - \varphi) dV \quad (8.3.3)$$

mit $\varrho^- + \varrho^+ = \varrho$ angegeben. Zusätzlich wird nach Gaganelis u. a. (2019) der lokale Zug-Druck-Fehler

$$\epsilon_{\text{ZD}} = \frac{\chi}{2} \left[(1 - \varphi) \left(1 + \text{sgn}(|\sigma_i|_{\max}) \right) + \varphi \left(1 - \text{sgn}(|\sigma_i|_{\max}) \right) \right] \quad (8.3.4)$$

eingeführt, wobei die Signum-Funktion der betragsmäßig größten Eigenspannung einbezogen wird mit

$$\text{sgn}(|\sigma_i|_{\max}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \max |\sigma_i| \geq 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.3.5)$$

Folglich geht der Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} gegen 100%, falls in einem Spannungszustand, in welchem die betragsmäßig größte Hauptspannung $|\sigma_i|_{\max}$ eine Zugspannung ist, vollständig druckaffines Material ($\varphi = 0$) ausbildet wird, bzw. vollständig druckaffines Material ($\varphi = 1$) ausbildet wird, falls die betragsmäßig größte Hauptspannung eine Zugspannung ist. Dieses Fehlermaß entspricht damit nicht der eigentlichen Modellprämisse, nach welcher sich die Phasenverteilung aus den Energietermen Π^+ und Π^- gemäß Gl. (8.2.7) und Gl. (8.2.8) ergibt, welche sämtliche Hauptdehnungen und Hauptspannungen einbeziehen. Der Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} bezieht sich jedoch nur auf die betragsmäßig größte Hauptspannung. Der lokale Fehler ϵ_{ZD} wird farblich für die resultierenden Struktur $\Omega_S := \{\mathbf{x} \mid \chi(\mathbf{x}) \geq 0.5\}$ gemäß Abb. 8.3.2 abgebildet. Basierend



Abbildung 8.3.2.: Darstellung des lokalen Fehlermaßes ϵ_{ZD} .

auf dem Fehlermaß ϵ_{ZD} wird des Weiteren das globale Fehlermaß

$$\mathcal{E}_{\text{ZD}} = \frac{\int_{\Omega} \epsilon_{\text{ZD}} dV}{\int_{\Omega} \chi dV} \quad (8.3.6)$$

definiert.

Die Optimierung gilt als konvergiert, sobald das Konvergenzkriterien gemäß Gl. (4.1.30) mit $\Delta \mathcal{Z}_{\text{rel}}^{\text{tol}} = 10^{-5}$ erfüllt ist, sodass automatisch alle Designvariablen des Problems in das Konvergenzkriterien mit eingehen.

8.3.2. Evolution der Topologie

Abbildung 8.3.3 zeigt die Entwicklung der Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$ und Abb. 8.3.4 zeigt die Entwicklung des Volumenanteils an druckaffinen Materials ϱ^- während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1), wobei die Ergebnisse für eine nach oben und nach unten gerichtete Einzellast gegeben sind. In Abb. 8.3.7 ist der lokale Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD}

für die konvergierten Ergebnisse der Topologie sowie der Verlauf des globalen Zug-Druck-Fehlers $\mathcal{E}_{\text{ZD}}$ während des Optimierungsprozesses gegeben.

Das Konvergenzverhalten ist sehr ähnlich zur Optimierung mit isotropem Materialien. Die Phasenverteilung nähert sich schnell dem Endzustand an, verändert sich aber im Detail und passt sich der Topologie an. Durch die Umkehrung der Kraft verändert sich die Konfiguration von zug- und druckbelasteten Regionen im Designraum bzw. in der Struktur. Dies hat Einfluss auf die Phasenverteilung des zug- und druckaffinen Materials, was wiederum nicht nur die Form sondern auch die Topologie der optimierten Struktur verändert. Da das druckaffine Material in den hier gezeigten Beispielen eine geringere Steifigkeit als das zugaffine Material aufweist, werden grundsätzlich dickere Balkensegmente aus druckaffinen als aus zugaffinen Material ausgeprägt. Ob druck- oder zugaffines Material während der Optimierung ausgeprägt wird, hängt nicht mit den Steifigkeitseigenschaften der Materialien zusammen, sondern wird alleine durch die Vorzeichen der lokalen Hauptspannungen bzw. Dehnungen bestimmt. Folglich kann es zu einer Reduktion der Struktursteifigkeit bei gleichbleibenden Strukturvolumen ϱ kommen, falls aufgrund der lokalen Spannungszustände mehr zug- als druckaffines Material ausgeprägt wird.

Der lokale Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} ist in den Übergangszonen zwischen Druck- und Zugphase ausgeprägt, tendiert aber in allen anderen Bereichen der Topologie gegen null, sodass der globale Zug-Druck-Fehler $\mathcal{E}_{\text{ZD}}$ unter 3% liegt. Weitere Beispiele in den folgenden Abschnitten bestätigen dieses Modellverhalten. Besonders an den Übergangszonen zwischen Druck- und Zugphase kann es zu biaxialen Spannungszuständen kommen, wohingegen der Großteil der Struktur aus Balken besteht, welche hauptsächlich uniaxial beansprucht werden. Dementsprechend ist es nachvollziehbar, dass der lokale Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} in den Übergangszonen besonders groß ist, da dieses Fehlermaß auf der betragsmäßig größten Eigenspannung basiert, wohingegen die Optimierung der Phasenverteilung auf der Auswertung sämtlicher Hauptspannungen und Hauptdehnungen basiert. Folglich sind die gewählten Zug-Druck-Fehler unpassend, um die Modellprämisse zu bewerten. Diese sind jedoch sinnvoll, falls andere Kriterien, wie beispielsweise das Versagen gemäß einer Hauptnormalspannungshypothese, untersucht werden sollen.

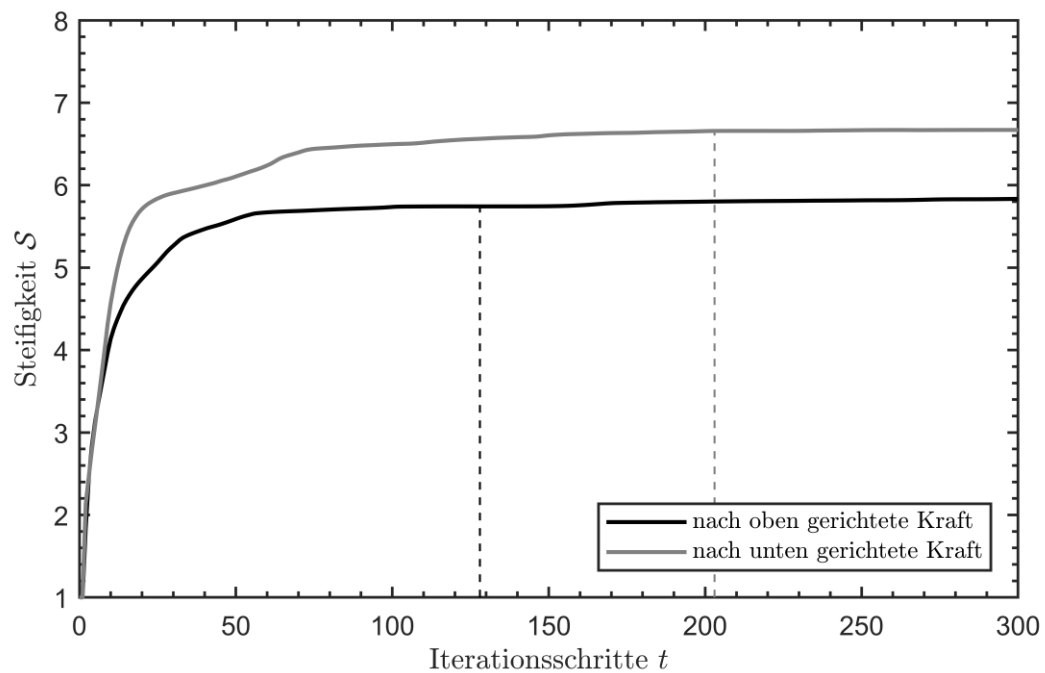


Abbildung 8.3.3.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 8.3.5 und 8.3.6 mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

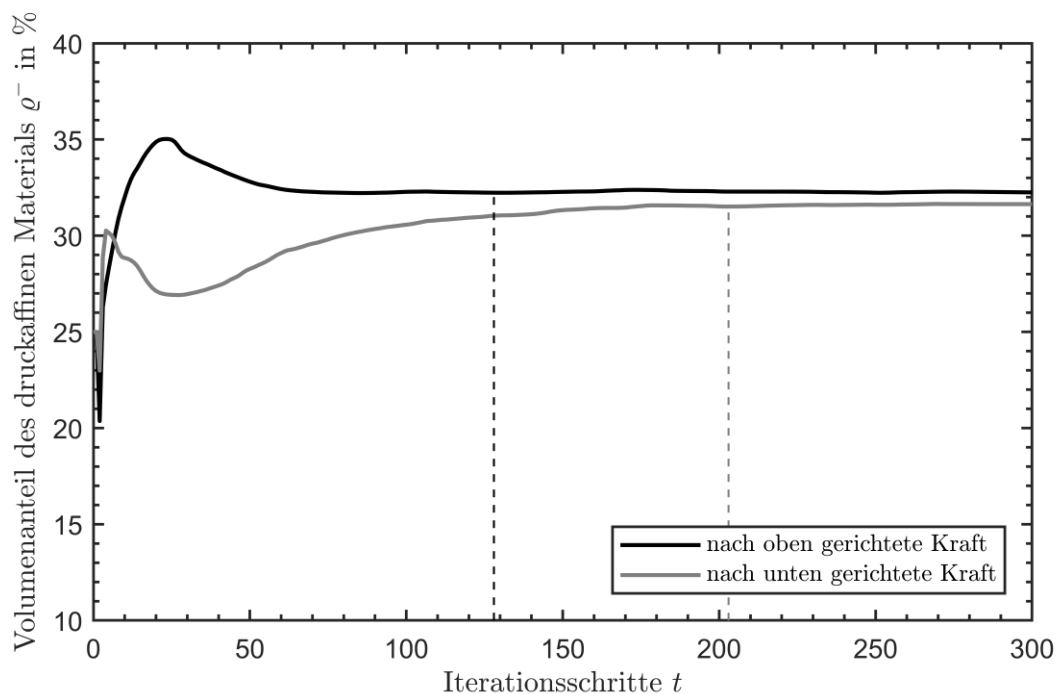


Abbildung 8.3.4.: Entwicklung des Volumenanteils an druckaffinen Material ϱ^- während des Optimierungsprozesses für den abgewinkelten Balken in Abb. 8.3.5 und 8.3.6 mit einem Strukturvolumen von $\varrho^- + \varrho^+ = \varrho = 50\%$. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

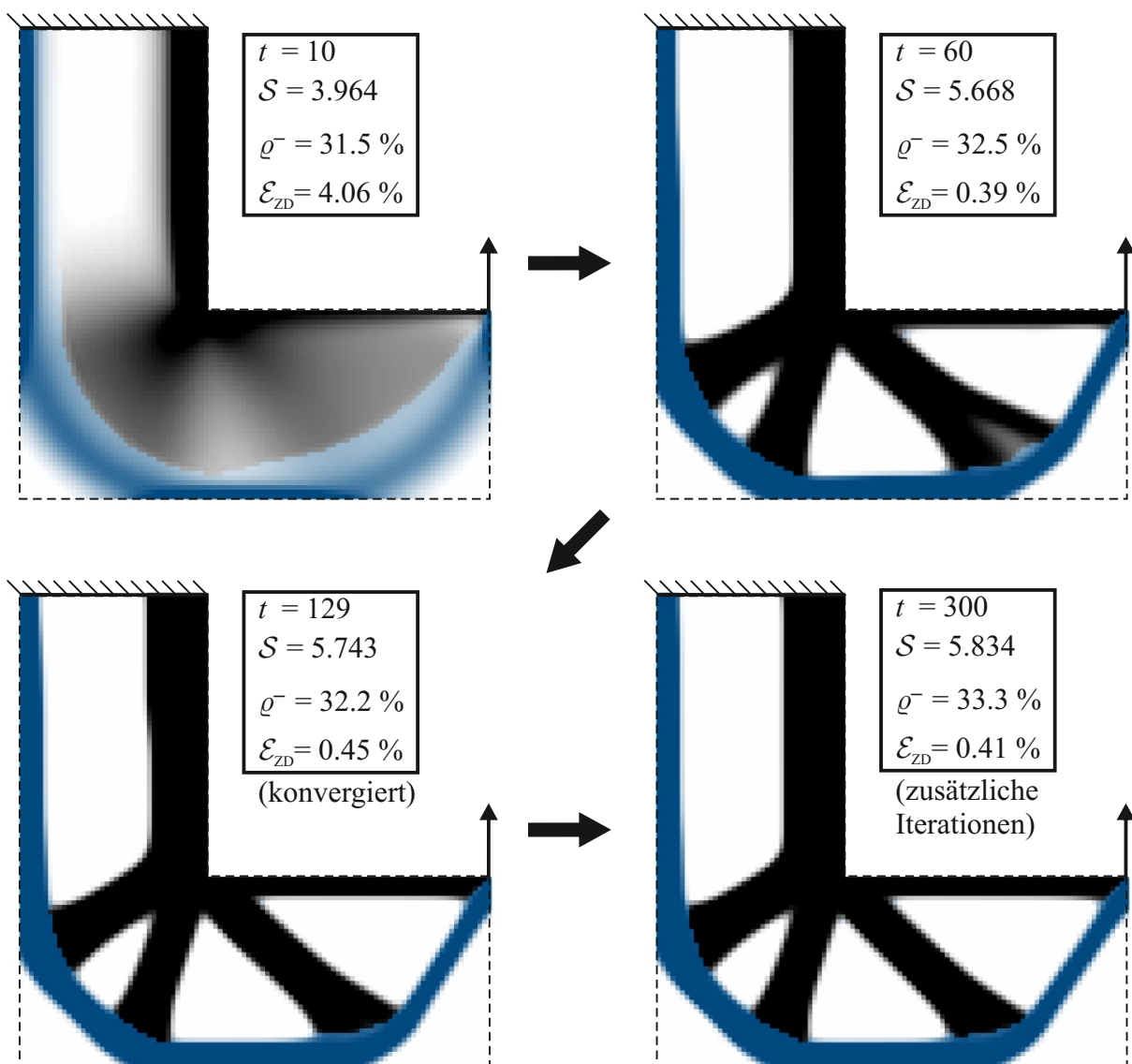


Abbildung 8.3.5.: Evolution der Struktur für den abgewinkelten Balken (Abb. 5.1.1) mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ inklusive konvergiertem Zustand sowie Ergebnis nach 300 Iterationsschritten.

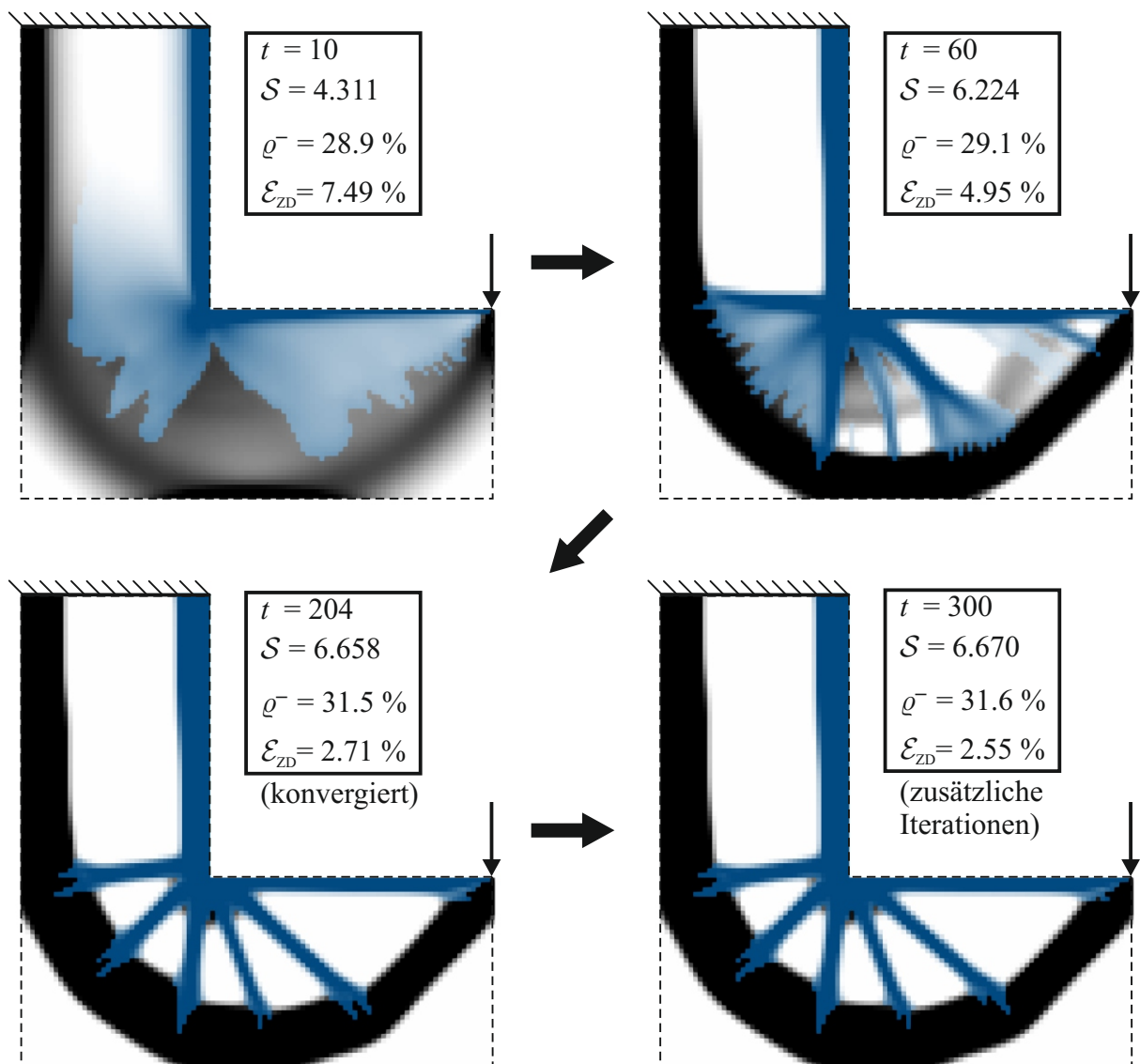


Abbildung 8.3.6.: Evolution der Struktur Analog zu Abb. 8.3.5, wobei nun das Vorzeichen bzw. Richtung der angreifenden Kraft geändert wurde.

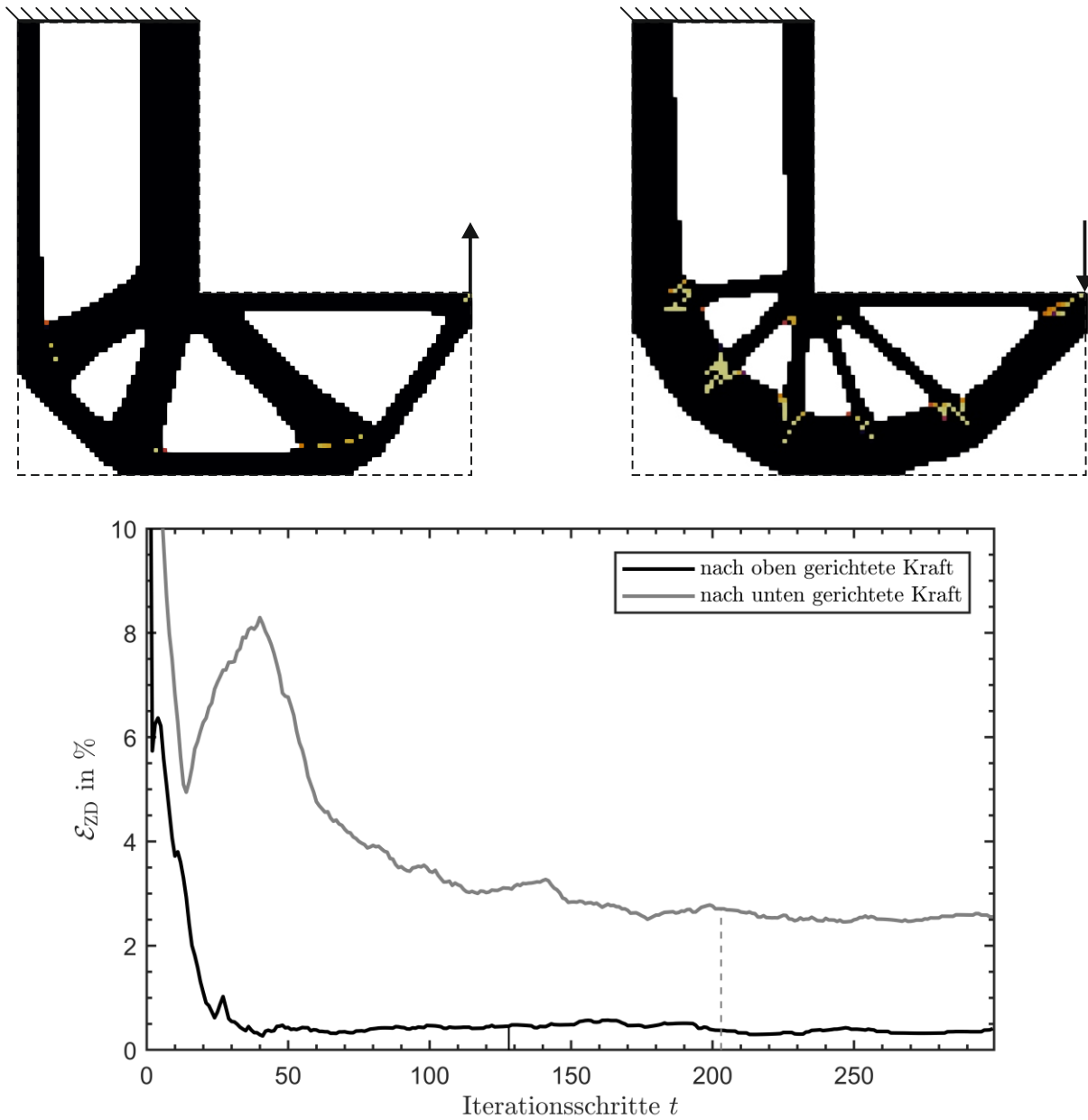


Abbildung 8.3.7.: Lokaler Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} für $\chi \geq 0.5$ der konvergierten Ergebnisse aus Abb. 8.3.5 und 8.3.6 sowie die Entwicklung des globalen Zug-Druck-Fehlers $\mathcal{E}_{ZD}$ während des Optimierungsprozesses.

Netzunabhängigkeit

Die Abbildungen 8.3.9 bis 8.3.10 zeigen die Entwicklung der Struktursteifigkeit $\mathcal{S}$, den Volumenanteil an druckaffinen Material ϱ^- sowie die Topologie der konvergierten Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 3$) für unterschiedliche Diskretisierungen und gleichbleibendem Regularisierungsparameter β^* . Analog zeigen die Abbildungen 8.3.11 bis 8.3.13 die Ergebnisse für den MBB-Balken gemäß Abb. 5.1.3. Bei der Vernetzung mit 8337 Elementen für den Biegebalken sowie mit 16699 Elementen für den MBB-Balken ist je ein halbseitig strukturiertes und halbseitig unstrukturiertes Netz angewandt worden, analog zu Abb. 5.3.10 bzw. Abb. 5.3.11. Abbildung 8.3.13 zeigt zusätzliche Ergebnisse für den MBB-Balken mit einem anderen Wert für den Regularisierungsparameter β^* , welcher die Ausprägung feinerer Struktursegmente ermöglicht.

Obwohl keine explizite Regularisierung für die Phasenvariable φ angewandt wurde, sind die Ergebnisse der Topologien quantitativ und qualitativ aus Anwendungssicht hinreichend netzunabhängig. Die einzigen signifikanten Unterschiede ergeben sich an den Übergangszonen zwischen druck- und zugaffinen Material, welche je nach Feinheit der Diskretisierung unterschiedlich fein ausgeprägt sind. Die Übergangszonen sind aus fertigungstechnischer Sicht eine Herausforderung für sich und entsprechende Nebenbedingungen können nicht ohne weiteres in die Topologieoptimierung eingepflegt werden. Da die hier gezeigten Modelle zur Topologieoptimierung in erster Linie der Findung eines ersten Designvorschlages dienen und da die Ausprägung der Übergangszonen keinen Einfluss auf die insgesamt resultierenden (makroskopischen) Ergebnisse haben, wird auf eine Regularisierung der Phasenvariable φ im Rahmen der vorliegenden Arbeit verzichtet.

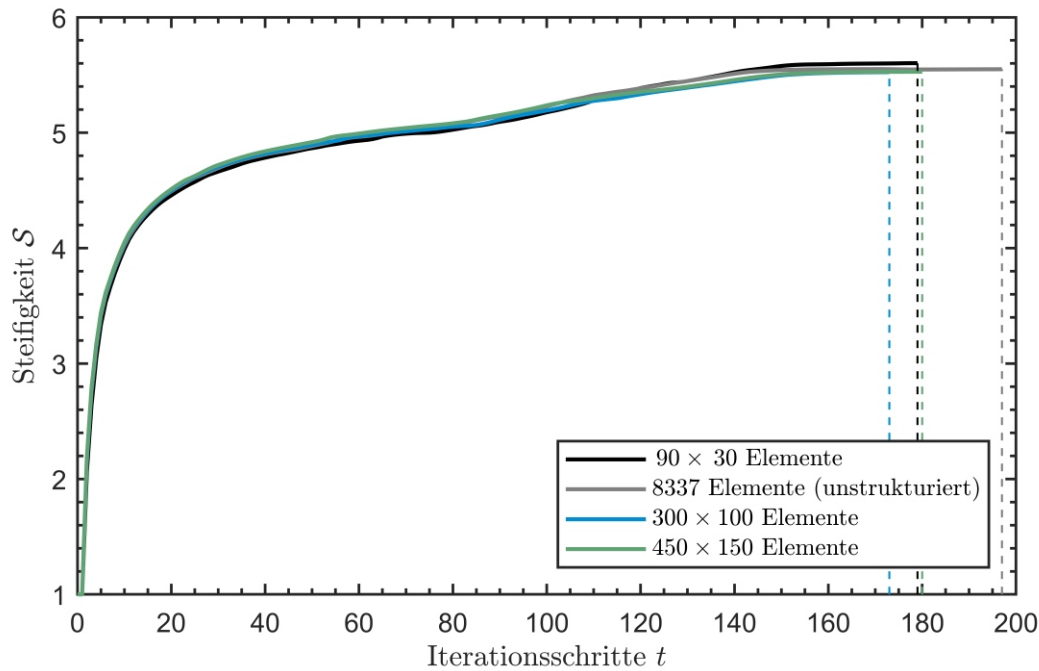


Abbildung 8.3.8.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den Biegebalken in Abb. 8.3.10 mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ für unterschiedliche Netze. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

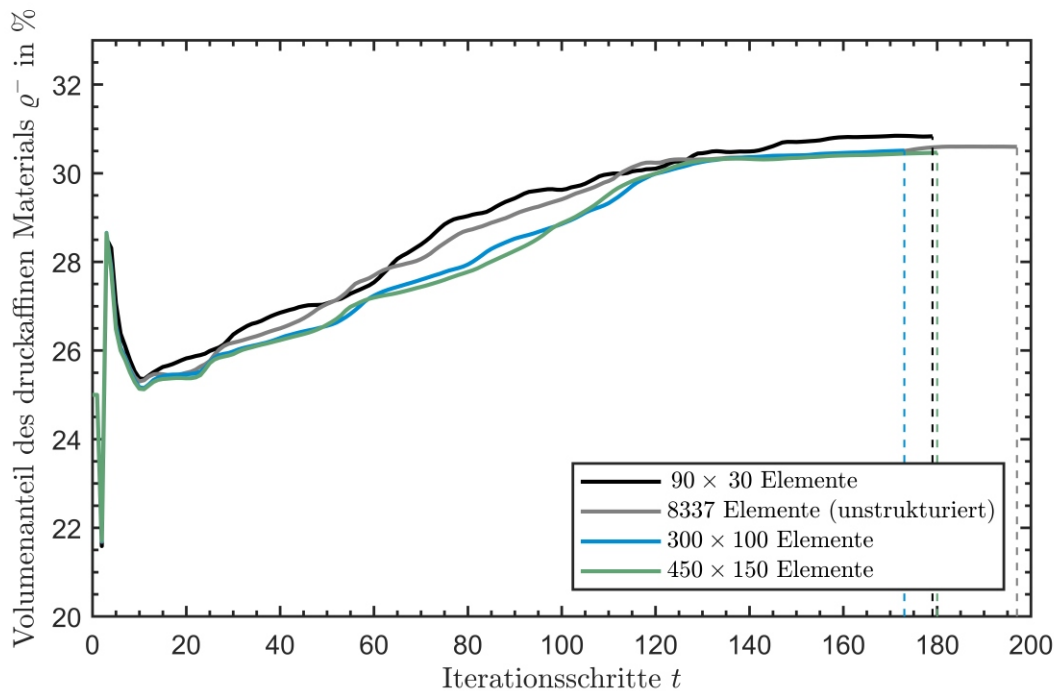


Abbildung 8.3.9.: Entwicklung des Volumenanteils an druckaffinen Material ϱ^- während des Optimierungsprozesses für den Biegebalken in Abb. 8.3.10 mit einem Strukturvolumen von $\varrho^- + \varrho^+ = \varrho = 50\%$ für unterschiedliche Netze. Die senkrechten Linien markieren jeweils den Iterationsschritt, in welchem das Konvergenzkriterium (erstmal) erfüllt wurde.

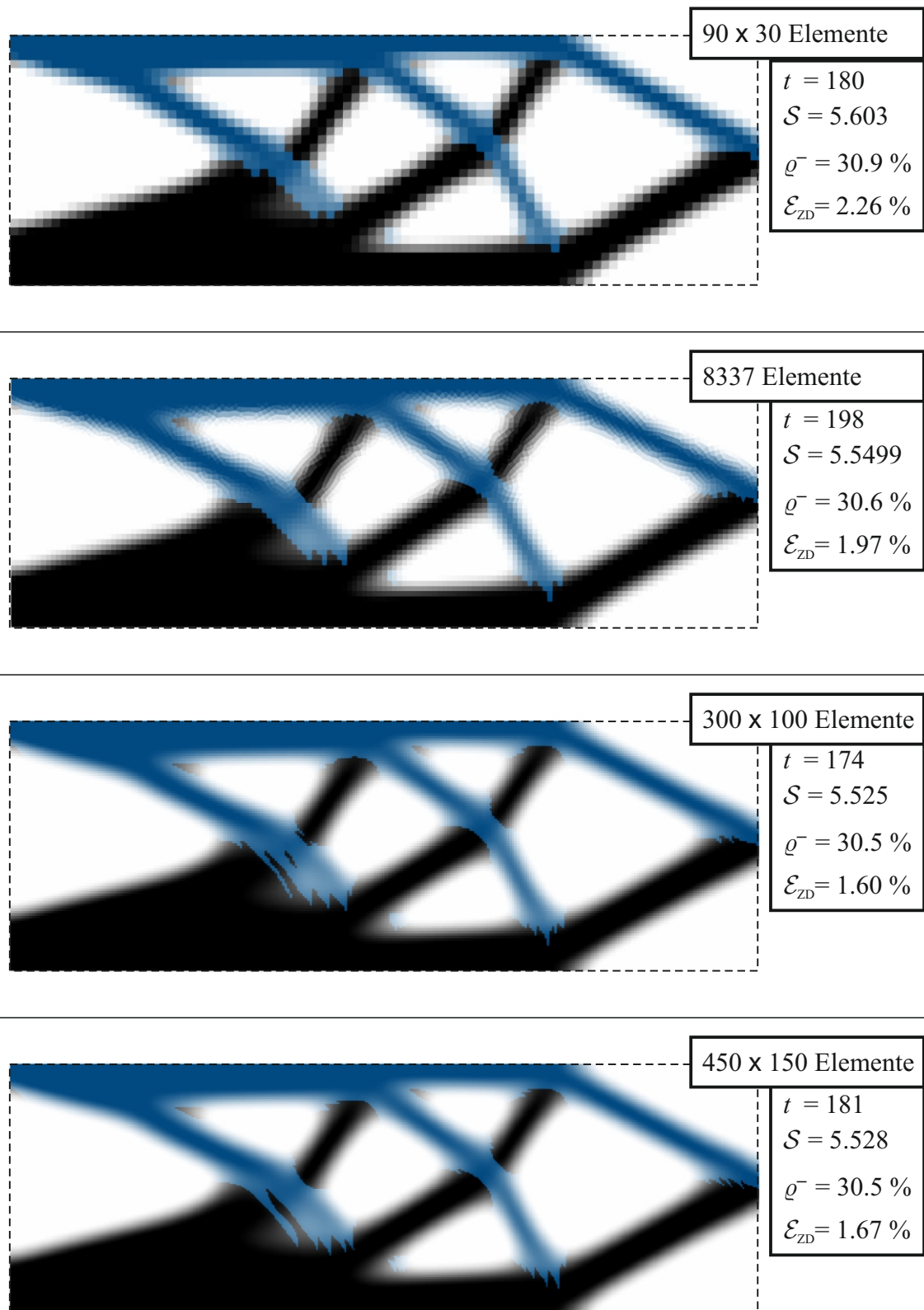


Abbildung 8.3.10.: Ergebnisse für den Biegebalken (Abb. 5.1.2, $L = 3$) für unterschiedliche Netze mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ und Regularisierung $\beta^* = 320 \times 10^{-5}$.

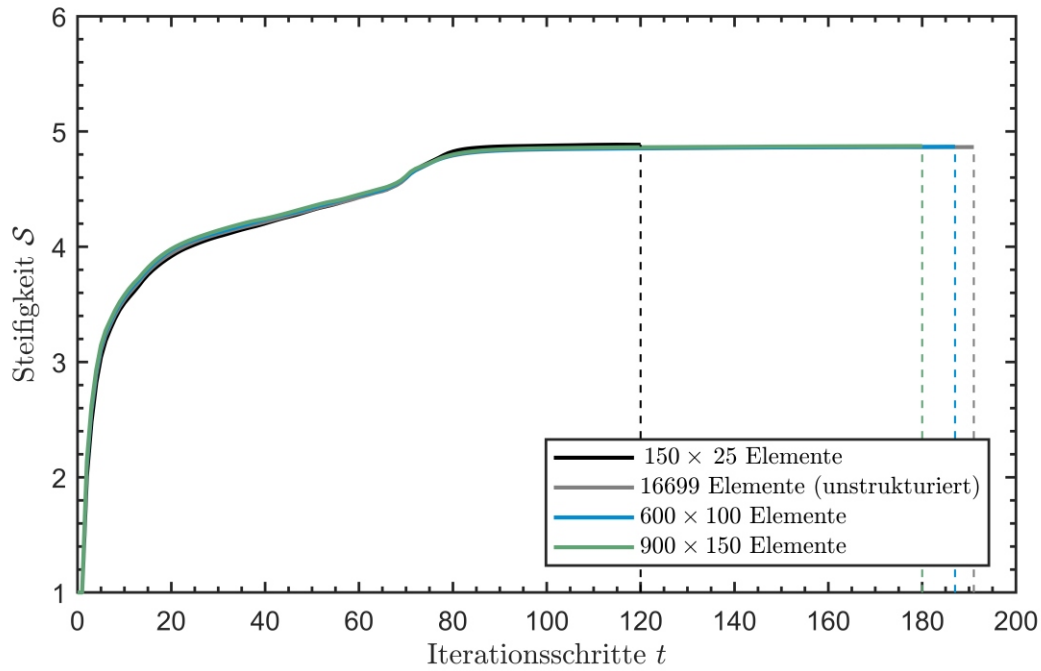


Abbildung 8.3.11.: Entwicklung der Struktursteifigkeit S während des Optimierungsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 8.3.13 mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ für unterschiedliche Netze mit Regularisierungsparameter $\beta^* = 320 \times 10^{-5}$.

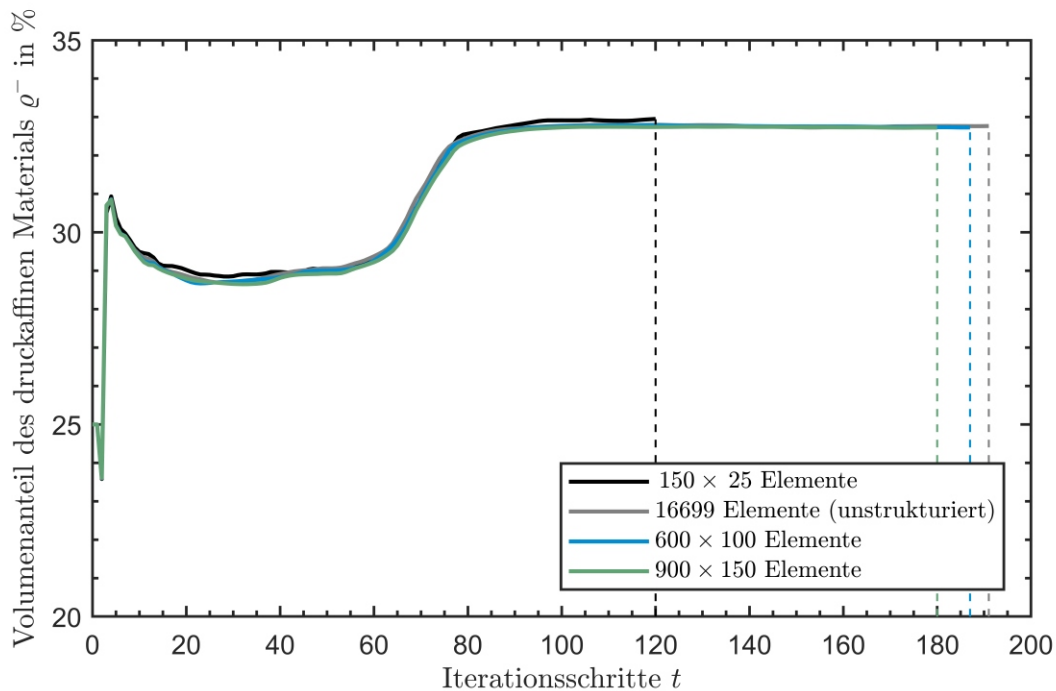
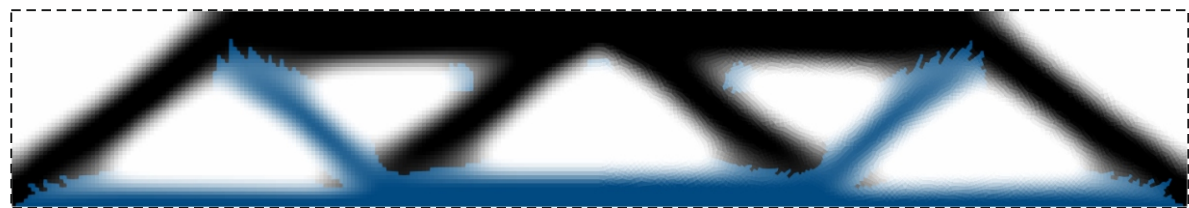


Abbildung 8.3.12.: Entwicklung des Volumenanteils an druckaffinen Material ϱ^- während des Optimierungsprozesses für den MBB-Balken in Abb. 8.3.13 mit einem Strukturvolumen von $\varrho^- + \varrho^+ = \varrho = 50\%$ für unterschiedliche Netze mit Regularisierungsparameter $\beta^* = 320 \times 10^{-5}$.



150 x 25 Elemente

 $t = 121$
 $\mathcal{S} = 4.885$
 $\varrho^- = 33.3 \%$
 $\mathcal{E}_{\text{zd}} = 1.11 \%$


16699 Elemente

 $t = 192$
 $\mathcal{S} = 4.865$
 $\varrho^- = 32.7 \%$
 $\mathcal{E}_{\text{zd}} = 1.94 \%$


600 x 100 Elemente

 $t = 188$
 $\mathcal{S} = 4.868$
 $\varrho^- = 32.7 \%$
 $\mathcal{E}_{\text{zd}} = 1.35 \%$


900 x 150 Elemente

 $t = 181$
 $\mathcal{S} = 4.873$
 $\varrho^- = 32.7 \%$
 $\mathcal{E}_{\text{zd}} = 1.21 \%$

Abbildung 8.3.13.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) für unterschiedliche Netze mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ und Regularisierungsparameter $\beta^* = 320 \times 10^{-5}$.

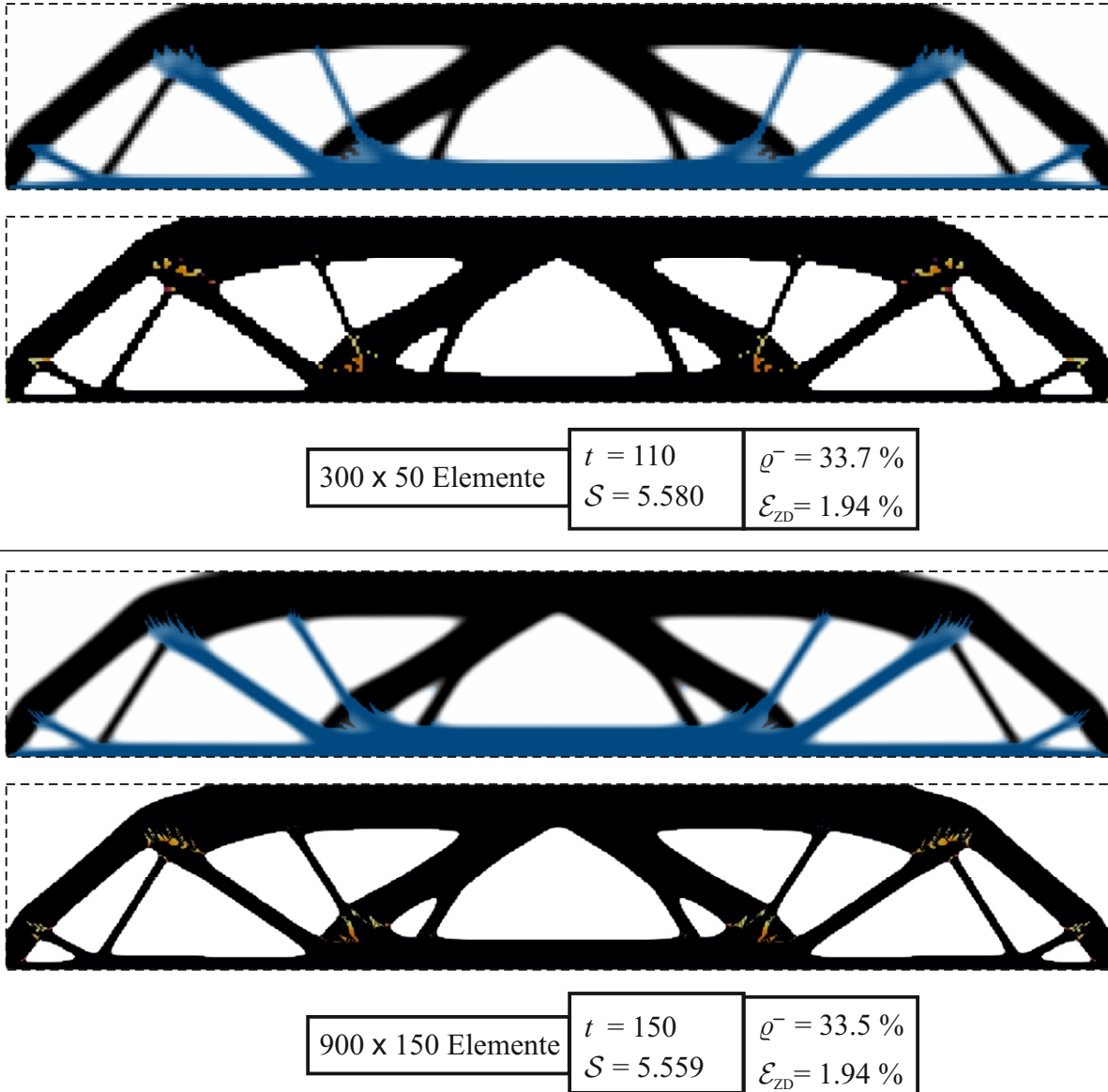


Abbildung 8.3.14.: Ergebnisse für den MBB-Balken (Abb. 5.1.3) inklusive lokalem Zug-Druck-Fehler ϵ_{ZD} (für $\chi \geq 0.5$) für unterschiedlich feine Netze mit einem Strukturvolumen von $\varrho = 50\%$ und Regularisierungsparameter für die DichtevARIABLE $\beta^* = 80 \times 10^{-5}$.

8.3.3. Mehrlastfall

Abbildung 8.3.15 zeigt die Ergebnisse für den Einzel- und Mehrlastfall für einen Biegebalken mit im Gleichgewicht stehenden Einzellasten, analog zu Abb. 5.3.23. In Abbildung 8.3.16 sind die Ergebnisse des entsprechenden Randwertproblems mit modifizierten Designraumabmaßen und feinerer Diskretisierung bzw. kleinerem Mindeststrukturabmaß gegeben. Abbildung 8.3.17 zeigt die Ergebnisse für das Randwertproblem analog zu Abb. 5.3.23.

Wie auch bei der Optimierung mit isotropen Material führt die Topologieoptimierung bei dem Biegebalken in Abb. 8.3.15 mit im Gleichgewicht stehenden Kräften als Einzellastfall zu einer Struktur, welche nicht mit dem Lager verbunden ist. Im Mehrlastfall wird fast ausschließlich zugaffines Material ausgeprägt: Da beide Lastfälle zu einem symmetrischen Problem führen, in welchem die Dehnungs- und Spannungszustände sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, gibt es in Summe weder ausgeprägte Druck- oder Zugbelastungen. In diesem Fall wird das steifere Material ausgeprägt, was im vorliegenden Fall das zugaffine ist. Das Randwertproblem mit modifiziertem Designraum sowie geringerem Mindeststrukturabmaß in Abb. 8.3.16 führt zu weitaus komplexeren Strukturen im Mehrlastfall. Im Einzellastfall verbindet die entstehende Struktur die Kraftangriffspunkte mit der Lagerung, da in diesem Fall die Kräfte näher an der Lagerung als zueinander liegen. Dennoch fehlen Querverstreben, welche sich im Mehrlastfall ergeben, die die Struktursteifigkeit gegen eine Scherdeformation bei einem Ungleichgewicht der Kräfte verstärkt.

Beim Randwertproblem in Abb. 8.3.17 ergeben sich vornehmlich Druckbelastungen. Im Mehrlastfall werden zusätzlich Querstreben, welche unter Zugbelastung stehen, ausgeprägt, um die Struktur gegen eine Verdrehung bzw. ein Kippen des horizontalen Segmentes zu verstärken. Im Falle nicht-äquivalenter Kräfte wird am Rand nahe der größeren Kraft eine Schale bzw. Beschichtung aus zugaffinen Material ausgeprägt, welche als Zuggurte den Zugspannungen an der Oberfläche entgegenwirken (analog ergibt sich auch eine Schale aus zugaffinen Material für den Einzellastfall des ersten Beispiels in Abb. 8.3.15).

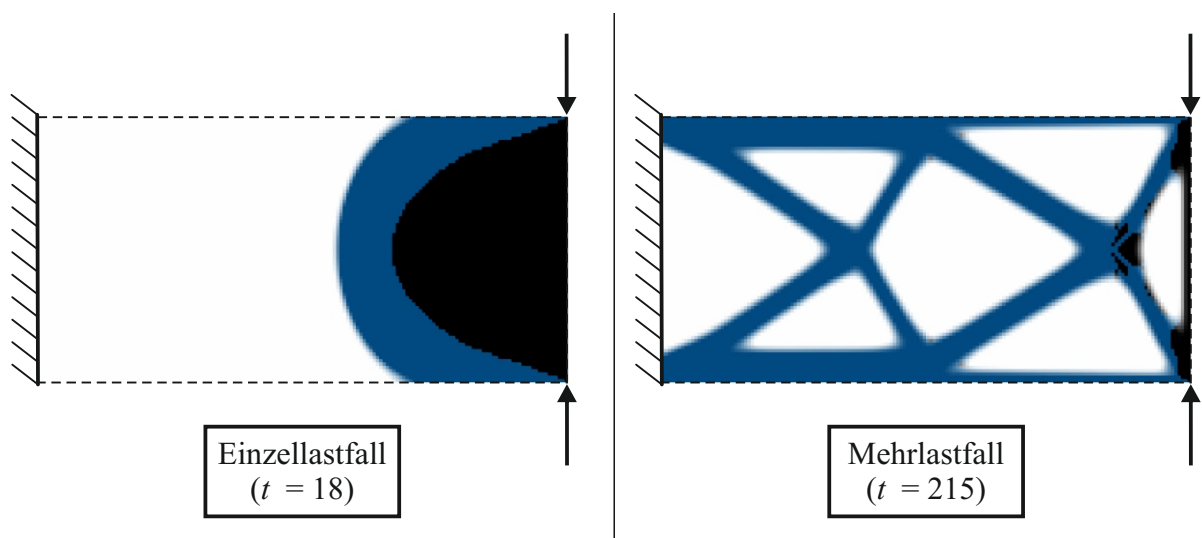


Abbildung 8.3.15.: Biegebalken analog zu Abb. 5.3.23 mit zwei angreifenden Einzellasten für den Einzellastfall und Mehrlastfall.

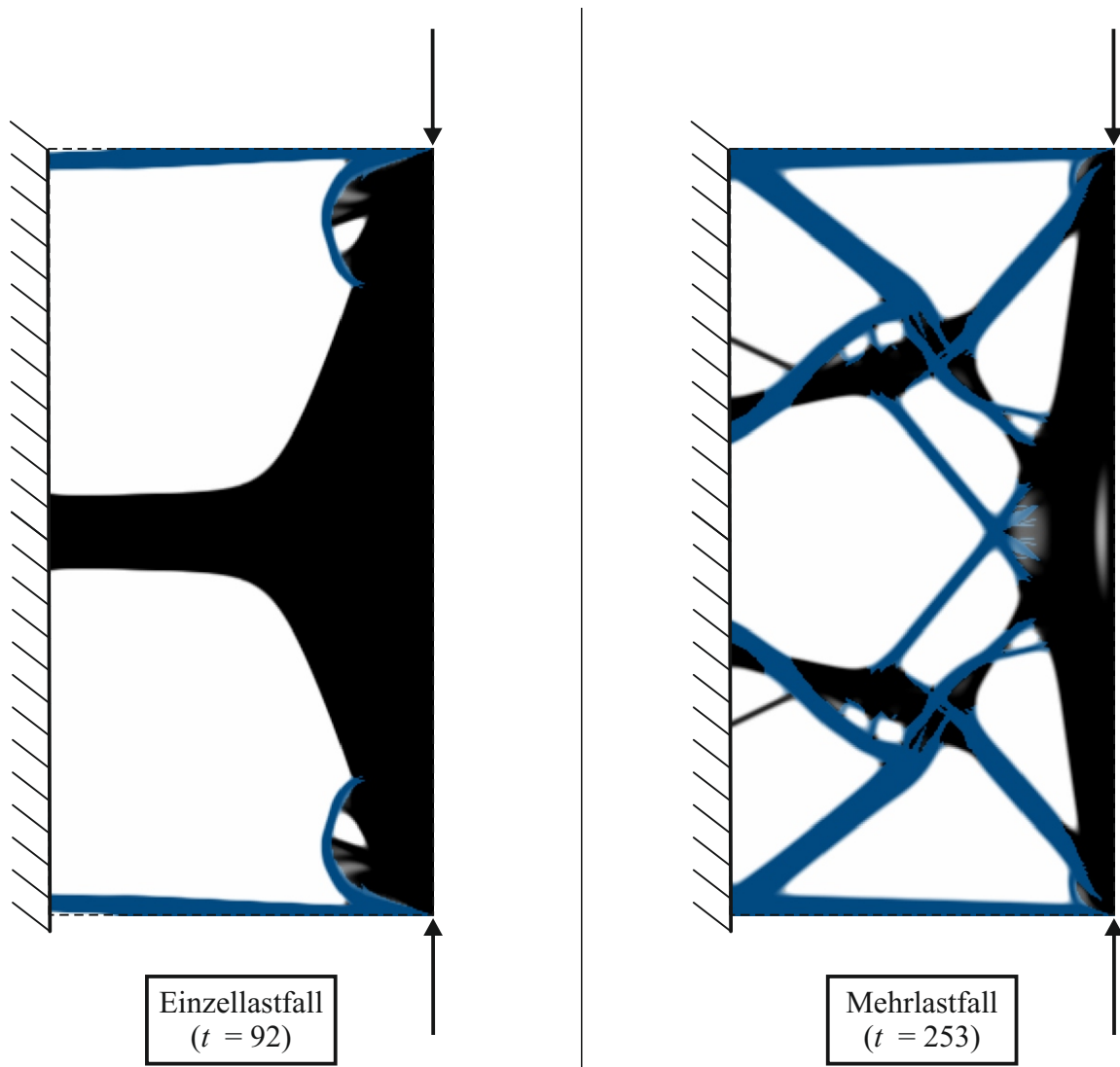


Abbildung 8.3.16.: Biegebalken (Abb. 5.3.23) mit variierten Abmaßen $\Omega = 1 \times 2$ und Netz mit 200×400 Elementen. Das Zielvolumen beträgt $\varrho = 40\%$ und der Regularisierungsparameter $\beta^* = 2/200^2 = 5 \times 10^{-5}$.

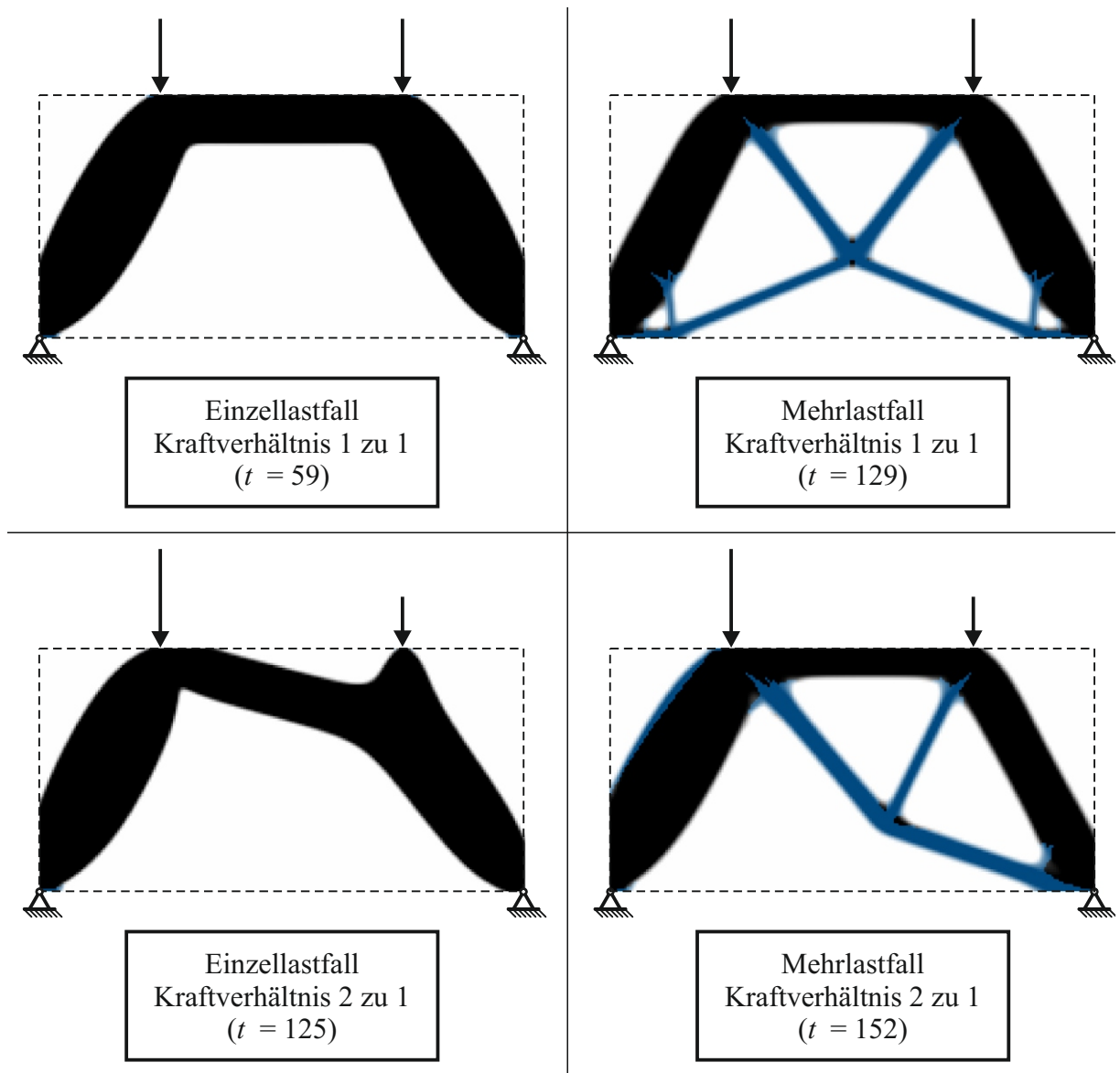


Abbildung 8.3.17.: Beispiel (analog zu Abb. 5.3.24) für einen Einzellastfall und Mehrlastfall mit Einfluss der Gewichtung der Lastfälle durch unterschiedliche Kraftverhältnisse.

8.3.4. Dreidimensionaler Fall

Die Abbildungen 8.3.18 und 8.3.19 zeigen die Ergebnisse für die dreidimensionalen Biegeprobleme gemäß Abb. 5.1.5 aus verschiedenen Perspektiven für nach unten und nach oben gerichtete Kräfte. Das Ergebnis für das simple Brückenrandwertproblem gemäß Abb. 5.3.27 ist in Abb. 8.3.20 gegeben, wobei die Fahrbahnplatte wiederum als Vollmaterialsegment $\chi = 1$ vordefiniert ist, aber die Materialphase φ ohne Einschränkungen optimiert wird.

Wie auch im zweidimensionalen Fall sind Balken bestehend aus druckaffinen Material, welches in den hier gezeigten Beispielen eine geringere Steifigkeit als das zugaffine Material aufweist, dicker ausgeprägt. Bei Umkehrung der Richtung der Kräfte ergeben sich dadurch unterschiedliche Topologien.

Die Ergebnis des simplen Brückenrandwertproblems in Abb. 8.3.20 ähnelt einer Hängebrücke mit zwei schrägen Pylonen, welche sich durch die Fahrbahnplatte bis zu den Lagerpunkten durchziehen. Die Pylonen sind miteinander und zur Fahrbahnplatte jeweils mit zwei bzw. vier Balken aus zugaffinen Material verbunden, welche durch Stahlseile realisiert werden könnten. Der mittlere Bereich der Fahrbahnplatte wird neben den Pylonen durch einen massiven Sockel bestehend aus druckaffinen Material gestützt, welche weniger Verästelungen aufweist als bei der Optimierung mit einem isotropem Material.

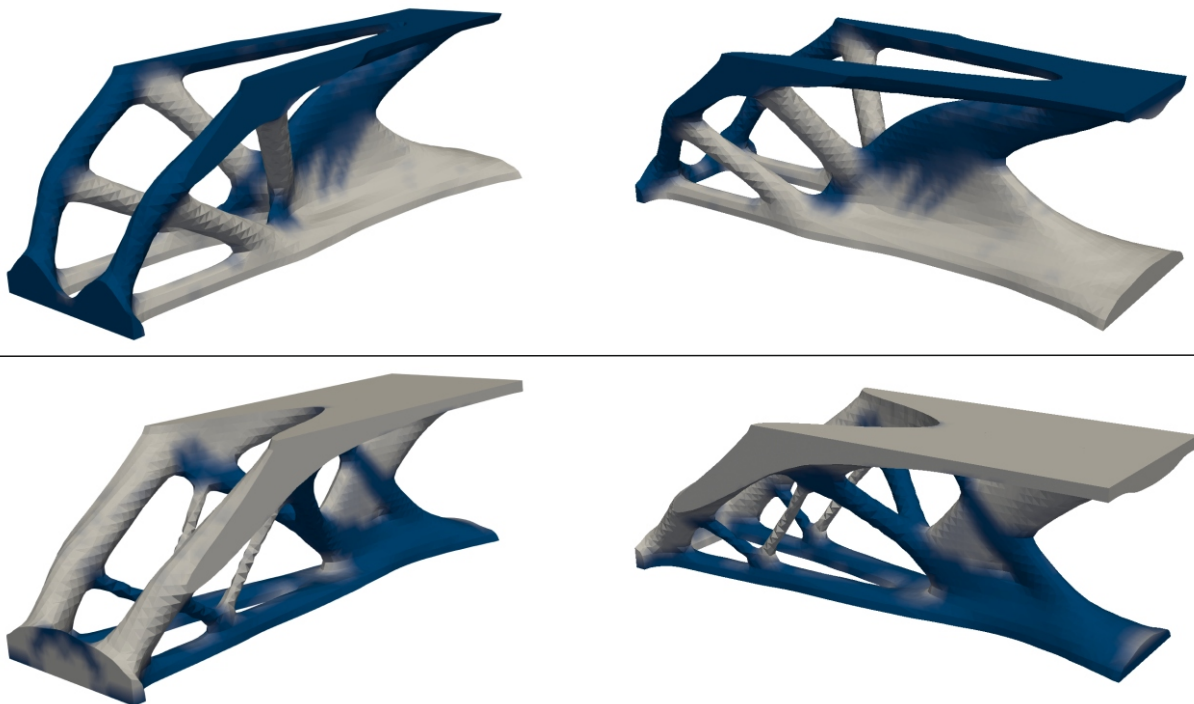


Abbildung 8.3.18.: Ergebnis für den dreidimensionalen Biegebalken (Abb. 5.1.5) für nach unten sowie nach oben gerichtete Kräfte. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 15\%$ und der Regularisierungsparameter ist $\beta^* = 350 \times 10^{-5}$ für ein Netz mit $72 \times 24 \times 24$ Elementen.

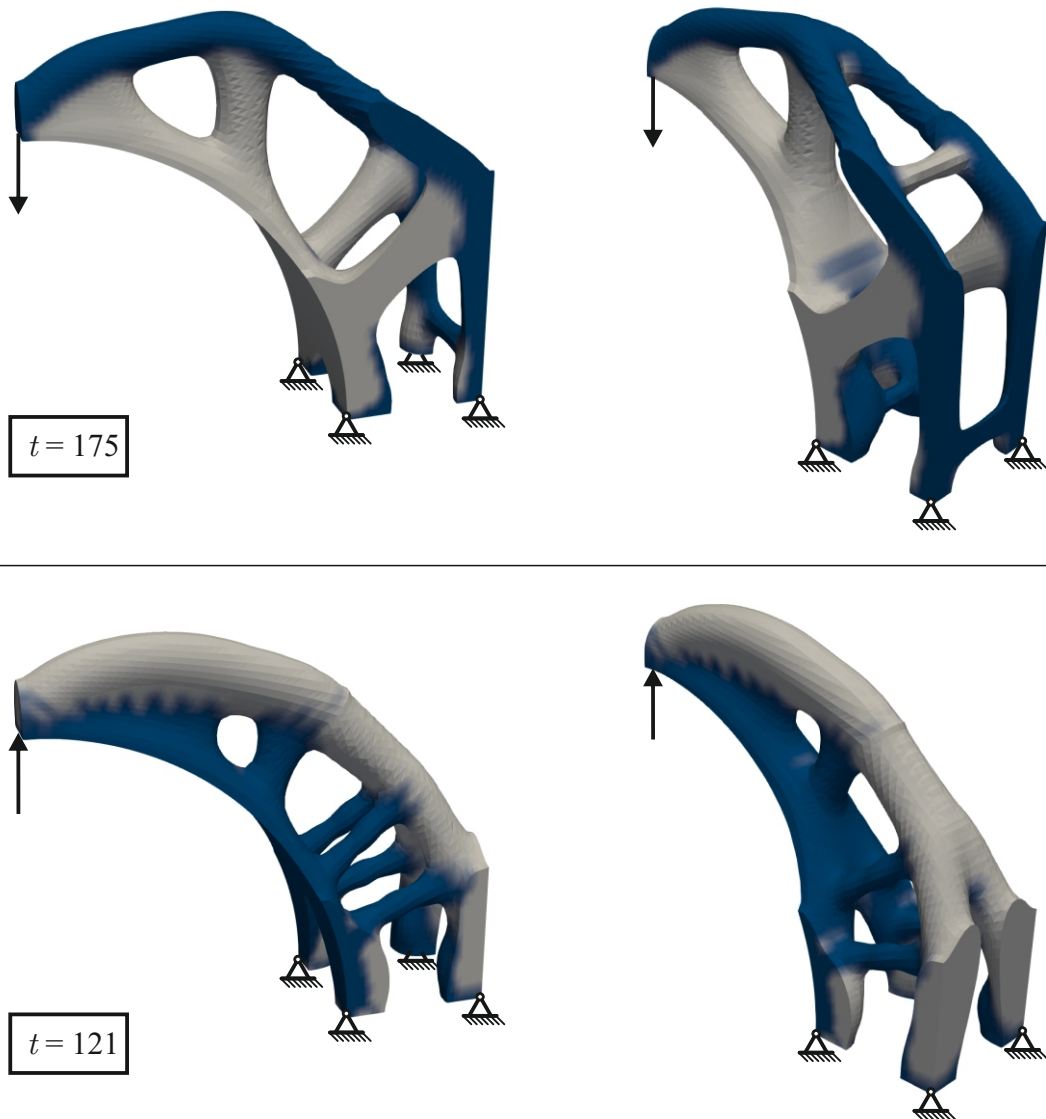


Abbildung 8.3.19.: Ergebnisse für das dreidimensionale Biegeproblem (Abb. 5.1.5) für eine nach unten und eine nach oben gerichtete Kraft. Das Strukturvolumen beträgt $\varrho = 13\%$ und der Regularisierungsparameter ist $\beta^* = 1500 \times 10^{-5}$.

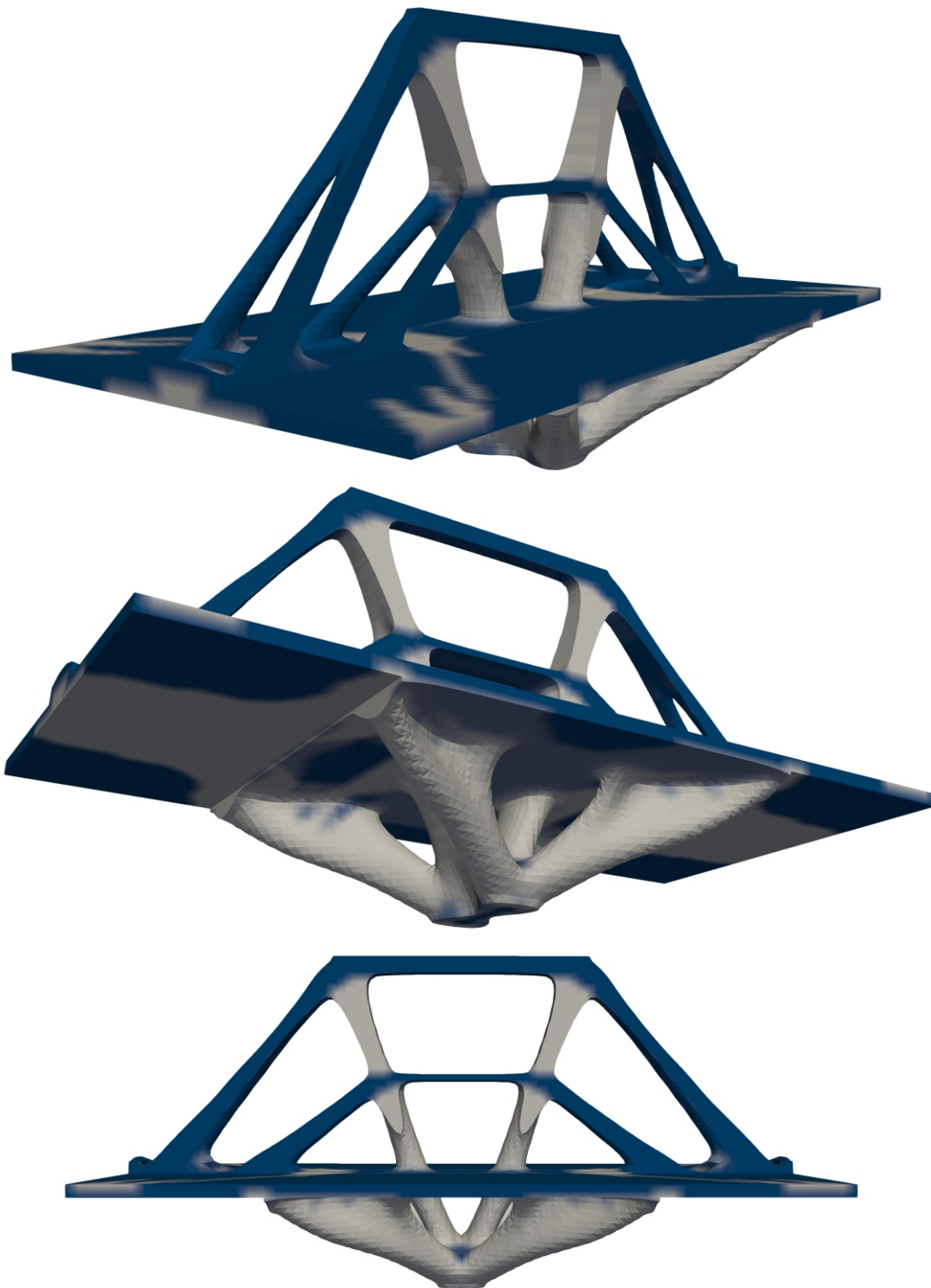


Abbildung 8.3.20.: Ergebnis für das simple Brückenrandwertproblem analog zu Abb. 5.3.27 nach $t = 185$ Iterationsschritten aus verschiedenen Perspektiven.

8.4. Zusammenfassung

Die Prämisse „zugaffines Material nur unter Zugbelastung und druckaffines Material nur unter Druckbelastung“ wurde mit Hilfe des präsentierten Ansatzes erfolgreich umgesetzt: Die Struktur wird über die Mischung zweier linear-elastischer und isotroper Materialien definiert. Daher muss keine nicht-lineare FEM zur Analyse des mechanischen Randwertproblems verwendet werden. Die Phasenverteilung erfolgt ausschließlich auf Basis der lokalen Spannungszustände über eine explizite energetische Bestrafung, sodass druckaffines Material in zugbelasteten Regionen und zugaffines Material entsprechend in druckbelasteten Regionen als energetisch ungünstig angesehen wird. Dementsprechend ist die Maximierung der Struktursteifigkeit sekundär und falls eines der beiden Materialien eine signifikant geringere Materialsteifigkeit aufweist, fällt die Struktursteifigkeit im Vergleich zur ausschließlichen Anwendung des steiferen der beiden Materialien geringer aus.

Ohne Anwendung einer Regularisierung der Phasenverteilung ergeben sich Netzabhängigkeiten, welche allerdings nur an den Übergangszonen zwischen zug- und druckaffinen Material auftreten und auf die resultierende Topologie bzw. das (makroskopische) Gesamtergebnis der Optimierung keinen sichtbaren Einfluss haben. Für die hier angestrebte Optimierung zwecks erster Designvorschläge ist die detaillierte Ausprägung der Übergangszonen weniger relevant, da diese aus fertigungstechnischer Sicht eine Herausforderung für sich darstellen und dementsprechend im Einzelfall durch Konstrukteure ausgelegt werden müssen.

Insgesamt liefert die hier gezeigte Optimierung für druck- und zugaffine Materialien plausible Ergebnisse. Beispielsweise ergibt das dreidimensionale Randwertproblem in Abb. 8.3.20 eine Hängebrückenkonstruktion mit zwei schrägen Pylonen. Als Gegenbeispiel zeigt Abb. 8.4.1 ein ähnliches (zweidimensionales) Randwertproblem mit anderen Designraumabmaßen, Lagerpunkten und weitaus höherer Auflösung bzw. geringerem Mindeststrukturabmaß. Hierfür liefert die Optimierung ein Design, welches im mittleren Bereich des Designraumes dem etablierten Aufbau einer Bogenbrücke mit einer durch Stahlseilen verbundenen untenliegenden Fahrbahn sehr nahe kommt. Zum äußeren Bereich des Designraumes hin ergibt sich wiederum eine Hängebrückenkonstruktion mit je zwei schrägen Pylonen.

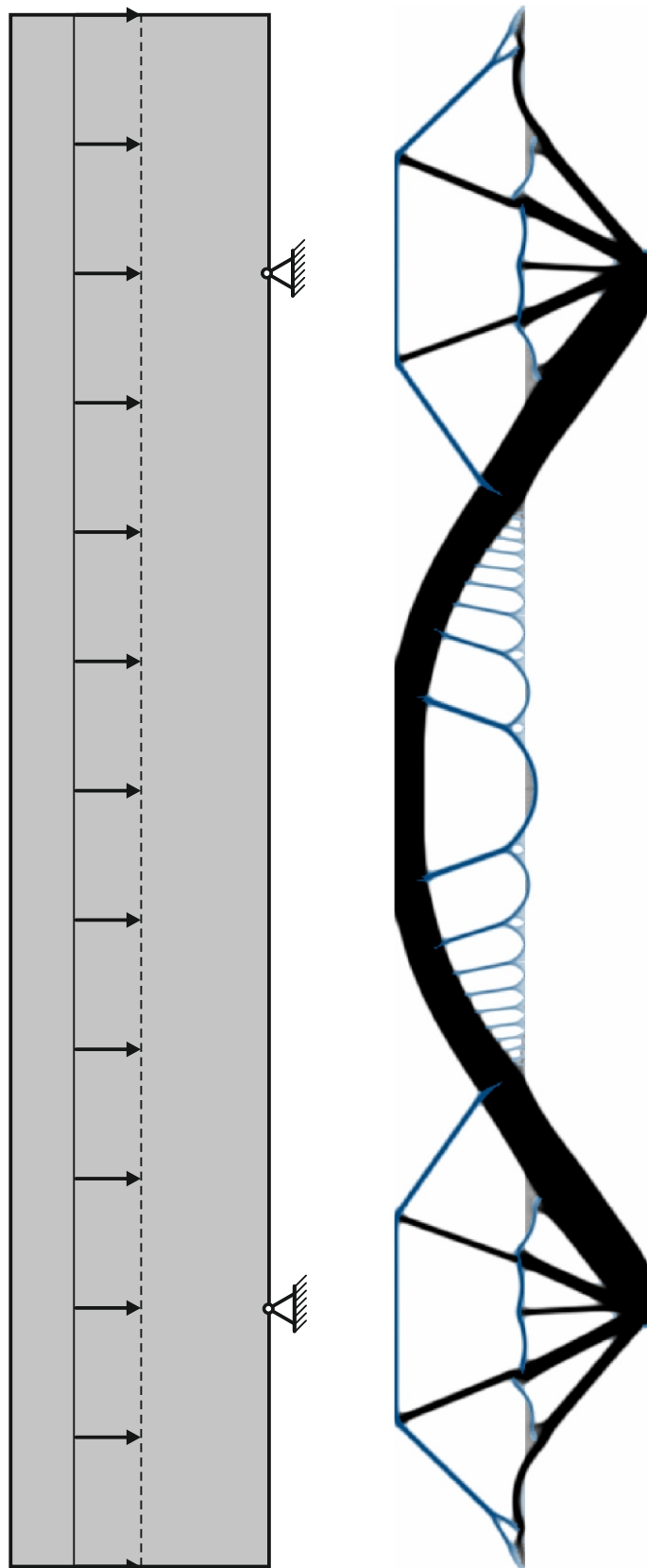


Abbildung 8.4.1.: Beispiel für Randbedingungen (Linienlast greift mittig im Designraum an) und Ergebnis für ein brückenähnliches Randwertproblem.

9. Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Ansätze zur Strukturoptimierung basierend auf thermodynamisch konsistenten Prinzipien, kurz thermodynamische Optimierung (TDO), entwickelt, welche mit Hilfe des Hamilton-Prinzips für dissipative Systeme bestimmt wurden. Das Hamilton-Prinzip basiert auf einer variationellen Energieminimierung, welche üblicherweise zur Entwicklung von Materialmodellen bezüglich mikrostrukturellen Evolutionsprozesse herangezogen wird. Die Variationsrechnung liefert hierbei partielle Differentialgleichungen bzw. Evolutionsgleichungen für die Entwicklung der internen Variablen, welche die mikrostrukturellen Evolutionsprozesse mathematisch beschreiben. Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, wie ein entsprechendes thermodynamisch konsistentes Energieminimierungsprinzip auf die Strukturoptimierung im Sinne einer Nachgiebigkeitsminimierung unter Volumen Nebenbedingung angewandt werden kann. Die Designvariablen sind hierbei mit den internen Variablen eines Materialmodells gleichzusetzen und die (numerische) Lösung der Evolutionsgleichungen entspricht der Ausführung eines Optimierungsalgorithmus. Neben der thermodynamischen Topologieoptimierung (TTO) wurde anhand zweier Beispiele die TDO der lokalen Materialeigenschaften gezeigt: Die lokale Materialorientierung von anisotropen Materialien sowie die Optimierung für Strukturen bestehend aus zug- und druckaffinen Materialien.

Für die TTO wird eine kontinuierlich interpolierte Dichteverteilung als Designvariable angesetzt. Aus fertigungstechnischer Sicht sind diskrete Strukturen, sogenannte „Schwarz-Weiß“-Lösungen, von Interesse, sodass entsprechende „graue“ Zwischendichten bestraft werden. Dieses Vorgehen ist allgemein als SIMP-Ansatz bekannt. Das entsprechende Minimierungsproblem ist mathematisch nicht-wohlgestellt und bedarf entsprechender Regularisierung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine entsprechende Regularisierung in Form einer energetischen Bestrafung des Gradienten der Dichteverteilung eingebunden, für dessen numerische Berechnung zwei unterschiedliche Methoden vorgestellt bzw. entwickelt wurden: Ein diskontinuierlicher Galerkin-Ansatz sowie ein Ansatz basierend auf der *Neighbored-Point-Method* (NPM). Dabei lag der Fokus insbesondere auf der numerischen Effizienz der Verfahren sowie die praktikable Steuerung der Strukturkomplexität durch Vorgabe des Mindeststrukturabmaßes.

Zwei Modelle zur TTO isotroper Materialien wurden vorgestellt. Beide Modelle basieren auf dem gleichen Hamilton-Prinzip und die Analyse des mechanischen Problems (Prinzip der virtuellen Arbeit) mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Die iterative Optimierung und Auswertung des Randwertproblems mittels der Finite-Elemente-Methode erfolgt entkoppelt und in einem alternierenden Prozess, sodass der Rechenaufwand innerhalb der Finite-Elemente-Methode auf ein Minimum reduziert wird. Die Modelle unterscheiden sich in der Ausprägung einiger Funktionen, wie zum Beispiel der Materialinterpolation und des Strukturvolumens während des Optimierungsprozesses. Der Hauptunterschied liegt in der numerischen Lösung der Gradiententerme, welche sich durch die Regularisierung ergeben. Für das erste Modell wurden Wachstumsprozesse mit einem diskontinuierlichem Galerkin-Ansatz kombiniert, um die den Gradienten der Dichteveriable innerhalb der schwachen Form der Differentialgleichung für die Evolutionsgleichung zu berechnen. Für das zweite Modell wurde für ein konstant gehaltenes Strukturvolumen die starke Form der Differentialgleichung ausgewertet, was die Berechnung

des Laplace-Operators der DichtevARIABLE fordert. Der Laplace-Operator wurde hierbei mit Hilfe der Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten NPM berechnet. Das Verfahren hat sich auch im Vergleich mit etablierten Ansätzen zur Topologieoptimierung als numerisch äußerst effizient und stabil herausgestellt¹. Numerische Ergebnisse zeigten das Konvergenzverhalten sowie die Netzunabhängigkeit beider Modelle für den zwei- und dreidimensionalen Fall für Ein- und Mehrlastfälle. Das Modell basierend auf der NPM mit konstant gehaltenem Strukturvolumen benötigt weniger Iterationsschritte und zusätzlich kann das Mindeststrukturabmaß über einen Parameter eingestellt werden. Das Wachstumsmodell in Kombination mit dem diskontinuierlichen Galerkin-Ansatz ist im Gegenzug mit wesentlich geringeren Implementierungsaufwand innerhalb der Finite-Elemente-Methode verbunden und könnte sich als interessant zur Modellierung von biologischem Wachstum bzw. biomechanischen Problemen erweisen.

Neben der Topologieoptimierung wurde die TDO der lokalen Materialeigenschaften basierend auf dem Hamilton-Prinzip gezeigt. Die Optimierung zweier unterschiedlicher lokaler Materialeigenschaften wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt, welche simultan zur Topologieoptimierung ausgeführt werden können bzw. als Erweiterung zur selbigen angesehen werden können: Die Optimierung der lokalen Materialorientierung von anisotropen Materialien sowie die Phasenverteilung von zug- und druckaffinen Materialien. Die TDO der lokalen Materialorientierung wurde in Kombination mit den beiden hier vorgestellten TTO-Ansätzen für den dreidimensionalen Fall ausgewertet. Zusätzlich wurde eine Filtertechnik vorgestellt, welche es ermöglicht die Faserkrümmung zwecks Fertigungsbedingungen zu steuern. Numerische Beispiele demonstrierten die Netzunabhängigkeit sowie den Einfluss des Faserkrümmungsfilters auf die Topologie. Bei der TDO von zug- und druckaffinen Materialien handelt es sich um eine TTO mit zwei Materialien: Ein zugaffines Material soll nur unter Zugbelastung stehen und entsprechend ein weiteres druckaffines Material soll nur unter Druckbelastung stehen. Die Ergebnisse einiger numerische Beispiele zeigten hierbei starke Ähnlichkeiten zu klassischen Brückenkonstruktionen im Stahlbetonbau, welche die Plausibilität der Modellergebnisse bestätigen.

Mit Hilfe des Hamilton-Prinzips konnten Evolutionsgleichungen für die zusätzlichen Designvariablen, d.h. lokale Materialorientierung und Phasenverteilung, bestimmt werden. Wie auch bei der TTO erfolgte die numerische Auswertung der Optimierung beider Materialeigenschaften entkoppelt von der mechanischen Analyse mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode. Numerische Ergebnisse zeigten, dass bei beiden Modellerweiterungen das stabile Konvergenzverhalten der TTO erhalten bleibt. Die Abbildungen 9.1 und 9.2 zeigen die Ergebnisse für die TDO bzw. TTO für ein isotropes Material, ein anisotropes Material inklusive optimierter Faserrichtung und die Optimierung mit zug- und druckaffinen Material für jeweils identische Optimierungsprobleme. Die sich ergebene Topologie unterscheidet sich teilweise erheblich, sodass die Optimierung der lokalen Materialeigenschaften immer simultan zur Topologieoptimierung erfolgen sollten.

Eine naheliegende Weiterentwicklung der gezeigten Modelle ist eine Kombination der TDO der lokalen Materialorientierung mit zug- und druckaffinen Materialien, um praxisnahe Strukturen aus konventionellem Stahl-Beton zu optimieren: Neben der Phasenverteilung von Beton und Stahlbeton könnte gleichzeitig die Ausrichtung der Stahlfasern optimiert werden. Des Weiteren ist eine Modifikation der Optimierung der Materialorientierung für additive Fertigung, welche anisotrope Mikrostrukturen erzeugen, denkbar: Indem die ersten beiden Euler-Winkel als örtlich konstant im ganzen Designraum definiert werden, könnte die globale Ausrichtung

¹Die numerische Effizienz der NPM wurde ebenfalls im Zusammenhang mit gradientenbasierten Schädigungsmodellen nachgewiesen [Junker u. a. (2019)].

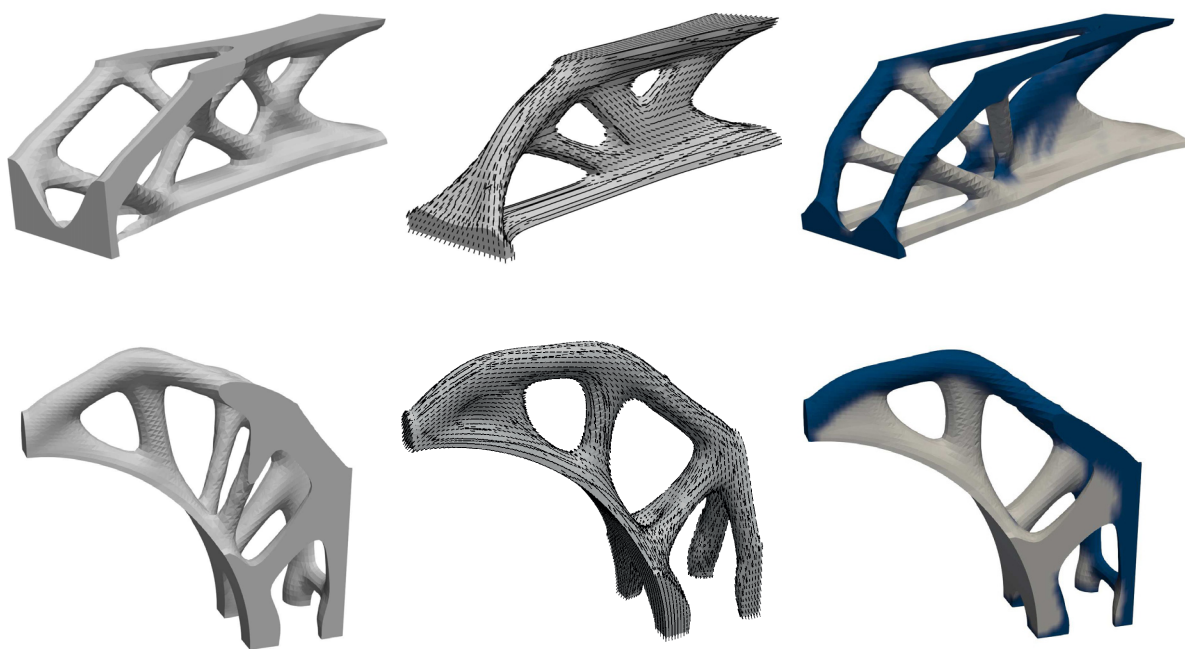


Abbildung 9.1.: Gegenüberstellung der Ergebnisse für die dreidimensionalen Biegeprobleme (Abb. 5.1.5) für ein isotropes Material, für ein anisotropes Material mit Optimierung der Faserrichtung sowie für die Optimierung mit isotropen zugaffinen (blau) und isotropen druckaffinen (grau) Material.

der Druckebene optimiert werden. Der dritte Euler-Winkel würde die lokalen Druckpfade in der Druckebene definieren, sodass diese simultan zur Ausrichtung der Druckebene optimiert werden.

Mit Hilfe des Hamilton-Prinzips lassen sich auf relativ einfache Weise neue Designvariablen für die Optimierung in das Modell einfügen. Dabei führt die Auswertung des Variationsprinzips direkt auf eine Evolutionsgleichung, deren Auswertung als Optimierungsalgorithmus genutzt werden kann. Somit kann bei der Entwicklung neuer Ansätze das gesammelte Wissen aus der Forschung der Materialmodellierung einfließen, um effizientere und thermodynamisch konsistente Modelle für die Strukturoptimierung entwickeln zu können. Neben der Einführung weiterer Designvariablen ließe sich die Optimierung um nicht-linearer Materialien, wie beispielsweise finite Deformationen oder thermomechanische-Kopplung erweitern. Mikromechanische Prozesse wie Phasentransformationen, Plastizität oder Materialschädigung und damit einhergehend Versagenshypothesen bzw. maximal zulässige Spannungen könnten in die Optimierung einfließen, wobei sich entsprechende Evolutionsgleichungen für die internen Variablen ebenfalls mit dem Hamilton-Prinzip herleiten lassen sollten.

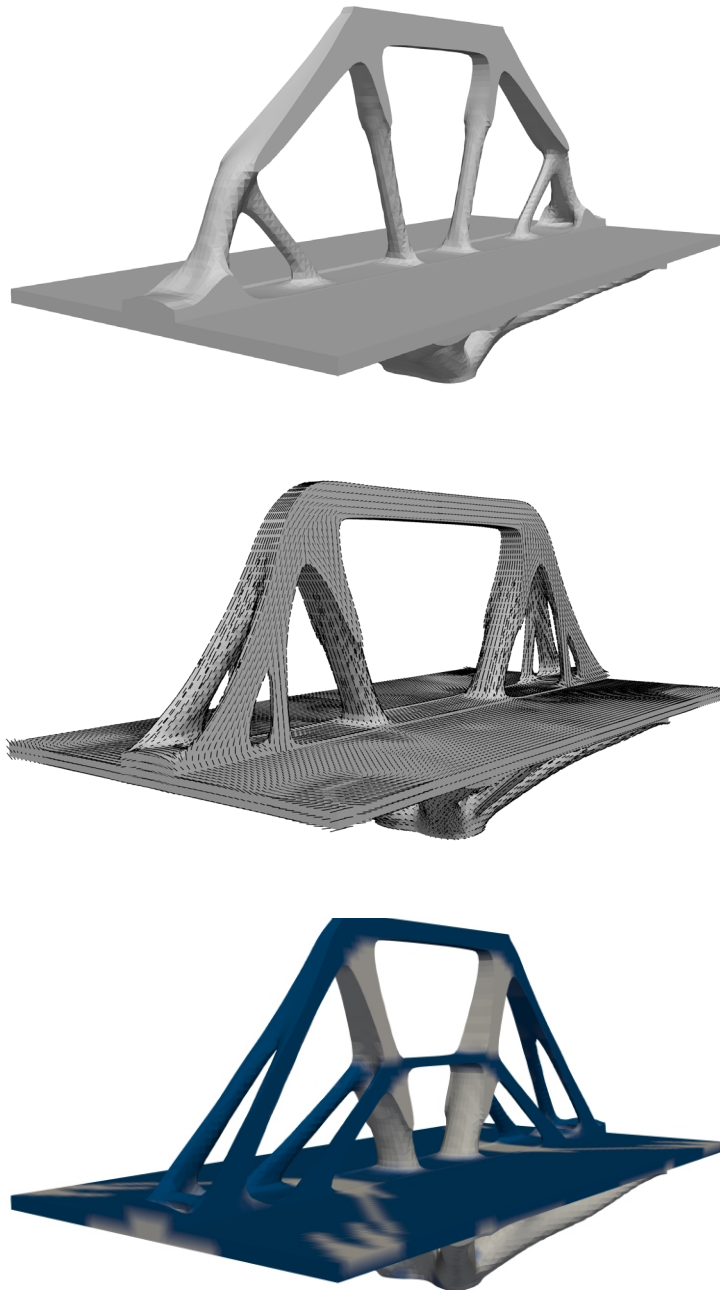


Abbildung 9.2.: Gegenüberstellung der Ergebnisse für das simple Brückenrandwertproblem (Abb. 5.3.27) für ein isotropes Material, für ein anisotropes Material mit Optimierung der Faserrichtung sowie für die Optimierung mit isotropen zugaffinen (blau) und isotropen druckaffinen (grau) Material.

A. Anhang

A.1. Herleitung der Triebkräfte

Die thermodynamischen Triebkräfte für eine interne Variable v sind definiert als die negative Ableitung der die Helmholtz-Energie Ψ nach selbigen internen Variable:

$$\tau_v = -\frac{\partial \Psi}{\partial v} . \quad (\text{A.1.1})$$

Diese stehen im direkten Zusammenhang mit den Sensitivitäten in der klassischen Topologieoptimierung, welche als Ableitung der Zielfunktion $\mathcal{Z}$ nach der Designvariable v

$$\mathcal{Z}_v = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial v} \quad (\text{A.1.2})$$

definiert sind, wobei gemäß Gl. (2.4.1) für die Nachgiebigkeitsminimierung üblicherweise

$$\mathcal{Z} = \int_{\Omega} \Psi \, dV \quad (\text{A.1.3})$$

definiert wird.

Zunächst betrachten wir den Fall der thermodynamischen Triebkräfte, welche für die Auswertung des Hamilton-Prinzips gemäß Gl. (3.7.8) benötigt werden. Die Helmholtz-Energie Ψ sei hierbei in den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ definiert. Die Topologieoptimierung wird als spannungssteuert angenommen (Vgl. Abschnitt 3.7), sodass die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ die maßgebliche Größe des Problems seien und als unabhängig von den internen Variablen, welche als Designvariable definiert werden, mit $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}(v)$ angenommen werden:

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, v) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : [\mathbb{E}(v)]^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.1.4})$$

Folglich ergibt sich mit Hilfe der Ableitungsregel

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbb{E}^{-1} = -\mathbb{E}^{-1} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \mathbb{E}^{-1} \quad (\text{A.1.5})$$

die Ableitung der Helmholtz-Enrgie bzw. die negativen thermodynamischen Triebkräfte zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \Psi(\boldsymbol{\sigma}, v) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial}{\partial v} \mathbb{E}^{-1} \right) : \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E}^{-1}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \underbrace{\mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon} . \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

Im Gegensatz zur im Rahmen dieser Arbeit angewandten TDO bzw. TTO werden in der klassischen Optimierung das Prinzip der virtuellen Arbeit und die Stationaritätsbedingung der Optimierung als getrennte Minimierungsprobleme betrachtet. Dementsprechend erfolgt bei klassischen Optimierungsansätzen die Auswertung der Stationaritätsbedingung der Optimierung üblicherweise ausschließlich bezüglich der Designvariable v . Die Verschiebungen $\mathbf{u}$ ist keine unbekannte Größe innerhalb der eigentlichen Optimierung und die Lösung des Prinzips der virtuellen Arbeit geht als Nebenbedingung in die Optimierung ein. Die Stationaritätsbedingungen des Optimierungsproblem gemäß den Gleichungen (2.4.1) bis (2.4.4) lassen sich für diesen Fall schreiben als

$$\delta\mathcal{H} = \delta\mathcal{Z} + \int_{\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial v} \delta v \, dV + \delta\mathcal{C} + \delta\mathcal{R} = 0 \quad \forall \delta v \quad (\text{A.1.7})$$

$$\text{u.d.B.:} \quad \delta\mathcal{G} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (\text{A.1.8})$$

mit Φ aus Gl. (3.7.15), $\mathcal{C}$ aus Gl. (3.7.12) und $\mathcal{R}$ aus Gl. (3.7.16) sowie der bezüglich der Designvariablen v zu minimierenden Zielfunktion

$$\mathcal{Z} = \int_{\Omega} \Psi(v) \, dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(v) : \mathbb{E}(v) : \boldsymbol{\varepsilon}(v) \, dV. \quad (\text{A.1.9})$$

Die Ableitung der Helmholtz-Energie aus Gl. (A.1.9) nach der Designvariablen v (und damit die negative thermodynamische Triebkraft bzw. Sensitivität) ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \Psi(v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} : \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} : \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Die Ableitung der Dehnungen nach der Designvariable kann mit Hilfe Nebenbedingung (A.1.8) bestimmt werden, welches das Prinzip der virtuellen Arbeit gemäß Gl. (3.2.9) definiert mit

$$\delta\mathcal{G} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}. \quad (\text{A.1.11})$$

Hierfür wird angenommen, dass die Volumenkräfte $\mathbf{b}$ und Traktionskräfte $\mathbf{t}$ unabhängig vom Design v sind, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (\delta \mathcal{G}) &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{E} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \right) &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} : \mathbb{E} + \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} \right) : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} : \mathbb{E} + \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} &= -\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \mathbb{E}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

gilt. Alternativ lässt sich die Ableitung der Dehnungen nach der Designvariable bestimmen über

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (\mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}) = -\mathbb{E}^{-1} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \mathbb{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = -\mathbb{E}^{-1} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \mathbb{E}^{-1}. \quad (\text{A.1.13})$$

In beiden Fällen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \Psi(v) &= \left(-\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \mathbb{E}^{-1} \right) : \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= -\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} : \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

welches mit Gl. (A.1.6) übereingestimmt.

A.2. Cowin-Mehrabadi Notation

Gegeben sei der Spannungstensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (\text{A.2.1})$$

der Dehnungstensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (\text{A.2.2})$$

sowie der Steifigkeitstensor vierter Stufe

$$\mathbb{E} = (\mathbb{E})_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{A.2.3})$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad (\text{A.2.4})$$

sowie

$$(\mathbb{E})_{ijkl} = (\mathbb{E})_{jikl} = (\mathbb{E})_{ijlk} = (\mathbb{E})_{klij} \quad (\text{A.2.5})$$

kann das Hooke'sche Gesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. $\sigma_{ij} = (\mathbb{E})_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ in der Voigt-Notation $\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbb{E}^v \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v$ bzw. $\sigma_\alpha^v = (\mathbb{E})_{\alpha\beta}^v \varepsilon_\beta^v$ für den dreidimensionalen Fall geschrieben werden mit

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \varepsilon_{23} \\ 2 \varepsilon_{13} \\ 2 \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.6})$$

sowie

$$\mathbb{E}^v = \begin{pmatrix} (\mathbb{E})_{1111} & (\mathbb{E})_{1122} & (\mathbb{E})_{1133} & (\mathbb{E})_{1123} & (\mathbb{E})_{1113} & (\mathbb{E})_{1112} \\ (\mathbb{E})_{2211} & (\mathbb{E})_{2222} & (\mathbb{E})_{2233} & (\mathbb{E})_{2223} & (\mathbb{E})_{2213} & (\mathbb{E})_{2212} \\ (\mathbb{E})_{3311} & (\mathbb{E})_{3322} & (\mathbb{E})_{3333} & (\mathbb{E})_{3323} & (\mathbb{E})_{3313} & (\mathbb{E})_{3312} \\ (\mathbb{E})_{2311} & (\mathbb{E})_{2322} & (\mathbb{E})_{2333} & (\mathbb{E})_{2323} & (\mathbb{E})_{2313} & (\mathbb{E})_{2312} \\ (\mathbb{E})_{1311} & (\mathbb{E})_{1322} & (\mathbb{E})_{1333} & (\mathbb{E})_{1323} & (\mathbb{E})_{1313} & (\mathbb{E})_{1312} \\ (\mathbb{E})_{1211} & (\mathbb{E})_{1222} & (\mathbb{E})_{1233} & (\mathbb{E})_{1223} & (\mathbb{E})_{1213} & (\mathbb{E})_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.7})$$

Dementsprechend sind der Spannungs- $\boldsymbol{\sigma}^v$ bzw. Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ in der Voigt-Notation sechsdimensionale Tensoren erster Stufe und der Steifigkeitstensor $\mathbb{E}^v$ ein sechsdimensionaler Tensor zweiter Stufe. Die Voigt-Notation ist von großer Bedeutung, da diese sich als Standard in der numerischen Mechanik etabliert hat. So ist die Voigt-Notation häufig auch der Standard innerhalb der FEM.

Die Cowin-Mehrabadi-Notation $\boldsymbol{\sigma}^6 = \mathbb{E}^6 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^6$ bzw. $\sigma_\alpha^6 = (\mathbb{E})_{\alpha\beta}^6 \varepsilon_\beta^6$ nach Mehrabadi u. Cowin

(1990) ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma}^6 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2} \sigma_{23} \\ \sqrt{2} \sigma_{13} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^6 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{23} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{13} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.8})$$

sowie

$$\mathbb{E}^6 = \begin{pmatrix} (\mathbb{E})_{1111} & (\mathbb{E})_{1122} & (\mathbb{E})_{1133} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1123} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1113} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1112} \\ (\mathbb{E})_{2211} & (\mathbb{E})_{2222} & (\mathbb{E})_{2233} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2223} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2213} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2212} \\ (\mathbb{E})_{3311} & (\mathbb{E})_{3322} & (\mathbb{E})_{3333} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{3323} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{3313} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{3312} \\ \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2311} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2322} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{2333} & 2 (\mathbb{E})_{2323} & 2 (\mathbb{E})_{2313} & 2 (\mathbb{E})_{2312} \\ \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1311} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1322} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1333} & 2 (\mathbb{E})_{1323} & 2 (\mathbb{E})_{1313} & 2 (\mathbb{E})_{1312} \\ \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1211} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1222} & \sqrt{2} (\mathbb{E})_{1233} & 2 (\mathbb{E})_{1223} & 2 (\mathbb{E})_{1213} & 2 (\mathbb{E})_{1212} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.9})$$

Damit ergibt sich für die Umrechnung der Voigt-Notation in die Cowin-Mehrabadi-Notation

$$\sigma_\alpha^6 = \begin{cases} \sigma_\alpha^v = \sigma_{ij} & \forall \alpha \leq 3, i = j = \alpha \\ \sqrt{2} \sigma_\alpha^v = \sqrt{2} \sigma_{ij} & \forall \alpha > 3, i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.2.10})$$

$$\varepsilon_\beta^6 = \begin{cases} \varepsilon_\beta^v = \varepsilon_{ij} & \forall \beta \leq 3, i = j = \beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_\beta^v = \sqrt{2} \varepsilon_{ij} & \forall \beta > 3, i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

$$(\mathbb{E}^6)_{\alpha\beta} = \begin{cases} (\mathbb{E}^v)_{\alpha\beta} & \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \\ \sqrt{2} (\mathbb{E}^v)_{\alpha\beta} & \forall (\alpha, \beta) \in \{4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3\} \\ \sqrt{2} (\mathbb{E}^v)_{\alpha\beta} & \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\} \\ 2 (\mathbb{E}^v)_{\alpha\beta} & \forall (\alpha, \beta) \in \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}. \end{cases} \quad (\text{A.2.12})$$

Die Rotation eines dreidimensionalen Tensors vierter Stufe mit der 3×3 Rotationsmatrix $\mathbf{Q} = Q_{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_\alpha$ ist definiert als

$$(\mathbb{E})_{ijkl}^R = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} Q_{k\gamma} Q_{l\delta} (\mathbb{E})_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.2.13})$$

In der Mehrabadi-Cowin-Notation lässt sich dies vereinfacht schreiben als

$$\mathbb{E}_R^6(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha})]^T \cdot \mathbb{E}_0^6 \cdot \mathbf{Q}^6(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{bzw.} \quad (\mathbb{E}_R^6)_{ij} = Q_{\alpha i}^6 Q_{\beta j}^6 (\mathbb{E}_0^6)_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2.14})$$

mit der 6×6 Matrix $\mathbf{Q}^6$, welche aus den Komponenten von $\mathbf{Q}$ zusammengesetzt wird zu

$$\mathbf{Q}^6 = \begin{pmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 & Q_{13}^2 & \sqrt{2} Q_{12} Q_{13} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{13} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{12} \\ Q_{21}^2 & Q_{22}^2 & Q_{23}^2 & \sqrt{2} Q_{22} Q_{23} & \sqrt{2} Q_{21} Q_{23} & \sqrt{2} Q_{22} Q_{21} \\ Q_{31}^2 & Q_{32}^2 & Q_{33}^2 & \sqrt{2} Q_{33} Q_{32} & \sqrt{2} Q_{33} Q_{31} & \sqrt{2} Q_{31} Q_{32} \\ \sqrt{2} Q_{33} Q_{32} & \sqrt{2} Q_{33} Q_{31} & \sqrt{2} Q_{31} Q_{32} & Q_{22} Q_{33} + Q_{23} Q_{32} & Q_{21} Q_{33} + Q_{31} Q_{23} & Q_{21} Q_{32} + Q_{31} Q_{22} \\ \sqrt{2} Q_{11} Q_{31} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{32} & \sqrt{2} Q_{13} Q_{33} & Q_{12} Q_{33} + Q_{32} Q_{13} & Q_{11} Q_{33} + Q_{13} Q_{31} & Q_{11} Q_{32} + Q_{31} Q_{12} \\ \sqrt{2} Q_{11} Q_{21} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{22} & \sqrt{2} Q_{13} Q_{23} & Q_{12} Q_{23} + Q_{22} Q_{13} & Q_{11} Q_{23} + Q_{21} Q_{13} & Q_{11} Q_{22} + Q_{21} Q_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.15})$$

Literaturverzeichnis

- [Allaire u. Kohn 1993] ALLAIRE, G ; KOHN, RV: Topology optimization and optimal shape design using homogenization. In: *Topology design of structures*. Springer, 1993, S. 207–218
- [Allaire u. a. 2000] ALLAIRE, Grégoire ; AUBRY, Sylvie ; JOUVE, François: Shape optimization with general objective functions using partial relaxation. In: *Topology optimization of structures and composite continua*, GIN Rozvany and N. Olhoff eds (2000), S. 239–249
- [Allaire u. a. 2005] ALLAIRE, Grégoire ; DE GOURNAY, Frédéric ; JOUVE, François ; TOADER, A-M: Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. In: *Control and cybernetics* 34 (2005), Nr. 1, S. 59
- [Allaire u. a. 2002] ALLAIRE, Grégoire ; JOUVE, François ; TOADER, Anca-Maria: A level-set method for shape optimization. In: *Comptes Rendus Mathématique* 334 (2002), Nr. 12, S. 1125–1130
- [Allaire u. a. 2004] ALLAIRE, Grégoire ; JOUVE, François ; TOADER, Anca-Maria: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. In: *Journal of computational physics* 194 (2004), Nr. 1, S. 363–393
- [Altenbach 2018] ALTENBACH, Holm: *Kontinuumsmechanik*. Springer Vieweg, 2018
- [Ambrosio u. Buttazzo 1993] AMBROSIO, Luigi ; BUTTAZZO, Giuseppe: An optimal design problem with perimeter penalization. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 1 (1993), Nr. 1, S. 55–69
- [Amstutz u. Andrä 2006] AMSTUTZ, Samuel ; ANDRÄ, Heiko: A new algorithm for topology optimization using a level-set method. In: *Journal of Computational Physics* 216 (2006), Nr. 2, S. 573–588
- [Andreassen u. a. 2011] ANDREASSEN, Erik ; CLAUSEN, Anders ; SCHEVENELS, Mattias ; LAZAROV, Boyan S. ; SIGMUND, Ole: Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011), Nr. 1, S. 1–16
- [Ansola u. a. 2007] ANSOLA, Rubén ; VEGUERÍA, Estrella ; CANALES, Javier ; TÁRRAGO, José A: A simple evolutionary topology optimization procedure for compliant mechanism design. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 44 (2007), Nr. 1-2, S. 53–62
- [Ball 1976] BALL, John M.: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. In: *Archive for rational mechanics and Analysis* 63 (1976), Nr. 4, S. 337–403

- [Ball 1980] BALL, John M.: Strict convexity, strong ellipticity, and regularity in the calculus of variations. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* Bd. 87 Cambridge University Press, 1980, S. 501–513
- [Barlow 1976] BARLOW, John: Optimal stress locations in finite element models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), Nr. 2, S. 243–251
- [Bartel 2009] BARTEL, Thorsten: *Multiskalenmodellierung martensitischer Phasentransformationen in Formgedächtnislegierungen unter Verwendung relaxierter Energiepotenziale*. Inst. für Mechanik, 2009
- [Basic u. a. 2018] BASIC, Josip ; DEGIULI, Nastia ; BAN, Dario: A class of renormalised meshless Laplacians for boundary value problems. In: *Journal of Computational Physics* 354 (2018), S. 269–287
- [Bathe 2006] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006
- [Bažant u. Lin 1988] BAŽANT, Zdeněk P ; LIN, Feng-Bao: Non-local yield limit degradation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), Nr. 8, S. 1805–1823
- [Bedford 1985] BEDFORD, Anthony: *Hamilton's principle in continuum mechanics*. Bd. 139. Pitman Advanced Publishing Program, 1985
- [Bendsøe 1989] BENDSØE, M. P.: Optimal shape design as a material distribution problem. In: *Structural optimization* 1 (1989), Nr. 4, S. 193–202
- [Bendsøe u. Sigmund 1999] BENDSØE, M. P. ; SIGMUND, O.: Material interpolation schemes in topology optimization. In: *Archive of applied mechanics* 69 (1999), Nr. 9-10, S. 635–654
- [Bendsøe u. Sigmund 2003] BENDSØE, M. P. ; SIGMUND, O.: *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer, 2003
- [Bendsøe 1995] BENDSØE, Martin P.: *Optimization of structural topology, shape, and material*. Bd. 414. Springer, 1995
- [Bendsøe u. Kikuchi 1988] BENDSØE, Martin P. ; KIKUCHI, Noboru: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 71 (1988), Nr. 2, S. 197–224
- [Berdichevsky 2009] BERDICHEVSKY, Victor: *Variational Principles of Continuum Mechanics: I. Fundamentals*. Springer Science & Business Media, 2009
- [Blasques u. Stolpe 2012] BLASQUES, Jose P. ; STOLPE, Mathias: Multi-material topology optimization of laminated composite beam cross sections. In: *Composite Structures* 94 (2012), Nr. 11, S. 3278–3289
- [Borrvall 2001] BORRVALL, Thomas: Topology optimization of elastic continua using restriction. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 8 (2001), Nr. 4, S. 351–385

- [Bourdin 2001] BOURDIN, Blaise: Filters in topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), Nr. 9, S. 2143–2158
- [Bourdin u. Chambolle 2003] BOURDIN, Blaise ; CHAMBOLLE, Antonin: Design-dependent loads in topology optimization. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003), S. 19–48
- [Brackett u. a. 2011] BRACKETT, D ; ASHCROFT, I ; HAGUE, R: Topology optimization for additive manufacturing. In: *Proceedings of the solid freeform fabrication symposium, Austin, TX Bd. 1* S, 2011, S. 348–362
- [Brampton u. a. 2015] BRAMPTON, Christopher J. ; WU, K C. ; KIM, H A.: New optimization method for steered fiber composites using the level set method. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52 (2015), Nr. 3, S. 493–505
- [Bruggi u. Duysinx 2012] BRUGGI, Matteo ; DUYSINX, Pierre: Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 46 (2012), Nr. 3, S. 369–384
- [Bruns u. Tortorelli 2001] BRUNS, Tyler E. ; TORTORELLI, Daniel A.: Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), Nr. 26, S. 3443–3459
- [Bruns u. Tortorelli 2003] BRUNS, Tyler E. ; TORTORELLI, Daniel A.: An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms. In: *International journal for numerical methods in engineering* 57 (2003), Nr. 10, S. 1413–1430
- [Buhl u. a. 2000] BUHL, Thomas ; PEDERSEN, Claus B. ; SIGMUND, Ole: Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19 (2000), Nr. 2, S. 93–104
- [Burger u. Stainko 2006] BURGER, Martin ; STAINKO, Roman: Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 45 (2006), Nr. 4, S. 1447–1466
- [Cahn u. Hilliard 1958] CAHN, John W. ; HILLIARD, John E.: Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. In: *The Journal of chemical physics* 28 (1958), Nr. 2, S. 258–267
- [Cai 2011] CAI, Kun: A simple approach to find optimal topology of a continuum with tension-only or compression-only material. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011), Nr. 6, S. 827–835
- [Cao u. a. 2003] CAO, Yang ; LI, Shengtai ; PETZOLD, Linda ; SERBAN, Radu: Adjoint sensitivity analysis for differential-algebraic equations: The adjoint DAE system and its numerical solution. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 24 (2003), Nr. 3, S. 1076–1089

- [Cardoso u. Fonseca 2003] CARDOSO, Eduardo L. ; FONSECA, Jun Sergio O.: Complexity control in the topology optimization of continuum structures. In: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 25 (2003), Nr. 3, S. 293–301
- [Carstensen u. a. 2002] CARSTENSEN, Carsten ; HACKL, Klaus ; MIELKE, Alexander: Non-convex potentials and microstructures in finite-strain plasticity. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 458 (2002), Nr. 2018, S. 299–317
- [Chen 1991] CHEN, Yi-Chao: On strong ellipticity and the Legendre-Hadamard condition. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 113 (1991), Nr. 2, S. 165–175
- [Christensen u. Klarbring 2008] CHRISTENSEN, P.W. ; KLARBRING, A.: *An Introduction to Structural Optimization*. Springer Netherlands, 2008 (Solid Mechanics and Its Applications). – ISBN 9781402086663
- [Chu u. a. 1996] CHU, D N. ; XIE, YM ; HIRA, A ; STEVEN, GP: Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 21 (1996), Nr. 4, S. 239–251
- [Clausius 1850] CLAUSIUS, Rudolf: Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. In: *Annalen der Physik* 155 (1850), Nr. 3, S. 368–397
- [Coleman 1964] COLEMAN, Bernard D.: Thermodynamics of materials with memory. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 17 (1964), Nr. 1, S. 1–46
- [Coleman u. Noll 1963] COLEMAN, Bernard D. ; NOLL, Walter: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13 (1963), Nr. 1, S. 167–178
- [Collet u. a. 2017] COLLET, Maxime ; BRUGGI, Matteo ; DUYSINX, Pierre: Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55 (2017), Nr. 3, S. 839–855
- [Cowin u. Mehrabadi 1987] COWIN, Stephen C. ; MEHRABADI, Morteza M.: On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials. In: *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 40 (1987), Nr. Part 4, S. 451–476
- [Dacorogna 2007] DACOROGNA, Bernard: *Direct methods in the calculus of variations*. Bd. 78. Springer Science & Business Media, 2007
- [De Borst u. a. 1993] DE BORST, R ; SLUYS, LJ ; MUHLHAUS, H-B ; PAMIN, Jerzy: Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. In: *Engineering computations* 10 (1993), Nr. 2, S. 99–121

- [De Borst u. Mühlhaus 1992] DE BORST, René ; MÜHLHAUS, Hans-Bernd: Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), Nr. 3, S. 521–539
- [Deaton u. Grandhi 2014] DEATON, J. D. ; GRANDHI, R. V.: A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 49 (2014), Nr. 1, S. 1–38
- [Dede 2009] DEDE, Ercan M.: Multiphysics topology optimization of heat transfer and fluid flow systems. In: *proceedings of the COMSOL Users Conference*, 2009
- [Dedè u. a. 2012] DEDÈ, Luca ; BORDEN, Micheal J. ; HUGHES, Thomas J.: Isogeometric analysis for topology optimization with a phase field model. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 19 (2012), Nr. 3, S. 427–465
- [Dehghan 2004] DEGHAN, Mehdi: Numerical solution of the three-dimensional advection–diffusion equation. In: *Applied Mathematics and Computation* 150 (2004), Nr. 1, S. 5–19
- [Demtröder 2017] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Mechanics and thermodynamics*. Springer, 2017
- [Diaz u. Sigmund 1995] DIAZ, Alejandro ; SIGMUND, Ole: Checkerboard patterns in layout optimization. In: *Structural optimization* 10 (1995), Nr. 1, S. 40–45
- [Diaz u. Bendsøe 1992] DIAZ, AR ; BENDSØE, MPe: Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. In: *Structural optimization* 4 (1992), Nr. 1, S. 17–22
- [van Dijk u. a. 2013] DIJK, Nico P. ; MAUTE, K ; LANGELAAR, M ; VAN KEULEN, F: Level-set methods for structural topology optimization: a review. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48 (2013), Nr. 3, S. 437–472
- [Dimitrijevic u. Hackl 2008] DIMITRIJEVIC, Bojan ; HACKL, Klaus: A method for gradient enhancement of continuum damage models. In: *Tech. Mech* 28 (2008), Nr. 1, S. 43–52
- [Duysinx 1997] DUYSINX, Pierre: Layout optimization: A mathematical programming approach. 1997 (OA-41). – Forschungsbericht. – University of Liege
- [Elsgolc 2012] ELSGOLC, Lev D.: *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2012
- [Eschenauer u. a. 1994] ESCHENAUER, Hans A. ; KOBELEV, Vladimir V. ; SCHUMACHER, Axel: Bubble method for topology and shape optimization of structures. In: *Structural optimization* 8 (1994), Nr. 1, S. 42–51
- [Eschenauer u. Olhoff 2001] ESCHENAUER, Hans A. ; OLHOFF, Niels: Topology optimization of continuum structures: a review. In: *Applied Mechanics Reviews* 54 (2001), Nr. 4, S. 331–390

- [Fernandes u. a. 1999] FERNANDES, P ; GUEDES, J M. ; RODRIGUES, H: Topology optimization of three-dimensional linear elastic structures with a constraint on “perimeter”. In: *Computers & Structures* 73 (1999), Nr. 6, S. 583–594
- [Gaganelis u. a. 2019] GAGANELIS, Georgios ; JANTOS, Dustin R. ; MARK, Peter ; JUNKER, Philipp: Tension/compression anisotropy enhanced topology design. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 59 (2019), Nr. 6, S. 2227–2255
- [Gao u. Zhang 2011] GAO, Tong ; ZHANG, Weihong: A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 88 (2011), Nr. 8, S. 774–796
- [Garaigordobil u. a. 2018] GARAIGORDOBIL, Alain ; ANSOLA, Rubén ; SANTAMARÍA, Javier ; BUSTOS, Igor F.: A new overhang constraint for topology optimization of self-supporting structures in additive manufacturing. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58 (2018), Nr. 5, S. 2003–2017
- [Gea u. Luo 2004] GEA, HC ; LUO, JH: On the stress-based and strain-based methods for predicting optimal orientation of orthotropic materials. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26 (2004), Nr. 3-4, S. 229–234
- [Gelfand u. a. 2000] GELFAND, Izrail M. ; SILVERMAN, Richard A. u. a.: *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000
- [Groenwold u. Etman 2008] GROENWOLD, Albert A. ; ETMAN, LFP: On the equivalence of optimality criterion and sequential approximate optimization methods in the classical topology layout problem. In: *International journal for numerical methods in engineering* 73 (2008), Nr. 3, S. 297–316
- [Guest u. a. 2004] GUEST, James K. ; PRÉVOST, Jean H. ; BELYTSCHKO, Ted: Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. In: *International journal for numerical methods in engineering* 61 (2004), Nr. 2, S. 238–254
- [Gurtin u. a. 2010] GURTIN, M. E. ; FRIED, E. ; ANAND, L.: *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, 2010
- [Gurtin 1973] GURTIN, Morton E.: The linear theory of elasticity. In: *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*. Springer, 1973, S. 1–295
- [Haber u. a. 1996] HABER, RB ; JOG, CS ; BENDSØE, Martin P.: A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. In: *Structural Optimization* 11 (1996), Nr. 1-2, S. 1–12
- [Hackl 1999] HACKL, K: On the representation of anisotropic elastic materials by symmetric irreducible tensors. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 11 (1999), Nr. 6, S. 353–369

- [Hackl u. Fischer 2008] HACKL, Klaus ; FISCHER, Franz D.: On the relation between the principle of maximum dissipation and inelastic evolution given by dissipation potentials. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science* 464 (2008), Nr. 2089, S. 117–132
- [Hadamard 2014] HADAMARD, Jacques: *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Courier Corporation, 2014
- [Hamilton 1834] HAMILTON, William R.: On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function. In: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 124 (1834), S. 247–308
- [Hamilton 1835] HAMILTON, William R.: Second essay on a general method in dynamics. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 125 (1835), S. 95–144
- [Hansen 1994] HANSEN, Per C.: Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. In: *Numerical algorithms* 6 (1994), Nr. 1, S. 1–35
- [Harzheim 2008] HARZHEIM, Lothar: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Harri Deutsch Verlag, 2008
- [Harzheim u. Graf 2006] HARZHEIM, Lothar ; GRAF, Gerhard: A review of optimization of cast parts using topology optimization. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 31 (2006), Nr. 5, S. 388–399
- [Hoglund u. Smith 2016] HOGLUND, R ; SMITH, DE: Continuous Fiber Angle Topology Optimization for Polymer Fused Filament Fabrication. In: *Proceedings of the 27th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium, Austin, TX, USA*, 2016, S. 8–10
- [Holmberg u. a. 2013] HOLMBERG, Erik ; TORSTENFELT, Bo ; KLARBRING, Anders: Stress constrained topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48 (2013), Nr. 1, S. 33–47
- [Horstemeyer u. Bammann 2010] HORSTEMEYER, Mark F. ; BAMMANN, Douglas J.: Historical review of internal state variable theory for inelasticity. In: *International Journal of Plasticity* 26 (2010), Nr. 9, S. 1310–1334
- [Huang u. Xie 2010a] HUANG, X. ; XIE, M.: *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Wiley, 2010. – ISBN 9780470689479
- [Huang u. Xie 2007] HUANG, X ; XIE, YM: Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 43 (2007), Nr. 14, S. 1039–1049
- [Huang u. Xie 2008] HUANG, X ; XIE, YM: A new look at ESO and BESO optimization methods. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 35 (2008), Nr. 1, S. 89–92

- [Huang u. Xie 2009] HUANG, X ; XIE, YM: Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. In: *Computational Mechanics* 43 (2009), Nr. 3, S. 393
- [Huang u. Xie 2010b] HUANG, Xiaodong ; XIE, Yi-Min: A further review of ESO type methods for topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41 (2010), Nr. 5, S. 671–683
- [Huebner u. a. 2001] HUEBNER, Kenneth H. ; DEWHIRST, Donald L. ; SMITH, Douglas E. ; BYROM, Ted G.: *The finite element method for engineers*. John Wiley & Sons, 2001
- [Hvejsel u. Lund 2011] HVEJSEL, Christian F. ; LUND, Erik: Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43 (2011), Nr. 6, S. 811–825
- [Jacob u. Ted 2007] JACOB, Fish ; TED, Belytschko: *A first course in finite elements*. Wiley, 2007
- [Jantos u. a. 2019a] JANTOS, Dustin R. ; HACKL, Klaus ; JUNKER, Philipp: An accurate and fast regularization approach to thermodynamic topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 117 (2019), Nr. 9, S. 991–1017
- [Jantos u. a. 2019b] JANTOS, Dustin R. ; HACKL, Klaus ; JUNKER, Philipp: Topology optimization with anisotropic materials, including a filter to smooth fiber pathways. In: *SAMO (akzeptiert)* (2019)
- [Jantos u. a. 2016] JANTOS, Dustin R. ; JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: An evolutionary topology optimization approach with variationally controlled growth. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 310 (2016), S. 780–801
- [Jantos u. a. 2018] JANTOS, Dustin R. ; JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: Optimized growth and reorientation of anisotropic material based on evolution equations. In: *Computational Mechanics* 62 (2018), Nr. 1, S. 47–66
- [Jantos u. a. 2019c] JANTOS, Dustin R. ; RIEDEL, Christopher ; HACKL, Klaus ; JUNKER, Philipp: Comparison of thermodynamic topology optimization with SIMP. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31 (2019), Nr. 2, S. 521–548
- [Jiang u. a. 2019] JIANG, Delin ; HOGGLUND, Robert ; SMITH, Douglas E.: Continuous Fiber Angle Topology Optimization for Polymer Composite Deposition Additive Manufacturing Applications. In: *Fibers* 7 (2019), Nr. 2, S. 14
- [Junker 2014a] JUNKER, Philipp: An accurate, fast and stable material model for shape memory alloys. In: *Smart Materials and Structures* 23 (2014), Nr. 11, S. 115010
- [Junker 2014b] JUNKER, Philipp: A novel approach to representative orientation distribution functions for modeling and simulation of polycrystalline shape memory alloys. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 98 (2014), Nr. 11, S. 799–818

- [Junker 2016] JUNKER, Philipp: Variational modeling of martensitic phase transformations: Hamiltonian principles, experimental validation, numerical approaches. In: *Habilitation* (2016)
- [Junker u. Hackl 2015a] JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: A variational growth approach to topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52 (2015), Nr. 2, S. 293–304
- [Junker u. Hackl 2015b] JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: A variational growth approach to topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52 (2015), Nr. 2, S. 293–304
- [Junker u. Hackl 2016a] JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: Calibration and finite element implementation of an energy-based material model for shape memory alloys. In: *Shape Memory and Superelasticity* 2 (2016), Nr. 3, S. 247–253
- [Junker u. Hackl 2016b] JUNKER, Philipp ; HACKL, Klaus: A discontinuous phase field approach to variational growth-based topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54 (2016), Nr. 1, S. 81–94
- [Junker u. Jantos 2019] JUNKER, Philipp ; JANTOS, Dustin R.: Thermodynamic extremal principles for topology optimization. In: *gacm Report* (2019), Nr. 11, S. 6–19
- [Junker u. Kochmann 2017] JUNKER, Philipp ; KOCHMANN, Dennis M.: Damage-induced mechanical damping in phase-transforming composites materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 113 (2017), S. 132–146
- [Junker u. a. 2014] JUNKER, Philipp ; MAKOWSKI, Jerzy ; HACKL, Klaus: The principle of the minimum of the dissipation potential for non-isothermal processes. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 26 (2014), Nr. 3, S. 259–268
- [Junker u. a. 2019] JUNKER, Philipp ; SCHWARZ, Stephan ; JANTOS, Dustin R. ; HACKL, Klaus: A fast and robust numerical treatment of a gradient-enhanced model for brittle damage. In: *International Journal for Multiscale Computational Engineering* (2019). <http://dx.doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2018027813>. – DOI 10.1615/IntJMultCompEng.2018027813
- [Junker u. a. 2017] JUNKER, Philipp ; SCHWARZ, Stephan ; MAKOWSKI, Jerzy ; HACKL, Klaus: A relaxation-based approach to damage modeling. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 29 (2017), Nr. 1, S. 291–310
- [Kanouté u. a. 2009] KANOUTÉ, P ; BOSO, DP ; CHABOCHE, JL ; SCHREFLER, BA: Multiscale methods for composites: a review. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 16 (2009), Nr. 1, S. 31–75
- [Kemmler u. a. 2005] KEMMLER, R ; LIPKA, A ; RAMM, E: Large deformations and stability in topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30 (2005), Nr. 6, S. 459–476

- [Kiyono u. a. 2017] KIYONO, CY ; SILVA, ECN ; REDDY, JN: A novel fiber optimization method based on normal distribution function with continuously varying fiber path. In: *Composite Structures* 160 (2017), S. 503–515
- [Klarbring u. Torstenfelt 2010] KLARBRING, A. ; TORSTENFELT, B.: Dynamical systems and topology optimization. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 42 (2010), Nr. 2, S. 179–192
- [Klarbring u. Torstenfelt 2012a] KLARBRING, A. ; TORSTENFELT, B.: Dynamical systems, SIMP, bone remodeling and time dependent loads. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 45 (2012), Nr. 3, S. 359–366
- [Klarbring u. Torstenfelt 2012b] KLARBRING, A. ; TORSTENFELT, B.: Lazy zone bone remodeling theory and its relation to topology optimization. In: *Annals of Solid and Structural Mechanics* 4 (2012), Nr. 1-2, S. 25–32
- [Kögl u. Silva 2005] KÖGL, Martin ; SILVA, Emílio CN: Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators. In: *Smart materials and Structures* 14 (2005), Nr. 2, S. 387
- [Kohn u. Strang 1986a] KOHN, Robert V. ; STRANG, Gilbert: Optimal design and relaxation of variational problems, I. In: *Communications on pure and applied mathematics* 39 (1986), Nr. 1, S. 113–137
- [Kohn u. Strang 1986b] KOHN, Robert V. ; STRANG, Gilbert: Optimal design and relaxation of variational problems, II. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 39 (1986), Nr. 2, S. 139–182
- [Kotucha u. Hackl 2003] KOTUCHA, Gregor ; HACKL, Klaus: Density gradient enhanced topology optimization of continuum structures. In: *PAMM* 3 (2003), Nr. 1, S. 292–293
- [Lazarov u. Sigmund 2011] LAZAROV, Boyan S. ; SIGMUND, Ole: Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86 (2011), Nr. 6, S. 765–781
- [Li u. a. 2010] LI, Dongmei ; ZHANG, Xianmin ; GUAN, Yisheng ; ZHAN, Jinqing: Topology optimization of thermo-mechanical continuum structure. In: *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2010 IEEE/ASME International Conference on IEEE*, 2010, S. 403–408
- [Li u. a. 1999] LI, Q ; STEVEN, GP ; XIE, YM: On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. In: *Structural optimization* 18 (1999), Nr. 1, S. 67–73
- [Liang u. a. 1999] LIANG, Qing Q. ; XIE, Yi M. ; STEVEN, Grant P.: Optimal selection of topologies for the minimum-weight design of continuum structures with stress constraints. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 213 (1999), Nr. 8, S. 755–762

- [Liu u. To 2017] LIU, Jikai ; TO, Albert C.: Deposition path planning-integrated structural topology optimization for 3D additive manufacturing subject to self-support constraint. In: *Computer-Aided Design* 91 (2017), S. 27–45
- [Lorentz u. Benallal 2005] LORENTZ, Eric ; BENALLAL, Ahmed: Gradient constitutive relations: numerical aspects and application to gradient damage. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194 (2005), Nr. 50, S. 5191–5220
- [Luo u. a. 2008] LUO, Junzhao ; LUO, Zhen ; CHEN, Shikui ; TONG, Liyong ; WANG, Michael Y.: A new level set method for systematic design of hinge-free compliant mechanisms. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2008), Nr. 2, S. 318–331
- [Luo u. Kang 2012] LUO, Yangjun ; KANG, Zhan: Topology optimization of continuum structures with Drucker–Prager yield stress constraints. In: *Computers & Structures* 90 (2012), S. 65–75
- [Luo u. a. 2005] LUO, Zhen ; CHEN, Liping ; YANG, Jingzhou ; ZHANG, Y ; ABDEL-MALEK, K: Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30 (2005), Nr. 2, S. 142–154
- [Luo u. a. 2010] LUO, Zhen ; GAO, Wei ; SONG, Chongmin: Design of multi-phase piezoelectric actuators. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21 (2010), Nr. 18, S. 1851–1865
- [Luo u. a. 2009] LUO, Zhen ; TONG, Liyong ; LUO, Junzhao ; WEI, Peng ; WANG, Michael Y.: Design of piezoelectric actuators using a multiphase level set method of piecewise constants. In: *Journal of Computational Physics* 228 (2009), Nr. 7, S. 2643–2659
- [Luo u. a. 2007] LUO, Zhen ; TONG, Liyong ; WANG, Michael Y. ; WANG, Shengyin: Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2007), Nr. 1, S. 680–705
- [Manickarajah u. a. 1998] MANICKARAJAH, D ; XIE, YM ; STEVEN, GP: An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 29 (1998), Nr. 3-4, S. 205–230
- [Maugin 2015] MAUGIN, Gérard A: The saga of internal variables of state in continuum thermomechanics (1893-2013). In: *Mechanics Research Communications* (2015)
- [Mehrabadi u. Cowin 1990] MEHRABADI, Morteza M. ; COWIN, Stephen C.: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 43 (1990), Nr. 1, S. 15–41
- [Michell 1904] MICHELL, Anthony George M.: The limits of economy of material in frame-structures. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8 (1904), Nr. 47, S. 589–597

- [Myśliński 2008] MYŚLIŃSKI, Andrzej: Level set method for optimization of contact problems. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32 (2008), Nr. 11, S. 986–994
- [Nayroles u. a. 1992] NAYROLES, B ; TOUZOT, G ; VILLON, P: Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. In: *Computational mechanics* 10 (1992), Nr. 5, S. 307–318
- [Niordson 1983] NIORDSON, Frithiof: Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. In: *International Journal of Solids and Structures* 19 (1983), Nr. 2, S. 141–151
- [Nishiwaki u. a. 1998] NISHIWAKI, Shinji ; FRECKER, Mary I. ; MIN, Seungjae ; KIKUCHI, Noboru: Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. In: *International journal for numerical methods in engineering* 42 (1998), Nr. 3, S. 535–559
- [Niu u. a. 2010] NIU, Bin ; OLHOFF, Niels ; LUND, Erik ; CHENG, Gengdong: Discrete material optimization of vibrating laminated composite plates for minimum sound radiation. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), Nr. 16, S. 2097–2114
- [Nomura u. a. 2015] NOMURA, Tsuyoshi ; DEDE, Ercan M. ; LEE, Jaewook ; YAMASAKI, Shintaro ; MATSUMORI, Tadayoshi ; KAWAMOTO, Atsushi ; KIKUCHI, Noboru: General topology optimization method with continuous and discrete orientation design using isoparametric projection. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 101 (2015), Nr. 8, S. 571–605
- [Novotny u. Sokołowski 2012] NOVOTNY, Antonio A. ; SOKOŁOWSKI, Jan: *Topological derivatives in shape optimization*. Springer Science & Business Media, 2012
- [Onsager 1931a] ONSAGER, Lars: Reciprocal relations in irreversible processes. I. In: *Physical Review* 37 (1931), Nr. 4, S. 405–426
- [Onsager 1931b] ONSAGER, Lars: Reciprocal relations in irreversible processes. II. In: *Physical Review* 38 (1931), Nr. 12, S. 2265
- [Osher u. Fedkiw 2006] OSHER, Stanley ; FEDKIW, Ronald: *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Bd. 153. Springer Science & Business Media, 2006
- [Osher u. Sethian 1988] OSHER, Stanley ; SETHIAN, James A.: Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. In: *Journal of computational physics* 79 (1988), Nr. 1, S. 12–49
- [Otomori u. a. 2011] OTOMORI, M ; YAMADA, T ; IZUI, K ; NISHIWAKI, S: Level set-based topology optimisation of a compliant mechanism design using mathematical programming. In: *Mechanical Sciences* 2 (2011), Nr. 1, S. 91–98
- [Peerlings u. a. 2001] PEERLINGS, Ron H. ; GEERS, Marc G. ; BORST, René de ; BREKELMANS, WA M.: A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. In: *International Journal of solids and Structures* 38 (2001), Nr. 44, S. 7723–7746

- [Petersson u. Sigmund 1998] PETERSSON, Joakim ; SIGMUND, Ole: Slope constrained topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41 (1998), Nr. 8, S. 1417–1434
- [Piegl u. Tiller 2012] PIEGL, Les ; TILLER, Wayne: *The NURBS book*. Springer Science & Business Media, 2012
- [Pingen u. a. 2010] PINGEN, Georg ; WAIDMANN, Matthias ; EVGRAFOV, Anton ; MAUTE, Kurt: A parametric level-set approach for topology optimization of flow domains. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41 (2010), Nr. 1, S. 117–131
- [Prager u. Rozvany 1977] PRAGER, W ; ROZVANY, GIN: Optimal layout of grillages. In: *Journal of Structural Mechanics* 5 (1977), Nr. 1, S. 1–18
- [Prager 1974] PRAGER, William: A note on discretized Michell structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1974), Nr. 3, S. 349–355
- [Prax u. a. 1996] PRAX, C ; SADAT, H ; SALAGNAC, Patrick: Diffuse approximation method for solving natural convection in porous media. In: *Transport in Porous Media* 22 (1996), Nr. 2, S. 215–223
- [Querin u. a. 2000a] QUERIN, OM ; STEVEN, GP ; XIE, YM: Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 34 (2000), Nr. 3-4, S. 291–308
- [Querin u. a. 2000b] QUERIN, OM ; YOUNG, V ; STEVEN, GP ; XIE, YM: Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 189 (2000), Nr. 2, S. 559–573
- [Rajan 1995] RAJAN, S. D.: Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm. In: *Journal of Structural Engineering* 121 (1995), Nr. 10, S. 1480–1487. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1995\)121:10\(1480\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:10(1480)). – DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:10(1480)
- [Ranaivomiarana u. a. 2017] RANAIVOMIARANA, Narindra ; IRISARRI, François-Xavier ; BETTEBGHOR, Dimitri ; DESMORAT, Boris: Simultaneous Topology Optimization of Material Density and Anisotropy. In: *World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation* Springer, 2017, S. 1009–1018
- [Rao 2009] RAO, Singiresu S.: *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2009
- [Rong u. a. 2000] RONG, JH ; XIE, YM ; YANG, XY ; LIANG, QQ: Topology optimization of structures under dynamic response constraints. In: *Journal of Sound and Vibration* 234 (2000), Nr. 2, S. 177–189
- [Rossow u. Taylor 1973] ROSSOW, MP ; TAYLOR, JE: A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. In: *Aiaa Journal* 11 (1973), Nr. 11, S. 1566–1569

- [Rozvany 2009] ROZVANY, G.: A critical review of established methods of structural topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37 (2009), Nr. 3, S. 217–237
- [Rozvany 2001] ROZVANY, George I.: Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21 (2001), Nr. 2, S. 90–108
- [Rozvany 1998] ROZVANY, GIN: Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization. In: *Structural optimization* 15 (1998), Nr. 1, S. 42–48
- [Sadat u. Prax 1996] SADAT, H ; PRAX, C: Application of the diffuse approximation for solving fluid flow and heat transfer problems. In: *International journal of heat and mass transfer* 39 (1996), Nr. 1, S. 214–218
- [Schittkowski 1986] SCHITTKOWSKI, Klaus: NLPQL: A FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems. In: *Annals of operations research* 5 (1986), Nr. 2, S. 485–500
- [Schumacher 2005] SCHUMACHER, Axel: *Optimierung mechanischer strukturen*. Springer, 2005
- [Schumacher u. a. 2015] SCHUMACHER, Christian ; BICKEL, Bernd ; RYS, Jan ; MARSCHNER, Steve ; DARAIO, Chiara ; GROSS, Markus: Microstructures to control elasticity in 3D printing. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 34 (2015), Nr. 4, S. 136
- [Seo u. a. 2010] SEO, Yu-Deok ; KIM, Hyun-Jung ; YOUN, Sung-Kie: Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), Nr. 49-52, S. 3270–3296
- [Sethi u. Thompson 2000] SETHI, Suresh P. ; THOMPSON, Gerald L.: *What is optimal control theory?* Springer, 2000
- [Sethian u. Wiegmann 2000] SETHIAN, James A. ; WIEGMANN, Andreas: Structural boundary design via level set and immersed interface methods. In: *Journal of computational physics* 163 (2000), Nr. 2, S. 489–528
- [Setoodeh u. a. 2006] SETOODEH, Shahriar ; ABDALLA, Mostafa M. ; GÜRDAL, Zafer: Design of variable-stiffness laminates using lamination parameters. In: *Composites Part B: Engineering* 37 (2006), Nr. 4-5, S. 301–309
- [Shu u. a. 2011] SHU, Lei ; WANG, Michael Y. ; FANG, Zongde ; MA, Zhengdong ; WEI, Peng: Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response. In: *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), Nr. 24, S. 5820–5834
- [Sigmund 1994] SIGMUND, Ole: Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), Nr. 17, S. 2313–2329

- [Sigmund 1997a] SIGMUND, Ole: On the design of compliant mechanisms using topology optimization. In: *Journal of Structural Mechanics* 25 (1997), Nr. 4, S. 493–524
- [Sigmund 1997b] SIGMUND, Ole: On the design of compliant mechanisms using topology optimization. In: *Journal of Structural Mechanics* 25 (1997), Nr. 4, S. 493–524
- [Sigmund 2001a] SIGMUND, Ole: A 99 line topology optimization code written in Matlab. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 21 (2001), Nr. 2, S. 120–127
- [Sigmund 2001b] SIGMUND, Ole: Design of multiphysics actuators using topology optimization–Part I: One-material structures. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190 (2001), Nr. 49-50, S. 6577–6604
- [Sigmund 2007] SIGMUND, Ole: Morphology-based black and white filters for topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (2007), Nr. 4-5, S. 401–424
- [Sigmund u. Maute 2013] SIGMUND, Ole ; MAUTE, Kurt: Topology optimization approaches. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48 (2013), Nr. 6, S. 1031–1055
- [Sigmund u. Petersson 1998] SIGMUND, Ole ; PETERSSON, Joakim: Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. In: *Structural optimization* 16 (1998), Nr. 1, S. 68–75
- [Sigmund u. Torquato 1997] SIGMUND, Ole ; TORQUATO, Salvatore: Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), Nr. 6, S. 1037–1067
- [Silhavy 2013] SILHAVY, Miroslav: *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer Science & Business Media, 2013
- [Stegmann u. Lund 2005] STEGMANN, Jan ; LUND, Erik: Discrete material optimization of general composite shell structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62 (2005), Nr. 14, S. 2009–2027
- [Strömberg u. Klarbring 2010] STRÖMBERG, Niclas ; KLARBRING, Anders: Topology optimization of structures in unilateral contact. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41 (2010), Nr. 1, S. 57–64
- [Stuelpnagel 1964] STUELPNAGEL, John: On the parametrization of the three-dimensional rotation group. In: *SIAM review* 6 (1964), Nr. 4, S. 422–430
- [Sun 2006] SUN, Eric Q.: Shear locking and hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS, and ANSYS. In: *Msc software users meeting*, 2006
- [Suzuki u. Kikuchi 1991] SUZUKI, Katsuyuki ; KIKUCHI, Noboru: A homogenization method for shape and topology optimization. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 93 (1991), Nr. 3, S. 291–318
- [Taylor 2017] TAYLOR, Robert L.: *FEAP-A finite element analysis program*. 2017

- [Tcherniak 2002] TCHERNIAK, Dmitri: Topology optimization of resonating structures using SIMP method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), Nr. 11, S. 1605–1622
- [Truesdell 1952] TRUESDELL, Clifford: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 1 (1952), S. 125–300
- [Truesdell 2012] TRUESDELL, Clifford: *The Elements of Continuum Mechanics: Lectures given in August-September 1965 for the Department of Mechanical and Aerospace Engineering Syracuse University Syracuse, New York*. Springer Science & Business Media, 2012
- [Van Dijk u. a. 2012] VAN DIJK, NP ; LANGELAAR, M ; VAN KEULEN, F: Explicit level-set-based topology optimization using an exact Heaviside function and consistent sensitivity analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91 (2012), Nr. 1, S. 67–97
- [Van Miegroet u. Duysinx 2007] VAN MIEGROET, Laurent ; DUYSINX, Pierre: Stress concentration minimization of 2D filets using X-FEM and level set description. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (2007), Nr. 4-5, S. 425–438
- [Voigt u. a. 1928] VOIGT, Woldemar u. a.: *Lehrbuch der kristallphysik*. Bd. 962. Teubner Leipzig, 1928
- [Waffenschmidt u. Menzel 2012] WAFFENSCHMIDT, T. ; MENZEL, A.: Application of an anisotropic growth and remodelling formulation to computational structural design. In: *Mechanics Research Communications* 42 (2012), S. 77–86
- [Wallin u. a. 2016] WALLIN, Mathias ; JÖNSSON, Viktor ; WINGREN, Eric: Topology optimization based on finite strain plasticity. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 54 (2016), Nr. 4, S. 783–793
- [Wallin u. a. 2012] WALLIN, Mathias ; RISTINMAA, Matti ; ASKFELT, Henrik: Optimal topologies derived from a phase-field method. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 45 (2012), Nr. 2, S. 171–183
- [Wang u. Wang 2005a] WANG, Michael Y. ; WANG, Shengyin: Bilateral filtering for structural topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), Nr. 13, S. 1911–1938
- [Wang u. Wang 2005b] WANG, Michael Y. ; WANG, Shengyin: Bilateral filtering for structural topology optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), Nr. 13, S. 1911–1938
- [Wang u. Wang 2004] WANG, Michael Y. ; WANG, Xiaoming: “Color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 6-8, S. 469–496

- [Wang u. a. 2003] WANG, Michael Y. ; WANG, Xiaoming ; GUO, Dongming: A level set method for structural topology optimization. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 192 (2003), Nr. 1-2, S. 227–246
- [Wang u. Zhou 2004] WANG, Michael Y. ; ZHOU, Shiwei: Phase field: a variational method for structural topology optimization. In: *Comput Model Eng Sci* 6 (2004), Nr. 6, S. 547–566
- [Wang u. Wang 2006] WANG, Shengyin ; WANG, Michael Y.: Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. In: *International journal for numerical methods in engineering* 65 (2006), Nr. 12, S. 2060–2090
- [Wang u. a. 2004] WANG, X ; WANG, MY ; GUO, D: Structural shape and topology optimization in a level-set-based framework of region representation. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 27 (2004), Nr. 1-2, S. 1–19
- [Wu u. a. 2017] WU, Jun ; CLAUSEN, Anders ; SIGMUND, Ole: Minimum compliance topology optimization of shell–infill composites for additive manufacturing. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), S. 358–375
- [Xie u. Steven 1993] XIE, Yi M. ; STEVEN, Grant P.: A simple evolutionary procedure for structural optimization. In: *Computers & structures* 49 (1993), Nr. 5, S. 885–896
- [Xie u. Steven 1997] XIE, Yi M. ; STEVEN, Grant P.: Basic evolutionary structural optimization. In: *Evolutionary Structural Optimization*. Springer, 1997, S. 12–29
- [Xie u. Steven 1996] XIE, YM ; STEVEN, GP: Evolutionary structural optimization for dynamic problems. In: *Computers & Structures* 58 (1996), Nr. 6, S. 1067–1073
- [Yamada u. a. 2010] YAMADA, Takayuki ; IZUI, Kazuhiro ; NISHIWAKI, Shinji ; TAKEZAWA, Akihiro: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199 (2010), Nr. 45-48, S. 2876–2891
- [Yang u. Chuang 1994] YANG, RJ ; CHUANG, CH: Optimal topology design using linear programming. In: *Computers & structures* 52 (1994), Nr. 2, S. 265–275
- [Yang u. a. 2002] YANG, XY ; XIE, YM ; LIU, JS ; PARKS, GT ; CLARKSON, PJ: Perimeter control in the bidirectional evolutionary optimization method. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24 (2002), Nr. 6, S. 430–440
- [Zhang u. a. 2017] ZHANG, Guodong ; LI, Lei ; KHANDELWAL, Kapil: Topology optimization of structures with anisotropic plastic materials using enhanced assumed strain elements. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55 (2017), Nr. 6, S. 1965–1988
- [Zhou u. Li 2006] ZHOU, Ke-min ; LI, Xia: Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model. In: *Computational Mechanics* 38 (2006), Nr. 2, S. 163–170

- [Zhou u. Rozvany 2001] ZHOU, M ; ROZVANY, GIN: On the validity of ESO type methods in topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21 (2001), Nr. 1, S. 80–83
- [Zhou u. a. 2001] ZHOU, M ; SHYY, YK ; THOMAS, HL: Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21 (2001), Nr. 2, S. 152–158
- [Zhou u. Li 2008] ZHOU, Shiwei ; LI, Qing: A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier–Stokes flow. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2008), Nr. 24, S. 10178–10195
- [Zhou u. Wang 2007] ZHOU, Shiwei ; WANG, Michael Y.: Multimaterial structural topology optimization with a generalized Cahn–Hilliard model of multiphase transition. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (2007), Nr. 2, S. 89–111
- [Zhu u. a. 2016] ZHU, Ji-Hong ; ZHANG, Wei-Hong ; XIA, Liang: Topology optimization in aircraft and aerospace structures design. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23 (2016), Nr. 4, S. 595–622
- [Zhu u. Martínez 2012] ZHU, Minghui ; MARTÍNEZ, Sonia: On distributed convex optimization under inequality and equality constraints. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (2012), Nr. 1, S. 151–164
- [Zienkiewicz u. Taylor 2000] ZIENKIEWICZ, Olgierd C. ; TAYLOR, Robert L.: *The finite element method: Solid mechanics*. Bd. 2. Butterworth-heinemann, 2000
- [Zorn 1945] ZORN, Max A.: Characterization of analytic functions in Banach spaces. In: *Annals of Mathematics* (1945), S. 585–593
- [Zuo u. Saitou 2017] ZUO, Wenjie ; SAITOU, Kazuhiro: Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55 (2017), Nr. 2, S. 477–491
- [Zuo u. Xie 2015] ZUO, Zhi H. ; XIE, Yi M.: A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization. In: *Advances in Engineering Software* 85 (2015), S. 1–11

Hinweis auf Vorveröffentlichungen

Nach §7(1) sei darauf hingewiesen, dass Teile dieser Arbeit vorab in englischer Sprache in wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlicht wurden. Dies geschah in Absprache mit den Betreuern, PD Dr.-Ing. Philipp Junker und Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl. Bei Verwendung dieser Artikel wurde an den entsprechenden Stellen in der Arbeit verwiesen. Es handelt sich hierbei um die folgenden Veröffentlichungen:

- ▶ Jantos, D. R.; Junker, P. und Hackl, K. 2016: An evolutionary topology optimization approach with variationally controlled growth. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 310, 780–801. doi: 10.1016/j.cma.2016.07.022
- ▶ Jantos, D. R.; Junker, P. und Hackl, K. 2016: An evolution equation based approach to topology optimization. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 16, 693–694. doi: 10.1002/pamm.201610335
- ▶ Jantos, D. R.; Junker, P. und Hackl, K. 2017: Topology and material orientation optimization based on evolution equations. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 17, 739–740. doi: 10.1002/pamm.201710337
- ▶ Jantos, D. R.; Junker, P. und Hackl, K. 2018: Optimized growth and reorientation of anisotropic material based on evolution equations. *Computational mechanics* 62, 47–66. doi: 10.1007/s00466-017-1483-3
- ▶ Jantos, D. R.; Hackl, K. und Junker, P. 2018: On an accurate and fast regularization approach to thermodynamic based topology optimization. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 18, 739–740. doi: 10.1002/pamm.201800137
- ▶ Jantos, D. R.; Riedel, C.; Hackl, K. und Junker, P. 2019: Comparison of thermodynamic topology optimization with SIMP. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 31, 521–548. doi: 10.1007/s00161-018-0706-y
- ▶ Gaganelis, G.; Jantos, D. R.; Mark, P. und Junker, P. 2019: Tension/compression anisotropy enhanced topology design. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 59, 2227–2255. doi: 10.1007/s00158-018-02189-0
- ▶ Junker, P. und Jantos, D. R. 2019: Thermodynamic extremal principles for topology optimization. *GACM Report No. 11*, 6–19.
- ▶ Jantos, D. R.; Hackl, K. und Junker, P. 2019: An accurate and fast regularization approach to thermodynamic topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 117, 991–1017. doi: 10.1002/nme.5988
- ▶ Junker, P.; Schwarz, S.; Jantos, D. R. und Hackl, K. 2019: A fast and robust numerical treatment of a gradient-enhanced model for brittle damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2018027813
- ▶ Jantos, D. R.; Hackl, K. und Junker, P. 2019: Structural and material optimization based on thermodynamic principles. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 19. doi: 10.1002/pamm.201900112
- ▶ Jantos, D. R.; Hackl, K. und Junker, P. 2019: Topology optimization with anisotropic materials, including a filter to smooth fiber pathways. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. *Akzeptiert*

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Dustin Roman Jantos
Wohnort	Bochum, Deutschland
Geburtsdatum	13. April 1990
Geburtsort	Dorsten, Deutschland
Staatsangehörigkeit	Deutsch, Polnisch

Beruflicher Werdegang

seit 09.2015	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanik, Materialtheorie an der Ruhr-Universität Bochum
03.2012 – 08.2015	Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl für Mechanik, Materialtheorie an der Ruhr-Universität Bochum
10.2013 – 01.2014	Industriefachpraktikum bei der Siemens AG in Mülheim an der Ruhr, Abteilung für Arbeitsvorbereitungs- und Fertigungssimulation (CAD/CAM)
11.2009 – 08.2010	Zivildienst bei der Stadtgärtnerei in Dorsten, Garten- und Landschaftsbau

Universitäre Ausbildung

seit 10.2018	Mitglied der GAMM-Juniors der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik e.V.
seit 09.2015	Doktorand in Maschinenbau am Lehrstuhl für Mechanik, Materialtheorie an der Ruhr-Universität Bochum
03.2014 – 08.2015	Master of Science in Maschinenbau, angewandte Mechanik an der Ruhr-Universität Bochum
10.2011 – 10.2014	Stipendium für herausragende Studienleistungen und besonderes Engagement des Bildungsfonds der RUB (Deutschlandstipendium)
10.2010 – 03.2015	Bachelor of Science in Maschinenbau, angewandte Mechanik an der Ruhr-Universität Bochum

Schule

06.2000 – 06.2009	Gymnasium Petrinum in Dorsten, Allgemeine Hochschulreife mit Leistungskursen Mathematik und Physik
06.1996 – 06.2000	Grundschule Bonifatius in Dorsten

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 184**

ISBN 978-3-935892-62-9